21世纪高等学校辅导教材

• 电子与信息类丛书

数字信号处理学习指导与题解

姚天任 编著

- 学习引导、典型例题分析
- 精选习题试题并解答
- 考研真题、模拟试题与解答

华中科技大学出版社

21 世纪高等学校辅导教材

数字信号处理·学习指导与题解

姚天任　编著

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理学习指导与题解/姚天任　编著
武汉:华中科技大学出版社，　2002 年 9 月
ISBN 7-5609-2819-6

Ⅰ.数…
Ⅱ.姚…
Ⅲ.数字信号处理-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.TN911.72

数字信号处理学习指导与题解　　姚天任　编著

责任编辑:周芬娜　　封面设计:潘　群
责任校对:张兴田　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社　　武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　排:华大文印中心
印　刷:武汉市新华印刷有限责任公司

开本:787×960　1/16　　印张:18.25　　字数:337 000
版次:2002 年 9 月第 1 版　　印次:2002 年 9 月第 1 次印刷　　印数:1—5 000
ISBN 7-5609-2819-6/TN·69　　定价:23.80 元

内容提要

本书是根据教育部制定的高等院校数字信号处理课程的教学基本要求及硕士研究生入学考试的基本要求而编写的。全书对离散时间信号和离散时间系统、离散傅里叶变换和快速傅里叶变换、数字滤波器，以及离散时间随机信号等理论和方法，进行了简明扼要和系统的总结。前4章涵盖上述4方面的内容，各章都包括3部分，即学习要点、例题解析和自测自评。第5章是本科数字信号处理课程期终考试试题和硕士研究生入学考试试题，以及这些试题的解答。全书包括200多道题目，其中例题和自测试题主要是从姚天任主编的《数字信号处理》中选取的，也有一些是从其它教材及历届考研试题中选取的，所有题目都给予了详细的解答，所选题目具有典型性、代表性。本书的编写注意了突出基本理论、基本概念和基本方法，强调了解题的思路和技巧。

本书可作为高等学校本科学生的辅助教材和报考电子、信息、通信等学科专业和其它相关专业硕士研究生的考生的复习参考用书。

前　言

数字信号处理是现代信息和通信工程学科的理论和技术基础，是电子、信息、通信、雷达、声纳、导航、自动控制、计算机、光学、生物医学、地球物理等专业的必修课或选修课，也是相关专业研究生入学考试科目之一。

数字信号处理是理论和实际紧密结合、内容丰富、发展迅速、应用广泛的一门学科，学习数字信号处理课程应着重于掌握基本理论、基本概念和基本方法。因此，学习这门课程时应当多做练习和实验，本书正是为了帮助大学本科学生学习数字信号处理课程和准备参加研究生入学考试的考生编写的。

本书内容包括：离散时间信号和离散时间系统、离散傅里叶变换和快速傅里叶变换、数字滤波器，以及离散时间随机信号等4部分。这些是目前国内许多大学为本科学生开设的数字信号处理课程所讲授的内容，也是硕士研究生入学考试中数字信号处理科目所要求的内容。其中，离散时间随机信号，一些学校认为属于研究生课程的内容，因此没有对本科学生讲授，也没有作为研究生入学考试的要求。

本书前4章涵盖上述4方面的内容，各章都包括3部分，即学习要点、例题解析和自测自评。第5章是本科数字信号处理课程期终考试的试题和研究生入学考试的试题，以及这些试题的解答。全书包括200多道题目及其解答，其中例题和自测试题主要是从姚天任主编的《数字信号处理》中选取的，也有一些是从其它教材及历届考研试题中选取的。

本书的特点是：内容精练、重点突出、题目经典、难易适中。

编者要感谢华中科技大学研究生院常翠华老师、电信系王殊教授和杨灵副教授，他们提供了本科数字信号处理课程期终考试和研究生入学考试的部分试题，编者在解答这些题目时，参考了他们的答案。

读者如发现书中的错误，敬请通过出版社或直接向编者赐教，编者将不胜感激！

编　者

2002年8月

目　　录

第1章　离散时间信号和离散时间系统 ………………………… (1)

1.1　学习要点 ………………………… (1)

1.1.1　离散时间信号 ………………………… (1)

1.1.2　离散时间系统 ………………………… (2)

1.1.3　离散时间信号和离散时间系统的频域描述 ………………………… (3)

1.1.4　信号的取样 ………………………… (5)

1.1.5　Z 变换 ………………………… (7)

1.1.6　系统函数 ………………………… (12)

1.2　例题解析 ………………………… (13)

1.3　自测自评 ………………………… (47)

1.3.1　自测试题 ………………………… (47)

1.3.2　自测试题解答 ………………………… (51)

第2章　离散傅里叶变换及其快速算法 ………………………… (67)

2.1　学习要点 ………………………… (67)

2.1.1　离散傅里叶级数及其性质 ………………………… (67)

2.1.2　离散傅里叶变换(DFT)的定义和性质 ………………………… (69)

2.1.3　循环卷积 ………………………… (71)

2.1.4　频率取样 ………………………… (71)

2.1.5　快速傅里叶变换(FFT) ………………………… (71)

2.1.6　快速傅里叶逆变换(IFFT) ………………………… (74)

2.1.7　N 不等于2的幂时FFT的算法 ………………………… (74)

2.1.8　N为合数时FFT的算法 ………………………… (74)

2.1.9　快速傅里叶变换的应用举例 ………………………… (74)

2.1.10　分段卷积 ………………………… (75)

2.1.11　线性调频 Z 变换 ………………………… (78)

2.2　例题解析 ………………………… (79)

2.3　自测自评 ………………………… (93)

2.3.1　自测试题 ………………………… (93)

2.3.2　自测试题解答 ………………………… (97)

第3章 数字滤波器 …… (110)
3.1 学习要点 …… (110)
3.1.1 数字滤波器的功能、表示方法和种类 …… (110)
3.1.2 无限冲激响应数字滤波器的基本网络结构 …… (110)
3.1.3 有限冲激响应数字滤波器的基本网络结构 …… (113)
3.1.4 数字滤波器的技术指标和设计步骤 …… (117)
3.1.5 IIR数字滤波器的设计方法 …… (118)
3.1.6 IIR数字滤波器的频率变换 …… (127)
3.1.7 FIR数字滤波器的窗函数设计方法 …… (129)
3.2 例题解析 …… (131)
3.3 自测自评 …… (172)
3.3.1 自测试题 …… (172)
3.3.2 自测试题解答 …… (180)
第4章 离散时间随机信号 …… (214)
4.1 学习要点 …… (214)
4.1.1 随机变量的描述 …… (214)
4.1.2 随机变量的数值特征 …… (215)
4.1.3 离散随机过程 …… (216)
4.1.4 狭义平稳随机过程 …… (217)
4.1.5 随机过程的数值特征 …… (217)
4.1.6 自相关序列和自协方差序列 …… (217)
4.1.7 离散随机过程的平均 …… (219)
4.1.8 相关序列和协方差序列的性质 …… (220)
4.1.9 功率谱 …… (221)
4.1.10 离散随机信号通过线性非移变系统 …… (222)
4.2 例题解析 …… (223)
4.3 自测自评 …… (239)
4.3.1 自测试题 …… (239)
4.3.2 自测试题解答 …… (241)
第5章 试题及解答 …… (249)
5.1 本科数字信号处理课程期终考试试题 …… (249)
试题(1) …… (249)
试题(1)解答 …… (250)
试题(2) …… (259)

试题(2)解答 …………………………………………………………… (260)

5.2　硕士研究生入学考试数字信号处理试题 ……………………… (265)

试题(1)…………………………………………………………………… (265)

试题(1)解答 …………………………………………………………… (266)

试题(2)…………………………………………………………………… (270)

试题(2)解答 …………………………………………………………… (270)

试题(3)…………………………………………………………………… (273)

试题(3)解答 …………………………………………………………… (273)

试题(4)…………………………………………………………………… (275)

试题(4)解答 …………………………………………………………… (277)

参考文献………………………………………………………………… (283)

第1章　离散时间信号和离散时间系统

1.1 学习要点

1.1.1 离散时间信号

1. 离散时间信号的定义

一个离散时间信号是指一个实数或复数的数字序列，它是整数自变量n的函数，表示为$x(n)$。n可以是取整数值的时间，也可以是取整数值的其它量（例如位移），因而可以把n单纯地看成是数字序列的下标。在非整数的n值上没有对$x(n)$加以定义，并不意味着$x(n)$的值等于零。

2. 三种基本离散时间信号

单位取样序列、单位阶跃序列和复指数序列是三个基本和重要的离散时间信号，任何复杂的信号都可以用它们来表示。它们分别定义如下。

（1）单位取样序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & 其它\end{cases} \tag{1.1}$$

（2）单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & 其它\end{cases} \tag{1.2}$$

（3）复指数序列

$$e^{j\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n) \tag{1.3}$$

复指数序列是以余弦序列为实部、正弦序列为虚部所构成的一个复数序列。

3. 任意序列

任何序列$x(n)$都可以表示成具有不同时移（或位移）的单位取样序列的加权和，即

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k) \tag{1.4}$$

1.1.2 离散时间系统

1. 离散时间系统的定义

离散时间系统是一种把输入序列 $x(n)$ 映射成输出序列 $y(n)$ 的唯一变换或运算，常用 $T[\ ]$ 表示，即

$$y(n)=T[x(n)] \tag{1.5}$$

2. 线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统。叠加原理用下式表示：

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] \tag{1.6}$$

3. 非移变系统

若系统的响应与输入信号施加于系统的时刻无关，则称该系统为非移变或非时变系统。即是说，当这种系统的输入 $x(n)$ 产生时移（或位移）k 时，系统的响应 $y(n)$ 也产生相同的时移（或位移）k，表示为 $y(n-k)=T[x(n-k)]$。

4. 线性非移变系统

一个满足叠加原理的非移变系统，称为线性非移变系统。线性非移变系统的输入与输出序列之间存在着线性卷积关系，表示为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=x(n)*h(n) \tag{1.7}$$

其中，$h(n)$ 是系统的单位取样响应。线性卷积计算满足交换律、结合律和对加法运算的分配律。

5. 稳定系统

对于每个有界输入，都产生有界输出的系统称为稳定系统。即是说，当稳定系统的输入 $|x(n)|\leqslant M$ 时，系统的输出 $|y(n)|<\infty$，这里 M 是任一正的常数。一个线性非移变系统是稳定系统的充分和必要条件，是其单位取样响应 $h(n)$ 绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty \tag{1.8}$$

6. 因果系统

输出的变化不领先于输入的变化的系统称为因果系统。即是说，因果系统的输出只取决于现时的和过去的输入而与未来的输入无关。一个线性非移变系统是因果系统的充分和必要条件，是它的单位取样响应 $h(n)$ 满足条件

$$h(n)=0,\quad n<0 \tag{1.9}$$

系统的线性、非移变性、稳定性和因果性是系统的四个互不相关的性质。

7. 线性非移变系统的差分方程表示

线性非移变系统的输入$x(n)$和输出$y(n)$满足下列线性常系数差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \tag{1.10}$$

在$N=0$和$M=\infty$的情况下，上式与式(1.7)等效。

1.1.3　离散时间信号和离散时间系统的频域描述

1. 离散时间信号的傅里叶变换的定义

离散时间信号$x(n)$的傅里叶变换定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \tag{1.11}$$

$X(e^{j\omega})$的傅里叶逆变换定义为

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{1.12}$$

2. 离散时间信号的傅里叶变换的性质

离散时间信号的傅里叶变换具有表1.1所列的性质，表中$X(e^{j\omega})$、$Y(e^{j\omega})$、$X_1(e^{j\omega})$和$X_2(e^{j\omega})$分别是$x(n)$、$y(n)$、$x_1(n)$和$x_2(n)$的傅里叶变换。

表1.1　离散时间信号的傅里叶变换的性质

序号	性　质	信　　号	傅里叶变换
1	线性	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$
2	移位	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k}X(e^{j\omega})$
3	调制	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4	折叠	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
5	乘以n	$nx(n)$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6	复共扼	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
		$x^*(-n)$	$X^*(e^{j\omega})$
7	卷积	$x(n)*y(n)$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$

续表

序号	性　质	信　　号	傅里叶变换
8	相乘	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta$
9	对称性	$\mathrm{Re}[x(n)]$	$X_e(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\left(\frac{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+X^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}{2}\right)$
		$\mathrm{jIm}[x(n)]$	$X_o(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\left(\frac{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})-X^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}{2}\right)$
		共扼对称序列 $\frac{x(n)+x^*(-n)}{2}$	$\mathrm{Re}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$
		共扼反对称序列 $\frac{x(n)-x^*(-n)}{2}$	$\mathrm{jIm}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$
		$x(n)$为实序列	$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=X^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$ $\mathrm{Re}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]=\mathrm{Re}[X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$ $\mathrm{Im}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]=-\mathrm{Im}[X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})]$ $\lvert X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\rvert=\lvert X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\rvert$ $\arg[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]=-\arg[X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})]$
		$x(n)$为实序列：偶序列 $\frac{x(n)+x(-n)}{2}$	$\mathrm{Re}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$
		$x(n)$为实序列：奇序列 $\frac{x(n)-x(-n)}{2}$	$\mathrm{jIm}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$

3. 离散时间系统的频率响应

系统的单位取样响应$h(n)$的傅里叶变换

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{1.13}$$

称为该系统的频率响应或频率特性。$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$一般为复数，表示为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \lvert H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\rvert \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg[H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]} \tag{1.14}$$

其中，$\lvert H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\rvert$称为系统的幅度响应或幅度特性，$\arg[H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$称为系统的相位

响应或相位特性。

系统的频率响应是以 2π 为周期的 ω 的连续函数。若 $h(n)$ 为实数，则系统的幅度响应在 $0\leqslant\omega\leqslant2\pi$ 区间内是偶对称的，而相位响应是奇对称的。如果系统是稳定的，则由于其单位取样响应 $h(n)$ 绝对可和，故定义系统的频率响应的级数收敛。

1.1.4　信号的取样

1. 连续时间信号的取样

离散时间信号常由连续时间信号经周期取样得到。连续时间信号 $x_a(t)$ 经周期取样得到取样信号 $\hat{x}_a(nT)$，取样信号的频谱为

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jr\Omega_s) \tag{1.15}$$

其中，T 是取样周期、$X_a(j\Omega)$ 是连续时间信号 $x_a(t)$ 的频谱。即取样信号 $\hat{x}_a(nT)$ 的频谱是连续时间信号 $x_a(t)$ 的频谱的周期延拓，延拓的周期为取样角频率 Ω_s。

当连续时间信号 $x_a(t)$ 是最高频率为 Ω_0 的带限信号，且 $\Omega_s<2\Omega_0$ 时，周期延拓后的频谱必互相重叠，重叠部分的频率成分的幅值与原信号不同，称为频谱混叠现象。非带限连续时间信号经周期取样后，得到的取样信号的频谱必然存在混叠现象。为了使周期延拓后的频谱不产生混叠失真，应要求取样频率足够高。在信号的频带受限的情况下，取样频率应等于或大于信号最高频率的两倍，即 $\Omega_s\geqslant2\Omega_0$。取样频率的一半，即 $\Omega_s/2$ 称为折叠频率。等于信号最高频率两倍的取样频率（即 $\Omega_s=2\Omega_0$）称为奈奎斯特频率。

2. 离散时间信号的频谱

假设离散时间信号 $x(n)$ 是模拟信号 $x_a(t)$ 通过周期性取样得到的，即 $x(n)=x_a(nT)$，则 $x(n)$ 的频谱是取样信号 $\hat{x}_a(nT)$ 的频谱经频率归一化后的结果，表示为

$$X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\Omega T}=\hat{X}_a(j\Omega) \tag{1.16}$$

其中，$\omega=\Omega T=2\pi\dfrac{f}{f_s}$ 是归一化频率 $\dfrac{f}{f_s}$ 的 2π 倍。

3. 信号重建

如果取样信号的频谱不存在混叠，那么让取样信号通过一个截止频率为 $\dfrac{\Omega_s}{2}$ 的理想低通滤波器，就可将取样信号频谱中的基带频谱取出来，从而无失真地恢复原来的模拟信号。

从取样信号 $\hat{x}_a(nT)$ 恢复原信号 $x_a(t)$ 的取样内插公式为

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nt)s_a(t-nT) \tag{1.17}$$

其中，$s_a(t-nT)$是内插函数

$$s_a(t-nT) = \frac{\sin[\pi/T(t-nT)]}{\pi/T(t-nT)} \tag{1.18}$$

4. 离散时间信号的取样

离散时间信号$x(n)$经取样后得到的序列$x_p(n)$称为离散时间取样序列，它在取样周期N的整数倍点上的取样值等于原来的序列值，而在其它点的取样值都为零，即

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), & n = kN(k\text{ 为整数}) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{1.19}$$

$x_p(n)$的傅里叶变换$X_p(\omega)$是$x(n)$的傅里叶变换$X(\omega)$的周期延拓，延拓周期为取样频率ω_s，即

$$X_p(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\omega - k\omega_s) \tag{1.20}$$

为了不发生混叠失真，取样频率应满足条件

$$\omega_s \geqslant 2\omega_M \tag{1.21}$$

这里，ω_M 是$x(n)$的傅里叶变换$X(\omega)$的最高频率。

5. 离散时间信号的抽取和内插

从$x(n)$中取出N的整数倍点上的样本组成一个新序列$x_d(n)$，这一过程称为抽取(Decimation)。$x_d(n)$称为$x(n)$的抽取序列，它的频谱可以由离散时间取样序列$x_p(n)$的频谱经过频率尺度变换来得到，即

$$X_d(\omega) = X_p\left(\frac{\omega}{N}\right) \tag{1.22}$$

如果$x(n)$是由连续时间信号经取样得到的，那么可把抽取过程看成是取样率减少为原取样率的$1/N$后对连续时间信号进行取样的过程。为了避免抽取结果产生混叠失真，$X(\omega)$不能占据$(0\sim\pi)$整个频带，这意味着只有以高于奈奎斯特频率的取样率对原连续时间信号进行取样（“过取样”，Over Sampling)，才能进一步降低取样率而不会产生混叠失真。因此，抽取也称为“减取样”(Down Sampling)。

内插(Interpolating)是抽取的逆过程，又称增取样(Upsampling)。例如，对$x_d(n)$的内插过程，首先要在$x_d(n)$的每相邻两个序列值之间插入$N-1$个零取样值，得到序列$x_p(n)$，然后用一个截止频率为$\pi/2$的低通滤波器对$x_p(n)$进行滤波，就得到内插后的序列$x(n)$。

1.1.5 Z 变换

1. Z 变换的定义

序列$x(n)$的Z变换定义为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{1.23}$$

该幂级数是罗朗(Laurent)级数，它在收敛域内是解析函数，它及其所有导数是z的连续函数。序列$x(n)$在单位圆上的Z变换等于该序列的傅里叶变换，即

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}}=X(e^{j\omega}) \tag{1.24}$$

系统的单位取样响应$h(n)$在单位圆上的Z变换就是系统的频率响应$H(e^{j\omega})$。

并不是所有序列的Z变换对所有z值都收敛。对于给定的序列$x(n)$，使它的Z变换收敛的z值的集合，称为Z变换的收敛域。根据罗朗级数的性质，Z变换的收敛域一般是某个环形区域，表示为

$$R_{x-}<|z|<R_{x+} \tag{1.25}$$

其中，R_{x-}可小到0，R_{x+}可大到∞。

在Z平面上，使Z变换等于零的点称为零点，使Z变换为无穷大的点称为极点。在极点-零点图中常用"○"表示零点，用"×"表示极点，用阴影区域表示收敛域。

2. 几种序列的Z变换的收敛域

(1) 有限长序列

有限长序列的Z变换的收敛域是$0\leqslant|z|<\infty$或$0<|z|\leqslant\infty$。

(2) 右边序列

右边序列的Z变换的收敛域是半径为R_{x-}的圆的外部区域，即$R_{x-}<|z|$。

一种特殊的右边序列是因果序列，它在$n<0$时均为零，它的收敛域包括∞，即$R_{x-}<|z|\leqslant\infty$。$R_{x-}$可用下式求出：

$$R_{x-}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right| \tag{1.26}$$

(3) 左边序列

左边序列的Z变换的收敛域是半径为R_{x+}的圆的内部区域，即$|z|<R_{x+}$。一种特殊的左边序列是逆因果序列，它在$n>0$时均为零，它的收敛域包括0，即$0\leqslant|z|<R_{x+}$。R_{x+}可用下式求出

$$R_{x+}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(-n)}{x(-(n+1))}\right| \tag{1.27}$$

(4) 双边序列

双边序列的Z变换的收敛域是半径为R_{x-}和R_{x+}的两圆之间的环形区域，即

$R_{x-}<|z|<R_{x+}$；如果 $R_{x+}\leqslant R_{x-}$，则 $X(z)$ 无收敛域，即 Z 变换不存在。

3. 逆 Z 变换的计算方法

(1) 幂级数法

将 Z 变换 $X(z)$ 表示成幂级数形式，幂级数的系数所构成的序列就是信号 $x(n)$。将 $X(z)$ 表示成幂级数形式的常用方法有两种，一种是利用现有的幂级数公式将 $X(z)$ 展开，另一种是用长除法将有理函数的 $X(z)$ 展开。但在使用长除法时，应先根据收敛域确定所对应的是因果序列还是逆因果序列。若为因果序列，则应将 $X(z)$ 展成负幂级数，若为逆因果序列，则应将 $X(z)$ 展成正幂级数。

(2) 部分分式展开法

先将 Z 变换 $X(z)$ 展成部分分式，然后求各部分分式的逆变换。一般可利用表 1.2 中所列的某些常见的简单序列的 Z 变换的基本公式和表 1.3 中所列的 Z 变换的性质进行计算。

在将 $X(z)$ 展成部分分式时，应注意首先要将 $X(z)$ 的分子多项式和分母多项式都表示成 z 的负幂或都表示成 z 的正幂。在 $M<N$ 且 $X(z)$ 只有一阶极点的情况下，按照下式展开

$$X(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_kz^{-1})}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_kz^{-1}} \tag{1.28}$$

其中，A_k 是极点 d_k 上的留数，即

$$A_k=(1-d_kz^{-1})X(z)\big|_{z=d_k} \tag{1.29}$$

而在 $M\geqslant N$ 且 $X(z)$ 只有一阶极点的情况下，则按照下式展开

$$\begin{aligned}X(z)&=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_kz^{-1})}=\sum_{n=0}^{M-N}B_nz^{-n}+\frac{\sum_{k=1}^{N}c_kz^{-k}}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_kz^{-1})}\\&=\sum_{n=0}^{M-N}B_nz^{-n}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_kz^{-1}}\end{aligned} \tag{1.30}$$

其中，B_n 可以直接用长除法得到，A_k 仍是极点 d_k 上的留数。

在 $M\geqslant N$ 且 $X(z)$ 在 c_i 处有 $s>1$ 阶极点的情况下，则按照下式展开

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-N}B_nz^{-n}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_kz^{-1}}+\sum_{k=1}^{s}\frac{C_kz^{-k+1}}{(1-c_iz^{-1})^k} \tag{1.31}$$

其中，B_n 和 A_k 的计算同上，C_k 用下式计算

$$C_k=\frac{1}{(s-k)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{s-k}}{\mathrm{d}z^{s-k}}(1-c_iz^{-1})^sX(z)\right]\Bigg|_{z=c_i} \tag{1.32}$$

(3)留数定理法

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},a_k] \tag{1.33}$$

或

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{M}\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},b_k]-\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},\infty] \tag{1.34}$$

其中，$X(z)$是z的有理函数，$a_k(k=1,2,\cdots,N)$是$X(z)z^{n-1}$在有限的z平面上在围线c内部的极点集，$b_k(k=1,2,\cdots,M)$是$X(z)z^{n-1}$在有限的z平面上在围线c外部的极点集。当$X(z)z^{n-1}$的分母多项式的阶比分子多项式的阶高二阶或二阶以上时，无穷远处的留数为零，因此有

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{M}\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},b_k] \tag{1.35}$$

围线c内的极点对应于因果序列，而围线c外的极点对应于逆因果序列，因此当$n\geqslant 0$时，使用式(1.33)；当$n<0$时，使用式(1.34)。

如果$X(z)z^{n-1}$是z的有理函数，且在$z=z_0$处有s阶极点，则

$$X(z)z^{n-1}=\frac{\Psi(z)}{(z-z_0)^s} \tag{1.36}$$

这里，$\Psi(z)$在$z=z_0$处无极点。$X(z)z^{n-1}$在$z=z_0$处的留数可用下式计算

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_0]=\frac{1}{(s-1)!}\left[\frac{d^{s-1}\Psi(z)}{dz^{s-1}}\right]_{z=z_0} \tag{1.37}$$

特别地，当$s=1$时，有

$$x(n)=\Psi(z)|_{z=z_0}=\Psi(z_0) \tag{1.38}$$

4. 一些常见序列的Z变换

一些常见序列的Z变换如表1.2所示。

表1.2　一些常见序列的Z变换

序号	序　列	Z 变 换	收敛域
1	$\delta(n)$	1	全部Z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
4	$R_N(n)$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>0$
5	$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|>1$
6	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$