前　言

高等数学是高等工程专科学校各专业的一门重要的理论基础课，相当一部分学生在学习中有一定的困难，而学生又很难找到一本适用的高等数学专科教学辅导教材，为了帮助学生理解基本概念，纠正解题错误，掌握解题方法，提高解题能力，我们特编写了这本《高等数学学习辅导》。希望本书能为读者学习高等数学起到排忧解难的作用，成为读者的良师益友。

本书是结合高等数学专科教材而编写的辅导材料，是供学生在学习过程中参考的。全书分上、下册，下册内容有：微分方程；向量代数与空间解析几何；多元函数微分学；重积分；曲线积分与曲面积分；无穷级数；共六章。每章分内容提要，概念题解答，错解分析和例题分析四部分。第一部分说明本章的学习内容，系统地给出了基本概念的定义、定理和常用公式，便于学生复习巩固已学内容；第二部分对概念上易发生混淆的有关问题及概念的应用题作了解答，以帮助学生加强对概念的正确理解和应用；第三部分对学生在学习高等数学中经常出现的错误解法进行了剖析，分析错误原因，给出正确解答，从正、反两方面帮助学生深入理解基本概念，提高学生判断、分析问题的能力；第四部分为本书的重点，按照高

等数学专科辅导课的要求汇编了各种题型。通过对典型例题解题方法和技巧的分析、总结，便于学生在课外阅读研究，帮助学生掌握解题方法，提高解题能力。其中对许多题目还给出了多种解法，以开拓思路。此外还有少量较难题目，以便学有余力者进一步提高。本书中打*号的内容是相应于教材中选学内容的辅导材料。

本书主要供高等工程专科学校的师生使用，也可供电大、夜大、自学考试、职工大学各种大专院校的学生使用。

限于编者的水平，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

彭城大学　王文

1998年12月30日

目　　录

第七章 微分方程

一、内容提要

（一）微分方程的基本概念

1. 微分方程

凡含有未知函数的导数或微分的方程，称为微分方程，有时简称为方程[注：微分方程中可以不含未知函数或自变量，但必须含未知函数的导数或微分。]

2. 常微分方程与偏微分方程

未知函数是一元函数的微分方程称作常微分方程，未知函数是多元函数的微分方程称作偏微分方程。

3. 微分方程的阶

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶。

4. 微分方程的解

任何代入微分方程后使其成为恒等式的函数，都叫做该方程的解，微分方程的解有通解与特解两种。微分方程含独立的任意常数的个数等于微分方程阶数的解，称为通解；微分方程不含任意常数的解，称为特解。

5. 初始条件

确定通解中任意常数的已知条件称为初始条件。

6. 初始问题

一个微分方程与其初始条件构成的问题，称为初始问题。

7. 积分曲线与积分曲线族

微分方程的每一个解都是一个一元函数 $y=y(x)$，其图形是一条平面曲线，我们称它为微分方程的积分曲线，通解的图形是平面上的一族曲线，称为积分曲线族。

（二）一阶微分方程

1. 直接积分型

① 一般形式　$y'=f(x)$。

② 解法　　两边积分，$y=\int f(x)\mathrm{d}x+C$。

2. 可分离变量的微分方程

① 一般形式　$y'=f(x)\cdot g(y),g(y)\neq 0$。

② 解法(分离变量法)

分离变量，$\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$，

两边积分，$\int\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C$。

3. 齐次方程

① 一般形式　$y'=f(\dfrac{y}{x})$。

② 解法(变量代换法)

变量代换，令 $\dfrac{y}{x}=u$，则 $y=xu,y'=u+xu'$，

原方程变形为　$u+xu'=f(u)$，

即　$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f(u)-u}{x}$，

这是可分离变量方程，不难运用分离变量法求解，而后应用 $u=\dfrac{y}{x}$ 换回原变量。

4. 线性微分方程

(1) 一阶线性齐次方程

① 一般形式　$y' + P(x)y = 0$。

② 解法(分离变量法)　$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$。

(2) 一阶线性非齐次方程

① 一般形式　$y' + P(x)y = Q(x), Q(x) \neq 0$。

② 解法(常数变易法)

通解公式　$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$。

[注:① 线性是指关于 y 及 y' 是一次的;② 若一个方程将 x 看作自变量,y 看作未知函数,它不是线性方程;可以把 x 看作 y 的函数,将 x 看作未知函数,如果是一阶线性方程,即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + P(y)x = Q(y)$,则也有通解公式

$$x = e^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left[\int Q(y)e^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right]。$$

(三) 可降阶的高阶微分方程

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型

① 方程的特点　左端是未知函数 y 的 n 阶导数,右端是 x 的已知函数。

② 解法　方程两边对 x 连续积分 n 次,即可得含有 n 个任意常数的通解。

2. $y'' = f(x, y')$ 型

① 方程的特点　左端是未知函数 y 的二阶导数,右端不显含 y。

② 解法　令 $y' = p(x)$,则 $y'' = p'(x)$,原方程变为一个以 $p(x)$ 为未知函数的一阶微分方程 $p'(x) = f(x, p)$,从而可以用一阶微分方程的解法求出 $p(x)$,再应用 $y' = p(x)$ 即

可求出原方程的通解。

3. $y''=f(y,y')$ 型

① 方程的特点　左端是未知函数 y 的二阶导数,右端不显含 x。

② 解法　令 $y'=p(y)$,则 $y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,于是原方程化为一个以 y 为自变量,$p(y)$ 为未知函数的一阶微分方程 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$,从而可以用一阶微分方程的解法求解。

(四)二阶常系数线性微分方程

1. 二阶常系数线性齐次方程

① 一般形式　$y''+py'+qy=0$(1)(其中 p、q 为常数).

② 二阶线性齐次方程

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$　(2)　解的基本定理

(Ⅰ)定理1　如果函数 y_1 与 y_2 是二阶线性齐次方程(2)的两个解,则函数 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 仍为方程(2)的解,其中 C_1,C_2 是任意常数。

(Ⅱ)定理2　如果函数 y_1 与 y_2 是二阶线性齐次方程(2)的两个线性无关的特解,则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是该方程的通解,其中 C_1,C_2 是任意常数。

③ 解法(特征根法)

情况	特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
Ⅰ	相异实根 r_1、r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
Ⅱ	二重根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
Ⅲ	一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

2. 二阶常系数线性非齐次微分方程

① 一般形式　$y'' + py' + qy = f(x)$　　(3)

其中 p、q 是常数，$f(x) \neq 0$ 是已知函数。

② 二阶线性非齐次方程

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$　(4)　解的基本定理

(Ⅰ) 定理1　如果函数 y^* 是(4)的一个特解，Y 是该方程所对应的线性齐次方程(2)的通解，则 $y = Y + y^*$ 是(4)的通解。

(Ⅱ) 定理2　设函数 y_1 与 y_2 分别是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$ 与 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$ 的解，则函数 $y = y_1 + y_2$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的解。

③ 解法

(Ⅰ) 求方程 $y'' + py' + qy = P_m(x)e^{\lambda x}$　(5)　通解的方法(其中 $P_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式，λ 为常数)。

先用特征根法求(5)对应的齐次方程

$y'' + py' + qy = 0$ 的通解 Y，

方程(5)的一个特解形为 $y^* = x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$，

其中 $Q_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式，系数待定，k 是一个常数，取值如下：

$$k = \begin{cases} 0, & \lambda \text{ 不是特征方程 } r^2 + pr + q = 0 \text{ 的根;} \\ 1, & \lambda \text{ 是特征方程 } r^2 + pr + q = 0 \text{ 的单根;} \\ 2, & \lambda \text{ 是特征方程 } r^2 + pr + q = 0 \text{ 的二重根。} \end{cases}$$

将 y^* 代入方程(5)，用待定系数法确定 $Q_m(x)$ 的系数，方程(5)的通解为：$y = Y + y^*$。

(Ⅱ) 求方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}(A\cos\omega x +$

$B\sin\omega x)$ (6) 通解的方法(其中 λ,ω,A,B 均为常数)

先用特征根法求(6) 对应的齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 Y;

方程(6) 的一个特解形为 $y^*=x^k e^{\lambda x}(C\cos\omega x+D\sin\omega x)$ 其中 C、D 为待定常数,k 是一个常数,取值如下:

$$k=\begin{cases}0, & \lambda\pm i\omega \text{ 不是特征方程 } r^2+pr+q=0 \text{ 的特征根;}\\ 1, & \lambda\pm i\omega \text{ 是特征方程 } r^2+pr+q=0 \text{ 的特征根。}\end{cases}$$

将 y^* 代入方程(6),用待定系数法求出 C、D,求出特解 y^*。原方程的通解为 $y=Y+y^*$。

二、概念题解答

例1 试验证下列函数是否为方程 $y''+\omega^2y=0$ 的解,其中 $\omega>0$ 为常数,并指出其中那一个是方程的通解。

(1) $y=\cos\omega x$; (2) $y=(C_1+C_2)\sin\omega x$;

(3) $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$; (4) $y=A\sin(\omega x+\varphi)$。

(其中 C_1,C_2,A,φ 为任意常数)

[**解**] (1) 把 $y=\cos\omega x$ 代入,由于

$y'=-\omega\sin\omega x$, $y''=-\omega^2\cos\omega x$

所以 $y''+\omega^2y=-\omega^2\cos\omega x+\omega^2\cos\omega x=0$,

即函数 $y=\cos\omega x$ 使方程成为恒等式,故 $y=\cos\omega x$ 是方程的解。

(2) 由 $y=(C_1+C_2)\sin\omega x$,得

$y'=(C_1+C_2)\omega\cos\omega x, y''=-(C_1+C_2)\omega^2\sin\omega x$,

代入方程,

$y''+\omega^2y=-(C_1+C_2)\omega^2\sin\omega x+\omega^2(C_1+C_2)\sin\omega x=0$,

故 $y=(C_1+C_2)\sin\omega x$ 是方程的解。

(3) 由 $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$，得

$y'=-C_1\omega\sin\omega x+C_2\omega\cos\omega x$，

$y''=-C_1\omega^2\cos\omega x-C_2\omega^2\sin\omega x$，

代入方程

$$y''+\omega^2 y=-C_1\omega^2\cos\omega x-C_2\omega^2\sin\omega x$$

$$+\omega^2(C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x)=0,$$

故 $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$ 是方程的解。

(4) 由 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，得

$y'=A\omega\cos(\omega x+\varphi)$，$y''=-A\omega^2\sin(\omega x+\varphi)$

代入方程

$$y''+\omega^2 y=-A\omega^2\sin(\omega x+\varphi)+\omega^2 A\sin(\omega x+\varphi)=0$$

故 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 是方程的解。

综上所述，四个函数都是原方程的解。因为原方程是二阶的，其通解应含两个独立的任意常数，因为(3)、(4) 中 C_1 与 C_2；A 与 φ 均都是两个独立的任意常数，所以 $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$ 及 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 均是方程的通解；但 $y=\cos\omega x$ 不含任意常数，$y=(C_1+C_2)\sin\omega x$ 表面上含两个任意常数 C_1,C_2，但实际上可将它们合并起来，作为一个任意常数，所以(1)，(2) 都不是原方程的通解。

例2 若 y 是某个一阶微分方程的解，问 $y+C$(C 为任意常数) 是否一定是该微分方程的通解，试举例说明。

[答] 不一定。例如 $y=x^3$ 是微分方程 $y'=\dfrac{3y}{x}$ 的解，但 $y=x^3+C$(C 为任意常数) 不是该方程的解，事实上，将 $y=x^3+C$ 代入方程，

左端 $= y' = 3x^2$,

右端 $= \dfrac{3(x^3+C)}{x} = 3x^2 + \dfrac{3C}{x}$,

左端不等于右端,即 $y = x^3 + C$ 不是该方程的解,故不要误认为微分方程的解加上任意常数后,一定是微分方程的通解。

例 3 设二阶线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个解是 $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$,试求此方程的通解。

[**解**] (1) 先求对应齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的通解。

因 $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解,所以应满足方程

$$y_1'' + p(x)y'_1 + q(x)y_1 = f(x) \quad ①$$

$$y_2'' + p(x)y'_2 + q(x)y_2 = f(x) \quad ②$$

$$y_3'' + p(x)y'_3 + q(x)y_3 = f(x) \quad ③$$

方程 ② 与 ① 相减,得

$$(y_2 - y_1)'' + p(x)(y_2 - y_1)' + q(x)(y_2 - y_1) = 0,$$

方程 ③ 与 ① 相减,得

$$(y_3 - y_1)'' + p(x)(y_3 - y_1)' + q(x)(y_3 - y_1) = 0,$$

这说明 $y_2 - y_1 = e^x - x$ 与 $y_3 - y_1 = e^{2x} - x$ 都是对应齐次方程的解。

又因 $\dfrac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \dfrac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq$ 常数,所以 $e^x - x$ 与 $e^{2x} - x$ 线性无关,于是对应齐次方程的通解为

$$Y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x)。$$

(2) 由二阶线性非齐次方程解的结构可知,原方程的通解为:$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x) + x$。

例 4　已知 $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-x}$ 是方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个特解，试写出该方程的通解，并求满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$ 的特解。

［**解**］　因 $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-x}$ 是方程的两个特解，且 $\frac{y_1}{y_2} = e^{3x} \neq$ 常数，所以方程的通解为：$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$　　①

将上式求导，得：$y' = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x}$　　②

将 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$ 代入 ①，②，得

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 2C_1 - C_2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 解此方程组，得 $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}$。所以满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$ 的特解为：

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x}。$$

三、错解分析

例 1　下列方程是否为线性方程

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2}$；　　(2) $(xy + 1)dy - ydx = 0$；

(3) $x^2 + (y')^2 = 1$。

［**错解**］　(1) 方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2}$ 中，y' 是一次的，但 y 不是一次的，故不是线性方程。

(2) 把方程 $(xy + 1)dy - ydx = 0$ 变形为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{xy + 1}$，方程中 y' 是一次的，但 y 不是一次的，故不是线性方程。

(3) 方程 $x^2+(y')^2=1$ 中，y' 是二次的，显然不是线性方程。

[分析] 方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 称为一阶线性微分方程，所谓"线性"是指方程中未知函数 y 及其导数 y' 都是一次的。有些方程虽然关于 y 不是线性方程，但是如果把 x 看作 y 的函数，那末有可能是关于 x 的线性方程。

[正确解答]

(1) 方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y^2}$ 确实不是 y 的线性方程，但若将 y 看作自变量，x 看作未知函数，方程可变形为 $\frac{dx}{dy}=x+y^2$，即 $\frac{dx}{dy}-x=y^2$，则该方程关于未知函数 x 及其导数 $\frac{dx}{dy}$ 都是一次的，故是线性方程。

(2) 类似地，把 y 看作自变量，x 看作未知函数，方程变形为 $\frac{dx}{dy}-x=\frac{1}{y}$，它是关于 x 的线性方程。

(3) 方程 $x^2+(y')^2=1$ 关于 y 不是线性方程，关于 x 也不是线性方程，然而 $y'=\pm\sqrt{1-x^2}$，这样就把原方程分成两个线性方程：

$y'=\sqrt{1-x^2}$，(这里 $P(x)=0, Q(x)=\sqrt{1-x^2}$)；

及 $y'=-\sqrt{1-x^2}$，

(这里 $P(x)=0, Q(x)=-\sqrt{1-x^2}$)。

例 2 求方程 $-y'+y=x^2+3x+2$ 的通解。

[错解] 该方程为一阶线性非齐次方程，直接应用通解公式 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$，

原方程中，$P(x)=1, Q(x)=x^2+3x+2$，于是

$$
\begin{aligned}
y &= \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left[\int (x^2+3x+2)\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{-x}\left[\int (x^2+3x+2)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{-x}\left[(x^2+3x+2)\mathrm{e}^{x} - \int (2x+3)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{-x}\left[(x^2+3x+2)\mathrm{e}^{x} - (2x+3)\mathrm{e}^{x} + 2\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{-x}\left[(x^2+3x+2)\mathrm{e}^{x} - (2x+3)\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{x} + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{-x}\left[(x^2+x+1)\mathrm{e}^{x} + C\right] \\
&= x^2+x+1+C\mathrm{e}^{-x}。
\end{aligned}
$$

[**分析**]　形如 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的一阶线性非齐次微分方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$，注意方程中 y' 的系数必须为 $+1$，原方程 $-y'+y=x^2+3x+2$ 不是上述形式的方程，不能直接套用上述通解公式。

[**正确解答**]　首先把方程 $-y'+y=x^2+3x+2$ 变形为 $y'-y=-(x^2+3x+2)$，

这里 $P(x)=-1$，$Q(x)=-(x^2+3x+2)$，应用通解公式，得

$$
\begin{aligned}
y &= \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\left[\int -(x^2+3x+2)\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{x}\left[\int -(x^2+3x+2)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{x}\left[\int (x^2+3x+2)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{x}\left[(x^2+3x+2)\mathrm{e}^{-x} - \int (2x+3)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{x}\left[(x^2+3x+2)\mathrm{e}^{-x} + \int (2x+3)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{x}\left[(x^2+3x+2)\mathrm{e}^{-x} + (2x+3)\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} + C\right]
\end{aligned}
$$

$= e^x[(x^2+5x+7)e^{-x}+C]$

$= x^2+5x+7+Ce^x$。

例 3 求方程 $2yy''=y'^2+1$ 的通解。

[**错解**] 令 $y'=p(y)$，$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ $=p\frac{dp}{dy}$，于是原方程化为 $2yp\frac{dp}{dy}=p^2+1$，分离变量，得

$\frac{2pdp}{p^2+1}=\frac{dy}{y}$，两边积分，得

$\ln(1+p^2)=\ln y+\ln C_1$，　所以 $p^2+1=C_1y$。

即 $(y')^2+1=C_1y$，将 $(y')^2+1=C_1y$ 代入原方程右端，得 $2yy''=C_1y$，当 $y\neq 0$ 时，$y''=\frac{C_1}{2}$，于是

$y'=\frac{C_1}{2}x+C_2$，故 $y=\frac{1}{4}C_1x^2+C_2x+C_3$。

[**分析**] 上段计算中，$(y')^2+1=C_1y$ 是在假设 $y'=p(y)$ 的条件下由原方程得出的，在 $y'=p(y)$ 的条件下，$y''=p\frac{dp}{dy}$。因此将 $(y')^2+1=C_1y$ 代入原方程的右端时，应当同时将 $y''=p\frac{dp}{dy}$ 代入方程左端。而上段计算在 $y'=p(y)$ 的假设条件下，只将 $(y')^2+1=C_1y$ 代入原方程右端，而未同时将在 $y'=p(y)$ 的假设条件下，$y''=p\frac{dp}{dy}$ 同时代入原方程左端，因而产生错误。

[**正确解答**] 令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，代入原方程得 $2yp\frac{dp}{dy}=p^2+1$，分离变量，得 $\frac{2pdp}{p^2+1}=\frac{dy}{y}$，

两边积分，得 $\ln(p^2+1)=\ln y+\ln C_1$，

所以　$p^2+1=C_1y$，故 $p=\pm\sqrt{C_1y-1}$，将 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 代入，于是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{C_1y-1}$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1y-1}}=\pm\mathrm{d}x$，

积分得 $2\sqrt{C_1y-1}=\pm C_1(x+C_2)$，

故通解为 $4(C_1y-1)=C_1^2(x+C_2)^2$。

例 4　求方程 $y''-5y'+6=0$ 满足 $y(0)=0,y'(0)=1$ 的特解，

[错解]　因为特征方程 $r^2-5r+6=0$ 有两个实根 $r_1=2,r_2=3$，于是通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$。

而 $y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}$，由初始条件得

$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\2C_1+3C_2=1,\end{cases}$　解此方程组得 $C_1=-1,C_2=1$，

所求特解为：$y=-e^{2x}+e^{3x}$。

[分析]　二阶常系数线性齐性方程的一般形式为

$y''+py'+qy=0$，

它的特征方程为

$r^2+pr+q=0$。

然而，本题给出的方程 $y''-5y'+6=0$ 并不是线性齐次方程，事实上，它可以变形为 $y''-5y'=-6$，显然它是二阶常系数线性非齐次方程，上述解法把方程 $y''-5y'+6=0$ 左端的“6”误当作“$6y$”，因而错判方程类型，导致错误。

[正确解答]　将原方程变形为

$y''-5y'=-6$，

对应的齐次方程 $y''-5y'=0$ 的特征方程为

$r^2-5r=0$，