科學圖書大庫

線性代數導論

譯者 吳英格 校閱 王昌鋭

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

線性代數導論

譯者 吳英格 校閱 王昌銳

徐氏基金會出版

原　序

線性代數在純數學與應用數學上都是很重要的題材。轉換大階矩陣的問題，求特徵根的問題以及解線性方程式的問題都是物理學上，生物學上跟社會科學上常碰到的。爲了這些原因，還有其他的理由，這項題材中比較基本的部分最近已開始放在高中及大一的課程中。

此書提供線性代數與矩陣理論中基本觀念的介紹，目的是給大二或大三程度的學生作一學期的課程講的。我們進行的方式是首先介紹向量空間，其次，視矩陣爲向量空間上線性移轉的具體代表。我們並不堅持以“矩陣”或“線性移轉”之一來進行此項題材。對各定理，我們都盡可能的選擇最容易理解而且有益的方法來介紹。在某些更講究的領域裡，線性代數中矩陣的出現被視做是懷疑與輕視的組成，執筆的兩位作者却視這種想法未免太不幸了。此事有如研究生之在不用量化微積分就無法寫出 $f(x)=x$ 的連續性一樣。

在第三章末有若干項目並不是這種程度下此類書的標準教材——例如 Gerŝgorin 盤，Courant-Fisher 定理，及 Cauchy 對子矩陣特徵根的不等式。這些項目是爲受過某些方法與理解訓練的學生能夠逐漸地貫通而提供的。再者，這些定理在此題材的某些部份中已開始進入研究活動的範圍了。

看這本書應具備的預備知識是對一般所謂的高等代數課程有通盤的瞭解，換言之，學生對於複數，多項式與有限級數的求和等等應有基本的認識。

本書並不包括佈於整數環或多項式環的矩陣中，有關的基本因數理論或任何結論式的標準型。將 Frobenius 與 Jordan 正規型包括在一學期的課程是不可能辦到的。我們認爲把基本因數理論拿來對那些在大學部內沒有上過近代代數的學生講解似乎不太合適。事實上，儘管我們立刻將環與體的概念介紹，但我們只應用其字語，並沒有包括有關這些觀念的任何困難或深奧的定理。

一般而言，我們希望此書能供給一般大學部正在修任何科學的學生有即刻洞悉他們所需要的一些重要而適度的數學。

著　　者

註：本書所有「移轉」均為「變換」之誤，
「指示」為「特徵」之誤，特此更正。

目 錄

第一章
向量空間與線性移轉

1－1 向量空間

線性代數是討論有關所謂向量空間的題材及其上的所謂線性移轉的某些運算。向量空間是若干事物的集合，其一爲數集合R，其二爲所謂向量的集合V，其三爲V中一對元素的合併方式，至於其四則爲R與V之元素的合併方式。

首先我們來研究在數學上無處不有的所謂環的數學單元，環是讀者以前常碰到的許多熟悉的數系的一般化，環的例多得很：實數；有理數（即，分數a/b其中a，b爲整數）；整數；偶數，以上各例中運算都是加法與乘法，環的另一例是所有多項式 $c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+c_1x+c_0$其中之係數 c_i 是整數而運算爲一般所說的，爲了本書內容的發展需要，我們將再介紹許多其他更通俗的環例。

定義1•0 （環）

一集合R，同時具有兩種運算，叫做加法，＋，與乘法，×，成一環，假若對每一a，b，與$c\in R$，下列的性質都具備了。

(i) $(a+b)$與$(a\times b)$是R中唯一確定的元素。

(ii) $(a+b)+c=a+(b+c)$，$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$（結合律）。

(iii) $a+b=b+c$（加法交換律）。

(iv) R中有唯一的元素叫做零存在，以0表之，使得 $a+0=0+a=a$（加法單位元素的存在）。

(v) R中有唯一元素以$-a$表之使得 $a+(-a)=(-a)+a=0$（加法反元素）

(vi) $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$，

$(b+c)\times a=(b\times a)+(c\times a)$ （分配律）。

一環成一體，假若除了以上的原理外，還具備：

(vii) $a\times b=b\times a$ （乘法交換律）。

(viii) R 中有唯一元素存在叫做單位元素，以 1 表之，使得 $a\times 1=1\times a=a$（乘法單位元素的存在）。

(ix) 若 $a\neq 0$，則有唯一的元素，以 a^{-1} 表之使得 $a\times a^{-1}=a^{-1}\times a=1$；$a^{-1}$ 叫做 a 的反元素（乘法反元素）。

若 R 爲一環，其中 (vii) 及 (viii) 亦具備時，R 便叫做具有乘法單位元素 1 的交換環。

例如，複數 $a+ib$（其中 a,b 爲實數）的集合形成一體，以一般的加法與乘法定義，實數與有理數以通常的運算來說都是體，比較不尋常的例，舉出來便如下所示的＋與×表：

$$R:\quad \begin{array}{c|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & c & a \\ c & c & a & b \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \times & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & b & c \\ c & a & c & b \end{array} \tag{1}$$

于環中，積 $a\times b$ 通常以 ab 表之，即乘號省去。

定義 1－1 （向量空間）

一向量空間 V（佈於一體 R）是一向量的集合，並具有兩種運算，第一運算叫做向量的加法，且對於 V 中每一元素 u,v,w 有下列的性質：

(i) $u+v$ 爲 V 中唯一確定的元素。

(ii) $u+(v+w)=(u+v)+w$

(iii) $u+v=v+u$

(iv) 存在一向量 O_V 使得 $u+O_V=O_V+u=u$；

(v) 對 V 中每一元素 u，有唯一向量 $-u$ 使得 $u+(-u)=(-u)+u=O_V$

換言之，對於 V 中每一對元素 u,v，恒可賦與 V 中的另一元素叫做 u 與 v 的和，$u+v$；有關向量的加法法則跟一般的實數加法

看起來很相像。

這兒另外還存在一運算介於R的元素與V的元素，叫做純數積，此運算使得對所有a，b在R中，而且所有u，v在V中，有下列之性質：

(vi) au是V中的一向量。

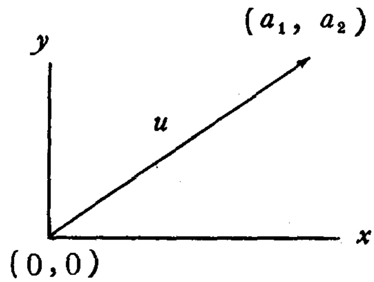
(vii) $a(u+v)=au+av$；

(viii) $(a+b)u=au+bu$；

(ix) $a(bu)=(ab)u$；

(x) $1u=u$，$Ou=O_v$。

R的元素叫做**純數**，由單一向量O_v所組成的向量空間叫做**零向量空間**；所有其他的向量空間，便叫做**非零的**，**純數積**au，（其中$a\in R$，$u\in V$）的表法，我們是直接列出兩元素，再者，V中的加法記號跟R中的加法記號一樣，都以“＋”表之，我們以後又要將零向量O_v表成O，此可以從上下文而知其意義上的區別，不致發生混亂。



向量空間爲大家熟悉之例是所有“向量”$u=(a_1,a_2)$的集合，其中a_1，a_2是實數，u的圖形表示法，爲平面上箭號，其末端爲原點，其頂端爲點(a_1, a_2)。

加法定義爲 $u+v=(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)$

純積數定義爲 $au=(aa_1, aa_2)$，此例的合理推廣，便是n元數的向量空間。

定義 1・2 （n元數的向量空間）

對所有n元數$u=(a_1, \cdots, a_n)$的集合，其中a_i是體R的元素，定義加法與純數積如下：

$$(a_1,\cdots,a_n)+(b_1,\cdots,b_n)=(a_1+b_1, \cdots, a_n+h);\qquad(2)$$

$$a(a_1, \cdots, a_n)=(aa_1, \cdots, aa_n)\qquad(3)$$

此向量空間叫做佈於R的n維空間，而以$V_n(R)$表之，$V_n(R)$中的零是n元數（0，···，0），我們不難驗證$V_n(R)$確滿足定義1-1中的性質（i）－（x）。

向量空間的另例如下：

設V爲所有定義於閉區間$0 \leq x \leq 1$的連續實值函數所成的集合，對V的加法即爲一般的函數加法：$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，純數體 R取爲實數體，若$a \in R$，且$f \in V$，則 純數體 定義爲$(af)(x)=a(f(x))$。

定義1 • 3　（線性相依）

若V爲佈於R的向量空間，而u_1，···，u_k；a_1，a_2，…，a_K分別爲V中的k個向量，及R中的k個純數，則等式

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k \tag{4}$$

所示之向量u，便稱爲u_1，u_2，… u_k的**線性組合**，其中a_1，……a_k 便稱爲**係數**，當 a_1，···，a_k在R中變動時，則所有u_1，u_2，···，u_k 的線性組合全體便是一向量空間，蓋，若c是任何純數，則

$$c(a_1v_1+\cdots+a_ku_k)=(ca_1)u_1+\cdots+(ca_1)u_1+\cdots+(ca_k)u_k$$

爲 u_1，···，u_k 的線性組合，而 u_1，u_2，····u_k兩線性組合的和。

$$\begin{aligned}(a_1u_1+\cdots+a_ku_k)+(b_1u_1+\cdots+b_ku_k)\\ =(a_1+b_1)u_1+\cdots+(a_k+b_k)u_k\end{aligned}$$

也是 u_1，···u_k 的線性組合，定義1-1中原理之其餘部份，可以很容易的驗證，向量 u_1，···，u_k 的所有線性組合空間，便稱爲由 u_1……u_k 所**展成**（span），此空間並以〔u_1，···，u_k〕表之。有時〔u_1 ···，u_k〕可以由較 u_1，···，u_k 爲少的向量展成，意即 u_1，···u_k 中有些是多餘的，我們將證明這種情況，當且僅當 u_1，u_2，···u_k 的線性組合爲0，而其中至少有一係

數不等於0，才會發生，爲此，我們介紹一種新的重要觀念，若 u_1，…，u_k 的線性組合等於0，只有所有的係數等於0方成立，則稱 u_1，…，u_k 成**線性獨立**；否則 u_1，…，u_k 成**線性相依**，很明顯的，若 u_{i_1}，…，u_{i_r} 是向量 u_1，…，u_k 所成的線性獨立集合的某些向量，則 u_{i_1}，…，u_{i_r} 也是線性獨立，蓋，若 $c_{i_1}u_{i_1}+\cdots+c_{i_r}u_{i_r}=0$ 且 c_i 不全爲零，則令 $c_t=0$，$t\neq i_1$，…，i_r 易知 $c_1u_1+\cdots+c_ku_k=0$ 且 c_1，…，c_k 不全爲0，若有向量 u_1，…，u_k 所成的有限集合存在，使得 $V=[u_1,\cdots,u_k]$，則稱 V 爲**有限維**，若 u_1，…，u_k 爲線性獨立且展成 V，則稱此向量集合爲 V 的**基底**。

例如，$V_n(R)$ 是有限維，蓋，設

$$e_t=(\delta_{1t},\delta_{2t},\cdots\delta_{nt}),\ t=1,\cdots,n,$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & 若\ i=j\\ 0 & 若\ i\neq j\end{cases}$$

爲克朗克爾 delta，若 u 是佈於 R 的任何 n 元數，則

$$\begin{aligned}u=(a_1,\cdots,a_n)&=a_1(1,0,\cdots0)+a_2(0,1,0\cdots0)\\&\quad+\cdots+a_n(0,\cdots,0,1)\\&=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n\end{aligned}$$

再者，若 $u=0$，則 $a_1=\cdots=a_n=0$，因此 e_1，…，e_n 爲線性獨立，因而成 $V_n(R)$ 的一基底，我們將稱它爲 $V_n(R)$ 的**標準基底**。

附註，若 u_1，…，u_k 是 V 的一基底，且

$$\sum_{s=1}^{k}c_su_s=\sum_{s=1}^{k}d_su_s$$

則 $c_s=d_s$，其中 $s=1$，…，k，蓋，因 $\sum_{s=1}^{k}(c_s-d_s)u_s=0$

故 $c_s - d_s = 0$，其中 $s = 1$，$\cdots$，k 。

一般而言，我們用大寫 Σ 來表線性組合，因此(4)變成

$$u = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \tag{5}$$

若 X 是 V 的任何子集，則 $\langle X \rangle$ 將表示 X 中向量的所有線性組合的全體，集合 $\langle X \rangle$ 稱爲由 X 展出的空間，$\langle X \rangle$ 的每一元素，均屬於 V，此關係以 $\langle X \rangle \subset V$ 表之。

定理 1 − 1

設 V 爲一佈於體 R 的有限維向量空間。

(i) 若 u_1，$\cdots$，u_n 爲線性相依，則某 u_k 爲其餘 u_i 的線性組合，其中 $i \neq k$ 。

(ii) V 有一基底。

(iii) 若 u_1，$\cdots\cdots$，u_n 是 V 的一基底，且 v_1，$\cdots v_r$ 在 V 中成線性獨立，則 $r \leq n$，且對某 $n - r$ 個 u_i 所成之集合，設 u_{r+1}，$\cdots$，u_n，集合 v_1，$\cdots v_r$，u_{r+1}，$\cdots$，u_n 是 V 的一基底。

(iv) V 的任何兩基底包含同數目的向量。

證明：

(i) 假設 $c_1u_1 + \cdots + c_nu_n = 0$，且某 $c_i \neq 0$，設 $c_k \neq 0$，則

$$c_k u_k = -\sum_{i=1,\ i\quad k}^{n} c_i u_i , \tag{6}$$

且由於 $c_k \neq 0$，

$$u_k = \sum_{i=1,\, i \neq k}^{n} (-c_k^{-1} c_i)\, u_i ,$$

因此，u_k 可表成其餘 u_i 的線性組合，而 $i \neq k$ 。

(ii) 由於 V 爲非零且爲有限維，對 V 而言有一有限展成集合存在，

稱爲X，由於X是有限的，故有有限個子集，事實上，X必含有一子集，其中各向量是線性獨立，而且含有至少跟其他線性獨立子集一般多的向量，設此X的極大線性獨立子集爲$u_1, \cdots, u_n$，則很明顯地$\langle u_1, \cdots, u_n \rangle \subset \langle X \rangle$，若$x \in X$．則此集合

$$x, u_1, \cdots u_n \tag{7}$$

共有$n+1$向量，且由n的極大性知這些向量必線性相依，因此有純數 $c_0, c_1, \cdots, c_n$，不全爲0，使

$$c_0 x + c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n = 0 \tag{8}$$

若$c_0 = 0$則(8)蘊涵 $u_1, \cdots, u_n$爲線性相依，因此$c_0 \neq 0$，故可寫成

$$x = \sum_{j=1}^{n} (-c_0^{-1} c_j u_j) \in \langle u_1, \cdots, u_n \rangle \tag{9}$$

此證明了在有限展成集合X中的任何元素x，必在$\langle u_1, \cdots, u_n \rangle$中，現在令$X$的元素爲$x_1, \cdots, x_p$，若$v$是$V$中的任何向量，則$v \in \langle X \rangle = \langle x_1, \cdots, x_p \rangle$，即，$V = \langle X \rangle$，他方面，各$x_t$在$\langle u_1, \cdots, u_n \rangle$中，因此，我們可寫成

$$x_t = \sum_{j=1}^{n} c_{tj} u_j, \quad t = 1, \cdots, p \tag{10}$$

最後，任何$x \in \langle X \rangle$可寫成爲

$$x = \sum_{t=1}^{p} a_t x_t$$

其中各係數a_t在R中。

由(10)，我們有

$$\sum_{t=1}^{p} a_t x_t = \sum_{t=1}^{p} a_t \sum_{j=1}^{n} c_{tj} u_j \tag{11}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{p} a_t c_{tj} \right) u_j$$

$$\in \langle u_1, \cdots, u_n \rangle .$$

因此 $\langle X \rangle \subset \langle u_1, \cdots, u_n \rangle$，故有

$$V = \langle X \rangle \subset \langle u_1, \cdots, u_n \rangle \subset \langle X \rangle$$

換言之，

$$V = \langle u_1, \cdots, u_n \rangle \tag{12}$$

因諸向量 u_i 是線性獨立，可見這些向量 u_i 形成V的一基底。

(iii) 首先證明當 $r = 1$ 的情況，考慮向量

$$v_1, u_1, \cdots, u_n$$

的集合，這些向量必成線性相依，蓋因 $u_1, \cdots, u_n$ 爲一基底，而 v_1 爲彼等所線性組合，可見有純數 c_0，$d_1, \cdots\cdots, d_n$，不全爲 0，使

$$c_0 v_1 + d_1 u_1 + \cdots + d_n u_n = 0 \tag{13}$$

若(13)之每一 d_i 都是 0，則 $v_1 = 0$，與假設矛盾，因此，某 d_i 不爲 0，爲方便計，此可由重訂 u 的足數而取 d_i 爲 d_1，又由於 $c_0 \neq 0$，否則 $u_1, \cdots, u_n$ 將線性相依，因此可得知

$$u_1 \in \langle v_1, u_2, \cdots, u_n \rangle$$

由此亦不難得知 $v_1, u_2, \cdots, u_n$ 爲V的一展成集合，假設這些向量爲線性相依，且

$$a_1v_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0$$

若 a_1 爲 0，則得 u_2，$\cdots$，u_n 是線性相依，此與原來假設不合，因此

$$v_1 = \sum_{j=2}^{n} (-a_1^{-1}a_j)\,u_j \tag{14}$$

由(13)與(14)，我們有

$$\sum_{j=1}^{n} (c_0^{-1}d_j)u_j = \sum_{j=2}^{n} (a_1^{-1}a_j)\,u_j$$

或

$$c_0^{-1}d_1u_1 + \sum_{j=2}^{n} (c_0^{-1}d_j - a_1^{-1}a_j)\,u_j = 0 \tag{15}$$

由 u_1，$\cdots$，u_n 的線性獨立及(15)，知 $c_0^{-1}d_1 = 0$，但 d_1，c_0^{-1} 均不爲 0，可見發生矛盾．因此 v_1，u_2，$\cdots$，u_n 是線性獨立，展成 V，且因而成爲 V 的一基底，此完成了 $r = 1$ 情況的證明，我們用歸納法進行下面的證明，假設對於 $r-1$ 個向量 v_1，$\cdots v_{r-1}$ 結論正確，則 $r-1 \leq n$，若 $r-1$ 等於 n，由歸納法假設知

$$v_1, \cdots, v_{r-1}$$

爲 V 的一基底，意即

$$v_r \in \langle v_1, \cdots, v_{r-1} \rangle$$

而與 $v_1,\cdots,v_r$ 的線性獨立性相違，可見 $r-1<n$，亦即 $r \leq n$，由歸納法假設我們可以假設向量 v_1，$\cdots$，v_{r-1} 可以取代向量 u_1，$\cdots$，u_n 中的 $r-1$ 個向量，設爲 u_1，u_2，$\cdots$，u_{r-1}，取代後的向量集合

$$v_1, \cdots, v_{r-1}, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n \tag{16}$$

將為一基底

則 $$v_r = \sum_{j=1}^{r-1} a_j v_j + \sum_{j=r}^{n} b_j u_j \tag{17}$$

其中 a_j 與 b_j 均屬於 R. 由於 $v_1, \cdots, v_r$ 是線性獨立, b_j 不全為 0. 因此, 如為需要時, 可重排向量 $u_r, \cdots, u_n$ 之次序, 我們可假設 $b_r \neq 0$, 由(17)解出 u_r, 得

$$u_r = -\sum_{j=1}^{r-1} (b_r^{-1} a_j) v_j + b_r^{-1} v_r - \sum_{j=r+1}^{n} (b_r^{-1} b_j) u_j \tag{18}$$

可見

$$\begin{aligned} V &= \langle v_1 \cdots, v_{r-1}, u_r, \cdots, u_n \rangle \\ &\subset \langle v_1 \cdots, v_r, u_{r+1} \cdots u_n \rangle \subset V \end{aligned}$$

而 $$v_1 \cdots, v_r, u_{r+1}, \cdots, u_n \tag{19}$$

展成 V. 剩下要證明的便是於(19)中的向量成線性獨立. 假設彼等成線性相依, 而且存在純數 $d_1, \cdots d_r$ 與 $c_{r+1}, \cdots, c_n$ 不全為 0, 使

$$\sum_{j=1}^{r-1} d_j v_j + d_r v_r + \sum_{j=r+1}^{n} c_j u_j = 0.$$

現在 $d_r \neq 0$, 否則基底(16)將為線性相依. 因此

$$v_r = \sum_{j=1}^{r-1} (-d_r^{-1} d_j) v_j + \sum_{j=r+1}^{n} (-d_r^{-1} c_j) u_j \tag{20}$$

從(17)－(20), 得

$$\sum_{j=1}^{r-1}(a_j+d_r^{-1}d_j)v_j+b_ru_r+\sum_{j=r+1}^{n}(b_j+d_r^{-1}c_j)u_j=0$$

(21)

等式(21)是關於基底(16)的元素的線性相依關係，故 $b_r=0$．然而我們知道 $b_r\neq 0$，故原先假設於(19)中的向量成線性相依是錯的，可見(19)是一基底，而(iii)亦得證。

(iv) 假設 $u_1,\cdots,u_n$ 與 $v_1,\cdots,v_r$ 爲V的兩基底，按照(iii)得 $r\leq n$，反之，將 u_i 與 v_i 互換，仍由(iii),得 $n\leq r$，因此 $n=r$。

定義 1•4 （維）

若V是佈於R的有限維向量空間，則V中任何基底的向量個數稱爲V的維數，此整數以 $\dim V$ 表之，V爲零向量的集合時，則規定 $\dim V=0$．

例如 $V_n(R)$ 持有標準基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，故

$$\dim V_n(R)=n. \tag{22}$$

在定理 1-1 的證明裡，我們用過“極大”集合的觀念若干次，下面我們給這個概念一個正式上的定義。

定義 1•5 （子空間、極大集合）

若V是佈於R的向量空間，W是V的一子集，而且也是佈於R的向量空間，（利用V的加法與純數積），則W稱爲V的子空間，對於在V的一子集X中的p個線性獨立向量所成的集合Y來說，假若X的任何線性獨立子集，其元素個數不比p個向量多時，則Y便稱爲在X中的**極大集合**。

茲舉一子空間之例，設 $V=V_3(R)$，其中R是實數體，設W爲V的子集，由所有 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 所組成，其中 $u_1=u_2$．則W是V的子空間，我們僅須證明W對於V的加法與純數積封閉即可，（向量空間的其他公理跟著便成立，蓋W是V的子集），但是若 $v=au=(au_1,au_2,au_3)$ 且 $u_1=u_2$，則 $au_1=au_2$，故

$v \in W$。同理，當 $u, w \in W$，$u+w \in W$，下面的結果中，我們將不考慮維數爲 0 的空間。

定理 1－2

若 V 是佈於 R 的有限維向量空間，而 $\dim V = n$，則 V 中任何 $n+1$ 向量必成線性相依。

證明：

按定理 1-1（ii），（iv），V 持有一基底，由 n 個向量所組成，則定理 1-1（iii）可得知：若 V 中有 r 個線性獨立向量，則 $r \leq n$。

關於有限維向量空間的子空間結構，可描述成以下定理。

定理 1－3

設 V 爲佈於 R 的有限維向量空間，且 W 爲 V 的子空間，則 W 爲有限維，且

$$\dim W \leq \dim V \tag{23}$$

再者，若且唯若 $W = V$，則(23)之等式成立。

證明：

用以建立此結論的論證事實上也證實了 W 的基底存在，而且任何此種基底能夠用來求得期望獲得的 V 基底，按定理 1-2，V 中線性相依向量所成之集合，其元素個數無法能由超過 $\dim V = n$ 來組成的，（因此 W 也沒有）因此我們可以在 W 中選取一極大線性獨立集合，設 $w_1, \cdots, w_r$ 是 W 中如此極大的集合，且設 $u_1, \cdots, u_n$ 爲 V 中的一基底，按定理 1-1（iii），$r \leq n$。我們可以斷言 $w_1, \cdots, w_r$ 是 W 的一基底。蓋，設 $w \in W$，且考慮 $r+1$ 個向量 $w, w_1, \cdots, w_r$。由 r 的極大性知這些向量一定成線性相依。可見有 $c_0, c_1, \cdots c_r$ 不全爲 0，使

$$c_0 w + \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = 0 .$$

現在 $c_0 \neq 0$，否則集合 $w_1, \cdots w_r$ 必成線性相依。

因此