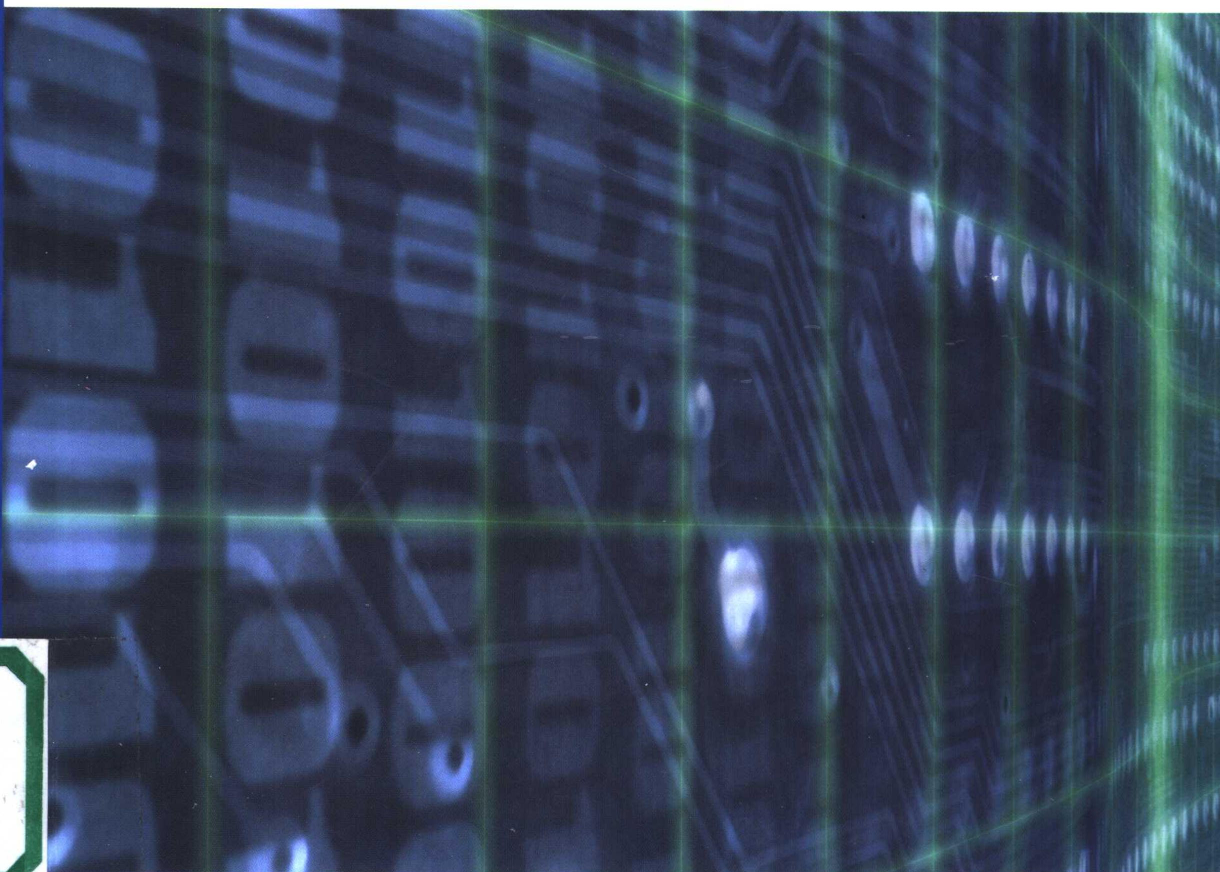
21世纪高等院校教材

集论与逻辑

——面向计算机科学

沈恩绍 著



科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

集 论 与 逻 辑

——面向计算机科学

沈恩绍 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书由基础集论与经典(一阶)逻辑两部分内容组成,为高标准的计算机科学专业(本科)教材.

集论部分的范围与常规教材大体相似,区别在于相关内容的展开方式与深度.这里采用的"非标准"模式可称为"经典集论的公理化修正版":强调公理化思想及构造性技巧;对"关系演算"及"归纳与递归"两个板块做了较深入的处理;计算机科学中有用的若干组合和图论中的原理与方法被有机地嵌入到集论的框架之中;以较直观的方式给出了集论世界的"全景图",但不是完整地介绍公理集合论.

逻辑部分内容较同类教材丰富,包括通常在研究生课程中才介绍的完备性定理的证明、紧性定理及下降型的 L-S 定理这两个一阶逻辑的特征属性等.本书的一个特色是采用了 Tableaux 作为形式化的演绎推理平台,这种语法证明系统更直观简单、易学易用,而且其思想在计算机科学与人工智能中有广泛的应用.另一特色是更侧重于语义或模型论的观念与方法及其应用(如 model checking 的原始想法).

本书可供高等院校计算机专业(本科)、数理专业的师生以及立志于进一步读研的读者阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

集论与逻辑:面向计算机科学/沈恩绍著.—北京:科学出版社,2003

(21 世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-011047-1

Ⅰ.集… Ⅱ.沈… Ⅲ.①集论-高等学校-教材②数理逻辑-高等学校-教材 Ⅳ.O14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 101643 号

责任编辑:巴建芬 姚晖/责任校对:刘小梅

责任印制:刘秀平/封面设计:槐寿明

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年4月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003年4月第一次印刷 印张:13 1/4

印数:1—5 000 字数:249 000

定价:18.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

Yesterday's education does not meet the needs of tomorrow's world. The increasingly technical demands place on people by the Information Revolution makes it all the more important that people understand basic logical principle of reasoning.

摘自[美]符号逻辑协会关于逻辑教材的一份报告(2000)

Logic has permeated through computer science during the past thirty years much more than it has through mathematics during the past one hundred years. Indeed, at present concepts and methods of logic occupy a central place in computer science, insomuch that logic has been called "the calculus of computer science". …

The effectiveness of logic in computer science … spans a wide spectrum of areas, from artificial intelligence to software engineering. Over all, logic provides computer science with both a unifying foundamental framework and a powerful tool for modeling and reasoning about aspects of computation.

摘自"On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science"
美国科学促进会一个同名会议的总结报告(2001)

If science is the search for the fundamental principles that govern the world around us and explain the phenomeria we see, the Theoretical Computer Science (TCS) is the "science" underlying the field of computing. The formal and mathematical nature of TCS is especially appropriate for a science of computing, given that computation is essentially a discrete logical process.

摘自 A report from Workshop on Challenges for TCS in 21st Century
by DIMACS, SIAM, SIGACT(2000)

目　录

第一篇　基础集论

无穷大！任何一个其他问题都不曾如此深刻地影响人类的精神；任何一个其他观念都不曾如此有效地激励人类的心智；然而也没有任何概念比无穷大更需要澄清……

D. Hilbert

第一章　集合的基本关系与运算

集合论(的概念、性质与方法)不仅是数学中大多数分支(包括在计算机科学中有广泛应用的逻辑、代数、组合与图论等,统称为“离散数学”)的基础,也是计算机科学中许多理论不可或缺的工具.

自 Cantor 奠定(无限)集论之朴素基础的一个多世纪以来，集论本身已发展成一个成熟的独立学科，是数理逻辑的一个有丰富深刻内容的分支.其中哪些内容可称为初级或基础者，实际是因人而异,并随着时代及科学技术的发展而不断变化. 下面的内容可称为朴素(经典)集论在公理化思想下的修正版，同时又侧重于其在计算机科学中有应用的那部分内容. 集论中公理化体系的引入，是为了既保留经典集论中有用的部分,又要剔除由于隐蔽的不当操作而悄然潜入的悖论(paradox，bug).不妨将它视为一种理论上的“篱笆”，能够围住“羊群”将“狼”隔离在圈外，防止“狼”以任何伪装的方式混入“羊群”.

但是，公理集论本身不是本课程的目的. 当然，在下文中基础集论(运算与关系、计数与推理、有限与无限等)的展开过程中，强调公理化方法及构造性技巧的运用. 因为这些思想方法在本书逻辑部分，在计算机科学的许多领域中,有重要的应用或影响.

§1.1　集合的表示：内涵与外延

读者已了解了集合的各种表达方式，如列表法、图示法、枚举法等.如用统一观点分析之，它们可分为两个范畴:其一，是外延表示法，即将该集合中的所有元素以某种方式表示出来. 这通常只适用于有限集或具有某种规律的可数无限集[①].其二,是内涵表示法，用性质来界定属于该集合的元素. 这种方式更通用,但需要特别地说明或慎用之.内涵与外延之间的一一对应,在数学、古典逻辑甚至哲学中均如此.由此抽象出经典集论中的概括原则(Abstract Principle).而恰恰是自古以来被学者普遍接受的这个原理,是集合理论的“篱笆”中的一个致命的“漏洞”.

内涵表示法的常用模式是:若用 P 表示某种属性,则 $P(a)$表示 a 具有性质 P，而$\neg P(a)$表示 a 不具有性质P. 这种通用的方式称为“谓词表达法”[②].

---

① 集合之有限与无限,可数与不可数等概念，暂时按其字面直观意义理解. 以后随理论之展开，将给出它们各自严格的数学定义.

② 严格地讲,性质 P 必须能用一个集论语言上的一阶公式来表达.

随意使用概括原则，将会为集合理论埋下一系列致命的悖论. 其中最著名也是最本质的一个是 Russell(罗素)悖论. 介绍如下：

每一集合 x，必具有下面两个互补的性质之一：

或 x 是其本身的一个元素，即 $x \in x$；或 x 不是其本身的元素，即 $x \notin x$. 用概括原则定义一个新的"集合"：

$$X := \{x \text{ 是集合} \mid x \notin x\}.$$

对集合"X"，考察如下：

若 $X \in X$，这时(按 X 的定义) X 有性质 $X \notin X$；

若 $X \notin X$，则由 X 的定义，$X \in X$.

由于在任何情况下均可导出矛盾，惟一的出路是，$X = \{x \mid x \notin x\}$ 不能是一个合法的集合. 换言之，概括原则不是一个合适的构集方法.

我们只能在一个给定的(已知的)集合(母集)中，利用内涵(属性)从母集中分离出具有该属性的元素所组成的子集. 即所谓**子集公理**. 用性质 P 分离出的 A 的子集 B 记为

$$B = \{a : a \in A \text{ 且 } P(a)\} = \{a \in A : P(a)\}.$$

因此，只有当 A 确定是一个集合时，子集公理(又称分离公理)才能保证 B 也是一个(合法的)集合. 不难看出，上面 X 的定义不满足子集公理的模式 ①.

子集公理也暗示：为了建立有意义的集合理论，首先必须保证：至少有一个(合法的)集合存在. 然后，由之出发，再规定若干从"旧集"出发构造"新集"的基本运算与方法，便可以构造出各种集合，进而建立起相关的理论.

§1.2 集合的运算、构集公理

现代集论中，所有(合法)的讨论对象(object)都是集合. $A, B, C, \cdots; X, Y, Z$；$a, b, c, \cdots, x, y, z$ 等等，任何一个字母都代表某个集合. 集合之间只有一个原始的或基本的二元关系，即从属关系，记为 $\in$. $a \in A$(或 $x \in X$)表示 a(或 x)是集 A(或 X)的一个元素，其中元素 a(与 x) 也是集合. 所有其他的集合之间的运算或关系，均可从 $\in$ 出发来定义或构造. 作为出发点，是一个不含任何元素的空集. 用一个公理来保证其存在性.

空集公理 存在一个空集，即不含任何元素的集合，记为 $\varnothing$.

利用 $\in$，可定义两个集合 A 与 B 之间的重合或相等关系，记为 $A = B$.

外延公理 对每一集合 x，若 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$，则称 $A = B$.

利用外延公理，可证明空集的惟一性.（注意证明的虚满足模式，即不存在可

---

① 乍看，集合全体 V 似乎可以作为定义中的母集，但 V 太大了，不是一个合法的集合. 实际上集论中的正规公理保证：每个集合不能是其自身的元素. 因此 V 就是上述的 X.

破坏"="关系之反例.)因此符号$\varnothing$无歧义(well-defined).

将上述"="之定义单侧化，便可导出集合之间的包含关系.

定义 1.2.1 $A\subseteq B$ 指：对任 x，$x\in A\Rightarrow x\in B$. 称 A 为B 的**子集**.

若 $A\subseteq B$ 且$A\neq B$，则称 A 为B 的真子集(proper subset)，记为 $A\subset B$.

显然，$A\subseteq B$ 且$B\subseteq A \Leftrightarrow A=B$.(由外延公理)

$\varnothing$是任何集合的子集；$\varnothing$是非空集合(含有元素的集合)的真子集.

定义 1.2.2 给定两个集合 A,B. 记 $A\cup B:=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$. 称 $A\cup B$ 为A 与B 的并集(union).

注意此定义不符合子集公理的模式. 另须引入一个公理，来保证这一常用运算或其结果(并集)之合法性(存在性).

并集公理(狭义) 若 A,B 是集合，则 $A\cup B$ 也是集合.

由外延公理，可证明并集之惟一性. 故二元运算$\cup$是无歧义的。

利用并集公理与子集公理，可以合法地定义常见的其他集合运算：交、差、对称差等.

定义 1.2.3 给定集合 A,B.

$A\cap B:=\{x\in A\cup B: x\in A$ 且 $x\in B\}$;

$A-B:=\{x\in A\cup B: x\in A$ 但 $x\notin B\}$;

$A\oplus B:=(A-B)\cup(B-A)=\{x\in A\cup B: x\notin A\cap B\}$.

特别，当 $B\subset A$ 时(特别 A 为全集时)，称 $A-B$ 为B 关于A 的补集，记为 B^c(相对于 A).

二元的并集与交集运算可以反复应用而拓广为多元运算. 以$\cup$为例，作归纳法[①]定义：

$A_1\cup A_2$,

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cup A_{n+1}=\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cup A_{n+1}.$$

由于二元算子$\cup$具有结合律(易验证)，故上述定义及记号是无歧义的.

进一步，还可定义 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup\{A_i:i\in\mathbb{N}^+\}$.(常用$\mathbb{N}$ 表示自然数全体：$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；而$\mathbb{N}^+$ 表示非零的自然数全体.)由于还存在无法用自然数来枚举其元素的无限集合[②]，如实数全体$\mathbb{R}$，故读者必须习惯下面一个更抽象(但本质上一致)的定义及表达方式.

定义 1.2.4 设 A 是集合，称$\bigcup A:=\{x:$ 存在 $a\in A$，使 $x\in a\}$ 为 A 的并集. 特别，当 $A=\varnothing$ 时，规定$\bigcup\varnothing:=\varnothing$.

显然，当 $A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$是可数无限集(即以自然数为下标可以

---

① 数学归纳法的集论基础将涉及无穷公理与自然数的构造.后文将介绍.

② 统称为不可数(无限)集.

穷尽地枚举该集之元素)时，$\bigcup A = \bigcup_{n=0}^{\infty} a_n$.

需要引入**广义的并集公理**来保证$\bigcup A$之合法性(或存在性).

类似地，可以定义有限交与无限交的运算. 当 $A \neq \varnothing$ 时，$\bigcap A := \{x \in \bigcup A$: 对任一 $a \in A$，有 $x \in a\}$.

当 $A = \varnothing$时，$\bigcap \varnothing$无固定的定义①.

对于另外一些常用的集合运算及关系,如序对与直积(二维、多维与无穷维空间)，子集全体(幂集,用于构造函数空间等)等，另需引入两个集合公理(构集原则)来保证这些操作的合法性.

无序对公理(Unordered Pair) 任给两个集合 x 与y，存在一个集合恰好以 x 与 y 为它的所有成员,称之为 x 与y 的无序对，记为 $\{x,y\}$ (或$\{y,x\}$).

- 外延公理保证无序对这个二元集合是惟一的，故记号$\{x,y\}(=\{y,x\})$是无歧义的.
- 特别，当 $x=y$ 时，$\{x,x\}=\{x\}$是单元集合.
  集合中，相同的元素不累计.
- 由无序对出发，可以定义有序对(ordered pair).

定义 1.2.5(Kuratowski) 集 x 与y 的有序对$\langle x,y\rangle := \{\{x\},\{x,y\}\}$.

有序对$\langle x,y\rangle$也是一个二元集合.利用该集中二个元素$\{x\}$与$\{x,y\}$之不同，可以规定序对中二个元素 x 与y(又称为坐标或投影)的先后次序.

特别，$\langle\varnothing,\varnothing\rangle = \{\{\varnothing\},\{\varnothing,\varnothing\}\} = \{\{\varnothing\},\{\varnothing\}\} = \{\{\varnothing\}\} \neq \{\varnothing\} = \{\varnothing, \varnothing\}$. 此例明显指出,有序对与无序对在集论构造上的区别.

反复应用 Kuratowski 构造,可以(归纳地)定义三元序组、四元序组、n 元序组(n-sequence).

以三元序组为例 ②:

$$\begin{aligned}\langle x,y,z\rangle := \langle\langle x,y\rangle,z\rangle &= \{\{\langle x,y\rangle\},\ \{\langle x,y\rangle,z\}\} \\ &= \{\{\{x\},\{x,y\}\},\{\{\{x\},\{y,x\}\},z\}\}\end{aligned}$$

因此，三元序组仍是一个二元集合,但它有内外三层构造，借此可以确定三个坐标 x,y,z 之间的顺序.

评注 现代集合理论中,每个对象(包括关系、函数等)都被视为或定义成集合，有具体的构造.关于无限序列，下一章将介绍另一种更方便易用的函数式定义,自然也是集合.

读者已熟知的关于"二个序对(或序组)相同"的规定,将成为性质而可加以证

---

① $\bigcup\varnothing$和$\bigcap\varnothing$中之$\varnothing$",宜视为空集.从$\bigcup$ 运算之定义出发,易验证$\bigcup\varnothing=\varnothing$的规定是合理的.但当对此等式应用 De Morgen 律时,便会发现,若同时也规定$\bigcap\varnothing=\varnothing$,则会导出矛盾.为了保留 De Morgen 性质,只能规定$\bigcap\varnothing$无定义.

② 定义方式不是惟一的,但须确定其中的一个即可.

明.

定理 1.2.1 $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle \Leftrightarrow x=u$ 且 $y=v$.

证明 从序对的 Kuratowski 定义出发.

($\Leftarrow$) 用外延公理.(易,略).

($\Rightarrow$) 设 $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}=\langle u,v\rangle=\{\{u\},\{u,v\}\}$.

讨论.(i) $x=y$. 这时 $\langle x,y\rangle=\{\{x\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}=\langle u,v\rangle$,故必 $\{u\}=\{x\}=\{u,v\}$, 因此, $y=x=u=v$.

(ii) $x\neq y$, 这时必 $u\neq v$, (否则, 仿(i)可导出 $x=y$.)

考察 $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$,且注意单元集与双元集之不同. 因此必有 $\{x\}=\{u\}$, $\{x,y\}=\{u,v\}$, 所以 $x=u$. 再由 $x\neq y$ 且 $u\neq v$, 可导出 $y=v$. (证毕)[①]

同理, 可将上述论证拓广到多元序组(序列):

$$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle=\langle y_1,y_2,\cdots,y_n\rangle \quad \text{iff} \quad x_1=y_1,\ x_2=y_2,\cdots,\ x_n=y_n.$$

(iff 为"if and only if(当且仅当)"的缩写, 其等效于符号$\Leftrightarrow$.)

幂集公理(Power Set) 对任何集合 X,存在一个集合 Y 恰以 X 的所有子集为元素.

外延公理保证集 Y 的惟一性, 称之为 X 的幂集[②]. 记为

$$\mathscr{P}(X):=\{A: A\subseteq X\}, \text{(或记为 } \mathscr{P}X)$$

幂集必含空集与原集(母集), 故幂集必是非空的.

例 1

$$\mathscr{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}\neq\varnothing, \quad \mathscr{P}(\varnothing)\neq\{\{\varnothing\}\}$$

$$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))=\mathscr{P}(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}^3(\varnothing)&=\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))=\mathscr{P}(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})\\&=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}.\end{aligned}$$

引理 1.2.2 若 $\langle x,y\rangle\in A$, 则 $x,y\in\bigcup(\bigcup A)=\bigcup\bigcup A$; 反之若 $x,y\in A$, 则 $\langle x,y\rangle\in\mathscr{P}^2(A)=\mathscr{P}\mathscr{P}A$.

证明 若 $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}\in A$, 由 $\bigcup A$ 之定义, $\{x\}$, $\{x,y\}\in\bigcup A$, 进而 $x,y\in\bigcup(\bigcup A)$. 反之,若 $x,y\in A$, 则 $\{x\}$, $\{x,y\}\subseteq A$, 即 $\{x\},\{x,y\}\in\mathscr{P}A$, 故 $\{\{x\},\{x,y\}\}\in\mathscr{P}(\mathscr{P}A)$. □

不难看出, 并集算子有"去括号"的功能, 而幂集算子相反,有"添括号"的功能.

推论 1.2.3 集合 A 与 B 的直积(Cartesian Product)

---

① 以后将用符号□表示证明或讨论的结束.

② 名称之由来. 当 X 是有限集时, $\mathscr{P}(X)$中元素的个数 $|\mathscr{P}(X)|=2^{|X|}$, $|X|$表示集合 X 中元素的个数.

$$A \times B := \{\langle a, b\rangle : a \in A,\ b \in B\}$$
$$= \{\langle a, b\rangle \in \mathscr{P}^2(A \cup B) : a \in A,\ b \in B\}$$
是合法的集合. 特别，当 A 或 B 中至少有一个为空集时，$A \times B = \varnothing = B \times A$.

二元的直积运算也可以拓广到多元运算的场合.(其合法性可由三元序组、…、n 元序组具有集合式的构造而得到保证.) 下面的记号是常用的.
$$A^0 = \varnothing,\ A^1 = A,\ A^2 = A \times A, \cdots, A^{n+1} = (A^n) \times A.$$
关于无限直积(直幂)，下一章将介绍一种简洁易用的函数式定义.

实际上，离散数学与计算机科学中所有常见的集合运算及操作，均可用上面介绍的构集原则(无序对公理、并集公理、幂集公理及子集公理)给出其构造性(集论式)定义. 特别是上面介绍的各种布尔集运算(并、交、差、补等).

布尔集代数

设 $S \neq \varnothing$. 在幂集 $\mathscr{P}S$ 上引入并、交、补运算，且指定两个特殊子集 $\varnothing$ 与 S，便组成一个特殊的(布尔)代数构造，称为(S 上的)布尔集代数，记为：
$$\mathscr{B}(S) = (\mathscr{P}S, \cap, \cup, (\cdot)^C, \varnothing, S).$$
对任 $A, B, C \in \mathscr{P}S$，满足

- 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- 交换律 $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
- 幂等律 $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.
- 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
- De Morgan 律 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$; $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
- 双重补 $(A^C)^C = A$. (Double Negations.)
- 恒等律 $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup S = S$, $A \cap S = A$,后一组有时也称为吸收律.
- 取补律 $\varnothing^C = S$, $S^C = \varnothing$; $A \cup A^C = S$, $A \cap A^C = \varnothing$. (Negation Law.)

评注

(1) 上述关于二元运算$\cap$, $\cup$,一元运算$(\cdot)^C$ 及两个特别个体$\varnothing$, S 的一组性质实际上也是定义(抽象)布尔代数的一组公理.

(2) 注意二元运算$\cap$与$\cup$之间的一种对称现象,称之为对偶性(duality). 类似的对偶现象在逻辑中也出现.

(3) 在一般的布尔代数中,布尔集代数是一类直观的特殊结构,但又不失一般性. Stone 表示定理曰：每一个(抽象)布尔代数,存在一个布尔集合代数与之同构. 数学中,把可以“代表”一类抽象对象的一些具体直观的结构称之为(抽象对象的)“表示”，而计算机科学中则常称之为语义解释. 后文还将提及,布尔集代数也是命题逻辑的一种集合式表示.

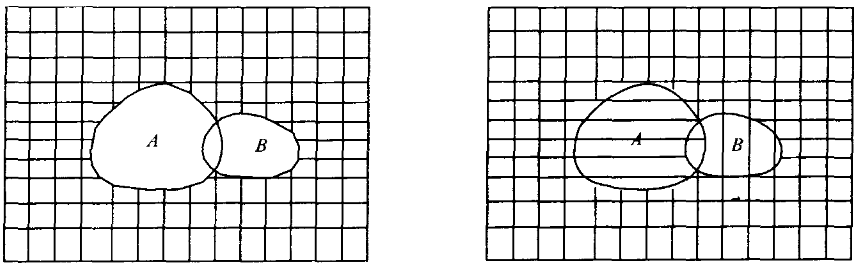
(4) 集合代数是一种完备的布尔代数,意指在 $\mathscr{P}(S)$中对无限并与无限交运

算也封闭(有定义),且相应的交换、结合、分配与 De Morgan 性质的拓广仍成立.

(5) 从空集$\varnothing$出发,利用无序对、并集、幂集与子集四个构集公理(及由它们可导出的各种运算或操作),在有限次操作之后,只能构造出有限集.(这个结果自然且直观,但严格证明较麻烦[①].不妨视之为一个事实.)为了能讨论无限集,自然需另引入一个保证无限集存在的公理.如何将此无穷公理设计得尽可能地简单直观而且够用,这是第三章讨论的主题.

例 2 考察 De Morgan 律(之一). $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

利用 Venn 图,可以给出一个直观的图示,如图 1.2.1.



$(A\cup B)^c$由阴影部分表示

A^c由竖线阴影部分表示,B^c由横线阴影部分表示

$A^c\cap B^c$由横-竖(交叉)阴影部分表示

图 1.2.1

二图中两个交叉阴影部分显然是重合的.严格证明如下:

任取 $x\in(A\cup B)^C$,则 $x\notin A\cup B$,即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,即 $x\in A^C$ 且 $x\in B^C$, $\therefore x\in A^C\cap B^C$.反之,任取 $y\in A^C\cap B^C$,则 $y\in A^C$ 且 $y\in B^C$,即 $y\notin A$ 且 $y\notin B$,即 $y\notin A\cup B$. $\therefore y\in(A\cup B)^C$.实际上,两个方向的论证可以合二为一.

综上所述,外延公理保证$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$之成立.

不难看出,上述论证也适用于一般场合:

$\left(\bigcup\limits_n A_n\right)^C=\bigcap\limits_n(A_n)^C$,其中$\{A_n\}$是一集合序列.

$(\bigcup\mathscr{A})^C=\bigcap\{A^C: A\in\mathscr{A}\}$,其中$\mathscr{A}$为一个集族(set of sets). □

例 3 考察 $S\neq\varnothing$ 上的布尔集代数 $\mathscr{B}(S)$.

对 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}S$,若 $\mathscr{A}\neq\varnothing$,则$\bigcap\mathscr{A}\in\mathscr{P}S\ni\bigcup\mathscr{A}$.

对 $B\in\mathscr{P}S$, $B\cup(\bigcap\mathscr{A})=\bigcap\{B\cup A: A\in\mathscr{A}\}$ (广义分配律),

$(\bigcap\mathscr{A})^C=\bigcup(\mathscr{A}^C)$,其中 $\mathscr{A}^C:=\{A^C: A\in\mathscr{A}\}$ (广义 De Morgan 律).

二集合等式之验证,可作为练习.

---

① 实际上,可以构造一个(极小)模型,含有空集且对无序对、并集、幂集及取子集(对应四个构集公理)四个运算封闭.而此集论模型中的每个成员都是有限集.如 Arckermann 模型.

进一步的例子或练习

1. 验证课文中布尔集代数的 8 组性质.

2. 验证广义分配律、广义 De Morgan 律及

吸收律:$(A\cup B)\cap A=A$;　$(A\cap B)\cup A=A$.

3. 交运算与补运算的反单调性:(对照并运算之单调性:$A\subseteq B\Rightarrow\bigcup A\subseteq\bigcup B$)

(1) $\varnothing\neq A\subseteq B\Rightarrow\bigcap B\subseteq\bigcap A$.

(2) $A\subseteq B\Rightarrow C-B\subseteq C-A$. (特别, $A\subseteq B\Rightarrow B^C\subseteq A^C$).

4. 设 $A,B\subseteq S$. 证明: $A\subseteq B$ iff $A\cap B=A$ iff $B-(B-A)=A$ iff $A^C\cup B=S$ iff $A\oplus B=B-A$.

5. 考察其他形式的分配现象:

(1) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$. ($\cap$改为$\cup$, 如何?)

(2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$. (将$\cup$改为$\cap$, 等式是否仍成立?)

(3) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$. (若将$\cap$改为$\cup$, 结果如何?)

6. 验证:

$\bigcup(\mathscr{P}(A))=A$;

$\mathscr{P}(\bigcup A)\supseteq A$. 举出反向不成立的实例. 试给出一个使等号成立的充要条件. (提示: 一个充要条件: 存在 B 使 $\mathscr{P}(B)=A$.)

6′. 相关的例子.

(1) 若 $A=\varnothing$, 则$\bigcup A=\varnothing$, $\mathscr{P}(\bigcup A)=\{\varnothing\}\neq A$.

(2) 若 $A=\{\varnothing\}$, 则$\bigcup A=\varnothing$, $\mathscr{P}(\bigcup A)=\{\varnothing\}=A$.

(3) 若 $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, 则 $\bigcup A=\varnothing\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$, $\mathscr{P}(\bigcup A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=A$.

(4) 若 $A=\{\varnothing,\{a\}\}$, 则$\bigcup A=\{a\}$, $\mathscr{P}(\bigcup A)=\{\varnothing,\{a\}\}=A$.

7. $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B)$,

$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)$. 使等号不成立的反例; 使等式成立的条件?

8. 试找出使集合等式$(A-B)\cup C=A-(B-C)$成立的充要条件, 且证明之. (利用 Venn 图或恒等变形来帮助寻找充要条件.)

(提示: 一个充要条件: $C\subseteq A$.)

9. 下面的集合等式是否成立? 若成立, 证明之; 若不成立, 举反例.

(1) $(A\times A)\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\cup C)$.

(2) $(A\times A)\cap(B\times C)=(A\cap B)\times(A\cap C)$.

10. 集列之并集的非交化技巧.

给定$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$. 构造 $B_n(n\in\mathbb{N})$, 满足: 当 $i\neq j$ 时, $B_i\cap B_j=\varnothing$, 且 $\bigcup\{A_n:n\in\mathbb{N}\}=\dot{\bigcup}\{B_n:n\in\mathbb{N}\}$. ($\dot{\bigcup}$表示非交并运算. disjoint union.)

(1) 先考察特例, $A_1\cup A_2=A_1\dot{\cup}(A_2-A_1)$.

(2) 作：$B_0:=A_0$，$B_1:=A_1-B_0,\cdots,B_{n+1}:=A_{n+1}-\bigcup\limits_{i=0}^{n}B_i$，

则：$B_i\cap B_j=\varnothing$ ($i\neq j$，$i,j\in\mathbb{N}$)；$\bigcup\{A_n:\ n\in\mathbb{N}\}=\bigcup\{B_n:\ n\in\mathbb{N}\}$.

11. Inclusion/Exclusion 原理.

(1) 利用 Venn 图考察：(用$|A|$表示集合 A 中元素之个数的多少，又称为 A 的基数.)

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

(2) 猜测下面更一般场合的表达式，进而用数学归纳法证明之.

$|A\cup B\cup C\cup D|=?$

$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=?$

(提示：

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\ &\quad -\cdots+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n| \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|.)\end{aligned}$$