

高等农业院校試用教材

高等数学

裴鑫德編

农业出版社

高等农业院校試用教材

高等数学

裴鑫德 編

农学类各专业用

农业出版社

高等农业院校试用教材

高等数学

裴鑫德 编

农业出版社出版

北京老钱局一号

(北京市书刊出版业营业许可证出字第186号)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经营

农业出版社印刷厂印刷装订

统一书号 K13144.161

1965年9月北京制型

1965年10月第一版

1965年10月北京第一次印刷

印数 0,001—2,500 册

开本 850×1168 毫米

三十二分之一

字数 260 千字

印张 九又八分之三

定价 (斜三) 一元一角

序 言

本书是根据 1963 年全国高等农业院校高等数学教学工作會議制訂的高等农业院校农学、土化等类各专业适用的高等数学教学大綱而編写的。本书初稿曾在北京农业大学农学、土化等类各专业做为教材进行試用,同时又蒙浙江农业大学、山东农学院等全国十余所兄弟高等农业院校做为教材进行試用。最后在各院校試用的經驗和意見的基础上,又根据中央教学改革精神进一步做了修改,初步注意了从高等农业院校的实际出发,从学生学习的实际出发,贯彻“少而精”的原則。在內容方面刪去了教学大綱中原有的但目前已在中学里讲授的平面解析几何部分,其它个别部分也略有刪減。有些內容附了星号,主要供教学参考用,不一定讲授。在文字叙述方面力求便于学生閱讀,每章开头附了总的說明,每章末附了复习思考題和习題,供教学时选用,书后附有习題答案。为使学生学习高等数学方便起見,最后附了必要的中学数学基本公式,以及积分表和用法举例,以备用时查閱。

为了贯彻启发式教学,讲授时还可以根据情况进一步“少而精”,重点突出,有些內容可让学生自己閱讀或計算。在讲授次序方面有些內容也可以根据情况作部分的变动。

編写本书时曾参考了国内已出版的一些有关的高等数学教材和参考书。在編写过程中曾蒙北京农业大学数学教研組的同志們对初稿提出不少宝贵意見,并在习題选配、繪图、校对等方面給了大力协助;試用过本书初稿的兄弟高等农业院校也曾对初稿提出过不少宝贵意見,在此一并对他們致以深切的謝意。

最后,由于水平所限,尽管做了許多努力,一定还会有很多不妥甚至錯誤之处,希望同志們指正。

裴鑫德 1965 年 4 月于北京农业大学

目 录

序言

緒論..... 1

第一章 函数..... 7

§ 1.1 常量与变量..... 7

§ 1.2 区間..... 8

§ 1.3 函数概念..... 9

§ 1.4 函数的表示法.....13

§ 1.5 基本初等函数及其图形.....16

§ 1.6 复合函数、初等函数.....23

复习思考题一25

习题一25

第二章 极限与連續.....28

§ 2.1 绝对值及其主要性质.....28

§ 2.2 无穷小量.....31

§ 2.3 无穷小量的运算定理.....34

§ 2.4 无穷大量.....35

§ 2.5 变量的极限.....38

§ 2.6 变量极限的运算定理.....42

§ 2.7 极限存在的判別准則.....45

§ 2.8 无穷小量的比較.....46

§ 2.9 函数的极限.....48

§ 2.10	两个重要的极限	50
§ 2.11	函数的連續性	53
§ 2.12	函数的間断点	56
§ 2.13	連續函数的运算法則	58
§ 2.14	初等函数的連續性	60
§ 2.15	閉区間上連續函数的主要性质	62
复习思考題二		63
习题二		64
第三章 导数及其应用		67
§ 3.1	导数概念	67
§ 3.2	导数的几何意义	71
§ 3.3	函数的可导性与連續性的关系	73
§ 3.4	几个简单初等函数的导数	74
§ 3.5	函数的和、积、商的导数	78
§ 3.6	反函数及其导数	81
§ 3.7	复合函数的导数	85
§ 3.8	隱函数的导数	88
§ 3.9	高阶导数概念	90
§ 3.10	拉哥朗日中值定理	92
§ 3.11	函数的单調增减性及其判別法	94
§ 3.12	函数的极值及其求法	97
§ 3.13	函数的最大值与最小值	104
§ 3.14	曲綫的凸凹性与拐点	108
§ 3.15	函数的作图	112
复习思考題三		116
习题三		116
第四章 微分及其应用		121

§ 4.1	微分概念	121
§ 4.2	微分的几何意义	124
§ 4.3	微分公式与微分法则	125
§ 4.4	微分形式不变性	127
§ 4.5	微分在近似计算中的应用	128
§ 4.6	高阶微分	133
复习思考题四		134
习题四		134
第五章 多元函数的微分法		136
§ 5.1	空间的直角坐标	136
§ 5.2	二元函数及其图形	138
§ 5.3	二元函数的极限与连续	141
§ 5.4	偏增量与偏导数	142
§ 5.5	全增量与全微分	145
§ 5.6	全微分在近似计算中的应用	149
§ 5.7	高阶偏导数	152
§ 5.8	二元函数的极值	153
§ 5.9	函数的线性化	157
§ 5.10	应用最小二乘法建立经验公式	162
复习思考题五		167
习题五		167
第六章 不定积分		170
§ 6.1	原函数与不定积分	170
§ 6.2	不定积分的主要性质	174
§ 6.3	积分基本公式	175
§ 6.4	不定积分的计算	177
复习思考题六		187

习题六	187
第七章 定积分及其应用	190
§ 7.1 定积分是总和的极限	190
§ 7.2 定积分的基本性质	197
§ 7.3 定积分与不定积分之间的关系	200
§ 7.4 定积分的计算	205
§ 7.5 无穷区间上的广义积分	207
§ 7.6 定积分的应用	209
§ 7.7* 定积分的近似计算	218
复习思考题七	225
习题七	225
第八章 微分方程	228
§ 8.1 一般概念	228
§ 8.2 一阶微分方程	232
§ 8.3 几个特殊类型的二阶微分方程	240
§ 8.4* 常系数二阶齐次线性微分方程	245
§ 8.5* 常系数二阶非齐次线性微分方程	251
复习思考题八	256
习题八	256
附录 I 习题答案	259
附录 II 常用的中学数学基本公式	271
附录 III 积分表及用法举例	281

緒 論

1. 数学研究的对象、数学的发生发展及其与生产实践的关系

数学研究的对象是什么呢？为了说明这个问题，我们回顾一下中学里所学的数学（主要是代数、几何、三角、平面解析几何等），大家知道，代数主要是研究数量关系，几何学主要是研究空间的形状，而三角和平面解析几何则两者兼有。因此，中学数学研究的对象概括说来不外是空间形状和数量关系。同样，现在要学的高等数学（主要是微分学、积分学、微分方程等），也仍然主要以这两个方面为研究对象。因此，关于数学（包括中学数学与高等数学）研究的对象，可以引用恩格斯的一句深刻而又简明的话：“纯数学是以现实世界的空间的形式和数量的关系——这是非常现实的资料——为对象的”^①，做为给数学的最精辟的定义。这就是说，数学是一门研究现实世界中的空间形状和数量关系的学科。

一切科学的发生与发展都是和生产实践分不开的。恩格斯曾经说过：“科学的发生与发展从开始起便是由生产所决定的”^②，毛主席也教导我们：“人类的生产活动是最基本的实践活动，是决定其他一切活动的东西”^③，作为人类知识之一的数学当然也不例外，它的发生和发展也是和生产实践有着密切联系的，恩格斯曾指出：“和其他

① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社，1958年版，37页。

② 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社，1959年版，149页。

③ 《毛泽东选集》第一卷，人民出版社，1951年版，281页。

所有科学一样,数学是从人们的实际需要上产生的,是从丈量地段面积和衡量器物容积,从计算时间,从制造工作中产生的”^①,并且随着生产实践的发展而不断丰富和发展。有些唯心主义者认为数学是人类头脑中从纯粹思维凭空想出来的,认为是数学家们完全脱离实践的一种心灵创造,当然这种看法是十分荒谬的,整个数学发展的历史本身就彻底的驳斥了这种完全错误的论点。例如,我国古算书九章算术所谈到的内容很多都是和当时的生产实践有密切联系的。又如几何学就是由于丈量田地界域、计算河堤土方、仓库容积等而产生的。三角学的产生和发展也是和农业生产对天文历书的需要,测量和航海术的发展有关。代数是由于商业交易发展的需要而逐步形成的。

初等几何整个系统除了极少部分外,在公元前五至三世纪就已形成。代数作为一门科学来说,它的形成大约在公元后八世纪。三角学的产生也是比较早的,但作为三角函数及其属性的概念直到十六至十七世纪才完成。

十七、十八世纪时,由于工业生产的蓬勃发展,以及自然科学技术科学发展的需要,给数学提出了许多新问题,而这些问题的解决,原有的数学方法已经不够用,需要创立完全新的观点和方法,于是就出现了解析几何学,并逐渐产生和形成了高等数学。

十九世纪以后,特别是近几十年来,由于工农业生产和科学技术的飞速发展,特别是原子能、无线电技术、自动控制、火箭技术、宇宙航行等的发展,要求数学提供更精确的理论 and 工具,这样就进一步为数学的发展提供了新的物质基础,使整个高等数学内容更加丰富,许多新的数学分支迅速成长起来,如计算数学、规划论、概率统计、信息论等等。

数学不仅来源于生产实践,而且数学知识是否是真理,还有待于

^① 恩格斯:《反杜林论》,人民出版社,1958年版,38页。

回到实践中检验,并为生产实践服务,进一步推动生产实践的发展,正如毛主席所指出的:“通过实践而发现真理,又通过实践而证实真理和发展真理。从感性认识而能动地发展到理性认识,又从理性认识而能动地指导革命实践,改造主观世界和客观世界”^①。数学的发生发展,数学与生产实践的关系也完全是如此。

2. 高等数学研究的对象和方法、数学的特点

高等数学研究的主要对象是变量(可变化的量)和图形的变化,研究的方法则用运动的观点从变量间的依从关系上去研究。事实上,客观世界各种现象都是处在不断运动,不断变化,互相制约,互相联系的过程中,因此,只有用运动的观点,才能更深一步的研究和认识客观世界的数量关系和空间形式,而高等数学正是这样形成和发展起来的。高等数学的产生是数学发展中的一个飞跃,并且只有经过这个飞跃,数学才更深刻更全面的反映客观世界的空间形状和数量关系的客观规律。数学中引进变量是数学发展史上一件大事,恩格斯曾讲过:“…变数是数学的转折点。因此运动和辩证法便进入了数学”^②,并且说:“只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态,并且也表明过程,即运动”^③。

高度的抽象性和应用的广泛性是数学的突出特点。但是,这种抽象是由现实世界具体事物中抽象而来,并不是唯心主义者所认为的,是纯粹主观世界的产物,是人类心灵自由创造的东西,数学的抽象形式只能表面上掩盖它来源于现实世界的本质,实际上它是非常现实的东西。例如,两担小麦加三担小麦等于五担小麦,两头牛加三头牛等于五头牛等等,如果我们撇开这些具体的小麦和牛的具体内

① 《毛泽东选集》第一卷,人民出版社,1951年版,295页。

② 恩格斯:《自然辩证法》,人民出版社,1960年版,217页。

③ 恩格斯:《自然辩证法》,人民出版社,1960年版,229页。

容,抽象的研究它們的数量規律,就得到一般的抽象的数学运算; $2+3=5$ 。恩格斯曾指出:“数和形的概念不是从任何地方得来,而仅仅是从现实世界中得来的”,并且說:“和数的概念一样,形的概念也完全是从外面世界得来的,而不是在头脑中从純粹的思維中产生出来的。要能达到形的概念,先应当存在具有一定形状的物体,而且应把这些形状拿来比較”^①。当然,现实世界中还有更复杂的数量規律,表现为更高度的抽象,但是,正如列宁所指出的:“一切科学的(正确的、郑重的、不是胡謔的)抽象,都更深刻、更正确、更完全地反映着现实。从生动的直观到抽象的思維,从思維到实践——这就是認識真理、認識现实的辯証法道理”^②。

正因为数学的高度抽象性而显现它应用的极端广泛性,許多数学的定理和公式可以用来研究各种具体的量同样获得成功。例如,同一数学关系式 $y = \frac{1}{2}ax^2$, 当 x 看成是時間 t , a 看成是重力加速度 g , y 考虑为距离 s 时,这个式子就变成 $s = \frac{1}{2}gt^2$, 这是自由落体下落所經過的路程与時間的关系式;如果把 x 看成是物体运动的速度 v , a 看成是物体的质量 m , y 看成是动能 E , 則上式变为 $E = \frac{1}{2}mv^2$, 这是物体的动能与运动速度的关系式;当把 x 看成是通过导綫的电流强度 I , a 看成是导綫的电阻 R , 而 y 代表电流通过时单位時間所产生的热量 Q , 則有 $Q = \frac{1}{2}RI^2$, 这是电学中电流通过导綫时,电流强度和所产生热量的关系式。这个例子說明,同一数量規律往往普遍存在于各种物质形态和各种运动形式之中,这也反映了物质世界的同一性,因而,数学也就表现了它应用的极端广泛性。

由于数学是来自现实世界,反映现实世界的客观規律性,因此,它可以用来指导实践,表现出它的預見性。如海王星发现以前,人們就已經从天文計算中預見到它的存在;利用統計和偏微分方程的計

① 恩格斯:《反杜林論》,人民出版社,1966年版,37頁。

② 列宁:《黑格尔《邏輯学》一书摘要》,人民出版社,1966年版,134頁。

算,可以进行中长期天气預报;載人宇宙飞船按指定地点時間着陆等等,都是和数学精密計算的預見性分不开的。

3. 我国数学的成就、学习高等数学的目的和意义

我們伟大的祖国有着悠久的历史,我国人民是勤勞的、勇敢的和智慧的,从很早的古代起对数学就有很多的貢獻,并且一直应用数学为农业生产服务。例如在公元前一千多年就有了勾股弦关系的知識,并在农田水利中应用。公元前三至二世紀就編著了“九章算术”一书,其中就讲到田地面积和建堤修渠体积等的計算,讲到百分比、分数四則、开平方开立方的計算、一次联立方程和二次方程的解法等等。

关于圓周率 π 的計算,在公元四世紀前后,我国就有了极精确的研究。三国时刘徽就已算得 $\pi=3.1416$,南北朝时大数学家祖冲之曾算得 π 介于 3.1415926 及 3.1415927 之間,并把 $\frac{355}{113}$ 和 $\frac{22}{7}$ 叫做圓周率的密率和約率,并确认 $\pi=3.14159265$ 。在欧洲直到公元十六世紀德国人啞托才算得此数,比祖冲之晚了一千一百多年。

在代数方面关于方程的解法,特别是高次方程近似根的求法,賈宪和秦九韶的貢獻比英国人霍那得到同一方法早了五百多年,此外如二項式定理等的发现也都比欧洲人为早。

我国古代数学发展很早,祖国劳动人民对数学有很高的才能,貢獻是极多的。但后来由于长期封建統治,生产力的发展緩慢,因此数学发展受到了很大限制。近百年来,由于帝国主义压迫、封建势力和官僚资产阶级的反动統治,生产力受到了严重的束縛,数学发展也受到了很大的阻碍。

解放以后,在党和毛主席的英明领导下,在优越的社会主义制度下,我国的工农业生产有了飞速的发展,这样就为我国数学和一切科学的发展奠定了物质基础,使我国数学的发展走上了新的紀元。

特别是在总路线、大跃进、人民公社三面红旗的光辉照耀下，随着我国社会主义革命和社会主义建设的蓬勃发展，广大数学工作者不断学习毛泽东思想，贯彻理论联系实际的方针，数学已经得到了全面的迅速的发展。许多解放前是空白或薄弱的部分，如计算数学、微分方程、概率统计、运筹学等都有了很大的发展，并直接为我国社会主义建设服务。原来比较有基础的一些部分又有了进一步发展，取得了许多新的成就。

随着我国社会主义事业的不断前进，数学在我国的发展也必将走上更高的水平，为我国社会主义建设做出更大的贡献。

为了坚决贯彻党中央提出的国民经济以农业为基础以工业为主导的方针，为了实现我国社会主义农业的现代化，迅速发展我国农业，对于农业工作者和农业科学工作者来说，学习和掌握高等数学这一有力工具也是十分重要的。因为近代农业科学和生物科学的研究和发展中，物理学与化学是它很重要的基础，而这些学科中的许多规律必须用高等数学关系来表达。同时在农业现代化、现代农业科学和现代生物学的许多问题中，凡是从数量方面研究其过程或状态时，也必然要用到高等数学，因此高等数学是农业科学的基础理论之一。可以说没有中学所学的数学和高等数学给我们的知识，我们就不能进行农业科学上的严正的工作。迦利略曾说过：“自然科学要用数学语言来记录”。恩格斯也教导我们：“…对于辩证法的同时是唯物主义的自然观，需要有数学与自然科学的知识”^①。

因此，作为农业工作者或现代农业科学工作者，学好高等数学，无论对掌握近代先进农业科学理论，还是直接为我国社会主义农业现代化和农业生产服务来说，都具有重要意义。

① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社，1956年版，7页。

第一章 函 数

从本章起,我們开始介紹高等数学,并且首先介紹函数概念。函数概念是高等数学中最基本的概念,是高等数学研究的主要对象,是客观世界中变量之間依从关系的反映,是許多自然科学以及技术科学中表达自然規律的基本概念。因此,無論从理論研究来考虑,还是从技术实践来考虑,函数概念都具有重要意义。

§ 1.1 常量与变量

当我们研究或观察某种自然现象或技术过程时,常常在这种自然现象或技术过程中遇到各种不同的量,其中有些量在整个现象或过程中,始终保持同一数值不起变化,这种量叫做常量。而另外有些量却或多或少的起一些变化,可以取不同的值,这种量叫做变量。

例如,对密闭容器内的气体加热时,气体的体积和气体分子的个数保持常值不变,是常量;而气体的温度和压力却不断增加,取得越来越大的值,是变量。

又如,某物体自某一高度自由落下时,物体的质量保持常值不变,是常量;但物体与地面的距离,物体下落的速度都在变化,是变量。

需要注意,我們說一个量是常量或是变量,都是指在某一确定的现象或过程中來說的,同一个量在某种情况下,可以看成是常量,而在另外一种情况下,又可能是变量。

例如，对圆的面积 S 这一个量来说，如果圆的半径给定，则 S 就是定值，是常量；如果圆的半径可以取各种不同的值，即取变量时，则 S 又是变量了。

又如，重力加速度 g ，在地球表面上某一定地点时可以看成是常量。但是我们知道，重力加速度 g 在地球的赤道和两极这样两个不同的地方又是不同的，这时它又应该看成是变量了。

在高等数学中，为了研究问题方便起见，有时把常量看成是取同一个值的变量。

常量一般用拉丁字母头几个字母 a, b, c 等来表示，变量则常用最末几个字母 x, y, z 等来表示。

因为量 x 的每一个值都是一个数，因而可以用数轴上的一个点来表示，如果量 x 是常量，则用数轴上一个定点来表示；如果量 x 是变量，则用数轴上的动点来表示。

§ 1.2 区 間

在各种不同问题中，我们所遇到的变量，其取值范围也常常是不同的。

例如，某地某日的地面最低气温是 16°C ，而最高气温是 25°C ，则该地该日的地面气温 t 是个变量，它的取值范围就是 16°C 到 25°C 之间的所有值。又如，绝对温度 T 只取大于 -273°C 的值。又如，某城市的居民数，由于经常有出生和死亡等，因此它是个变量，但它只能取正整数，等等。

但是在高等数学以及其它自然科学的理论研究中，最常遇到的变量的取值范围，是取介于两个实数之间的全体实数值。我们把介于两个实数之间的全体实数叫做区间，而那两个实数叫做区间的端点。

設 a 与 b 为两个已知实数, 且 $a < b$, 則滿足不等式

$$a < x < b$$

的实数 x 的全体叫做开区間, 用記号 (a, b) 表示。

滿足不等式

$$a \leq x \leq b$$

的实数 x 的全体叫做閉区間, 用記号 $[a, b]$ 表示。

滿足不等式

$$a \leq x < b$$

或

$$a < x \leq b$$

的实数 x 的全体叫做半开区間, 且分別用記号 $[a, b)$ 及 $(a, b]$ 表示。

区間 (a, b) 的几何意义, 是表示数軸上坐标为 a 与坐标为 b 的两个点間的綫段上点的全体(图 1.1)。

以上談到的区間, 都是在有限范围内的, 总称为有限区間。除有限区間外, 还有无限区間。



图 1.1

例如, 全体实数 x 組成的区間, 記作 $(-\infty, +\infty)$, 或記作 $-\infty < x < +\infty$; 所有大于 a 的全体实数 x 組成的区間記作 $(a, +\infty)$, 或記作 $a < x < +\infty$; 所有小于 a 的全体实数 x 組成的区間記作 $(-\infty, a)$, 或記作 $-\infty < x < a$ 。

类似的可以規定記号 $[a, +\infty)$ 及 $(-\infty, a]$ 的意义。

§ 1.3 函数概念

在同一自然現象或技术过程中, 我們所遇到的变量, 常常同时有几个。并且它們一般都不是彼此孤立的变化, 而是或多或少总有一定的联系, 互相制約, 互相依存, 按照一定的規律在变化。

例 1 一定质量的气体, 当溫度保持不变时, 則压力 P 与体积