

833183

【美】M.W.HIRSCH和S.SMALE 著

3104

7/4414

1-2

微分方程, 动力系统 和 线性代数

下册

04
—
4414
2

成都科技大学
图书馆
基本书库

黄 傑 刘世伟 合译

高等教育出版社

微分方程, 动力系统 和线性代数

下 册

[美] M. W. HIRSCH 著
S. SMALE

黄 傑 刘世伟 合译

高等教育出版社

本书是根据 M. W. Hirsch 和 S. Smale 所著的《Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra》(1974)一书译出的。全书共有十六章,中译本分上、下两册出版。本书为下册,主要内容有:平衡的稳定性,电路的微分方程, Poincaré-Bendixson 定理,生态学,周期吸引子,经典力学,非自治方程及流的可微性,扰动理论和结构稳定性。

本书要求读者具有线性代数和多变量微积分的初步知识,可供理科有关专业大学生、研究生及教师参考

微分方程,动力系统和线性代数

下 册

[美] M. W. HIRSCH 著
S. SMALE

黄 傑 刘世伟 合译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.875 字数 142,000

1987年6月第1版 1987年6月第1次印刷

印数 00,001—4,100

书号 13010·91180 定价 1.35 元

目 录

第九章 平衡的稳定性	1
§ 1. 非线性收点.....	1
§ 2. 稳定性.....	6
§ 3. 李雅普诺夫函数.....	14
§ 4. 梯度系统.....	23
§ 5. 梯度和内积.....	28
注.....	34
第十章 电路的微分方程	35
§ 1. RLC 电路.....	35
§ 2. 电路方程的分析.....	40
§ 3. Van der Pol 方程.....	42
§ 4. Hopf 分枝.....	51
§ 5. 较一般的电路方程.....	53
注.....	64
第十一章 Poincaré-Bendixson 定理	65
§ 1. 极限集.....	65
§ 2. 局部截口和流匣.....	68
§ 3. 平面动力系统的单调序列.....	70
§ 4. Poincaré-Bendixson 定理.....	74
§ 5. Poincaré-Bendixson 定理的应用.....	76
注.....	80
第十二章 生态学	81
§ 1. 一个物种.....	81
§ 2. 捕食者和食.....	84
§ 3. 物种竞争.....	92
注.....	102
第十三章 周期吸引子	103

§ 1. 闭轨道的渐近稳定性	103
§ 2. 离散动力系统	106
§ 3. 稳定性和闭轨道	109
第十四章 经典力学	115
§ 1. n 体问题	115
§ 2. 哈密顿力学	118
注	124
第十五章 非自治方程及流的可微性	125
§ 1. 非自治微分方程解的存在性, 唯一性和连续性	125
§ 2. 自治方程的流的可微性	127
第十六章 扰动理论和结构稳定性	133
§ 1. 平衡的持久性	133
§ 2. 闭轨道的持久性	139
§ 3. 结构稳定性	142
后记	150
附录 I 基础知识	153
§ 1. 集论的若干约定	153
§ 2. 复数	154
§ 3. 行列式	155
§ 4. 线性代数的两个命题	156
附录 II 多项式	160
§ 1. 代数的基本定理	160
附录 III 标准型	163
§ 1. 分解定理	163
§ 2. S 和 N 的唯一性	165
§ 3. 幂零算子的标准型	166
附录 IV 反函数定理	170
参考文献	174
习题答案	176

第九章 平衡的稳定性

本章介绍动力系统平衡点的稳定性这一重要概念。其他各种稳定性,如周期解的稳定性和结构稳定性将在以后几章中讨论。

设 \bar{x} 是一个平衡点,如果所有 \bar{x} 附近的解都保持在它的附近,则平衡点 \bar{x} 是稳定的。如果所有 \bar{x} 附近的解不仅保持在它的附近,而且又趋于 \bar{x} ,则这个平衡点就是渐近稳定的。当然,这还需要精确的定义;这些定义将在第2节中给出。在第1节中我们首先研究渐近稳定平衡的一种特殊类型:收点。其特征是所有附近的解都指数地趋向于 \bar{x} 。第七章中我们曾考虑过线性收点的特殊情况。收点是很有用的,因为它们可以直接由系统的线性部分(即向量场在 \bar{x} 处的导数)的特征值来判定。

第3节证明著名的李雅普诺夫稳定性定理。这一节中还包含一条精致的定理(定理2),除第十章要用到它以外,对本书其他部分并不是必要的。

第4节和第5节讨论梯度流这一重要特殊情况。梯度流有一些特殊性质,这些性质使得对梯度流的分析相当简单。此外,这些梯度流是经常出现的。

§1 非线性收点

考虑微分方程

$$(1) \quad x' = f(x); \quad f: W \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad W \subset \mathbb{R}^n \text{ 开集.}$$

我们假定 f 是 C^1 的。对于点 $\bar{x} \in W$, 如果 $f(\bar{x}) = 0$ 则称 \bar{x} 为(1)的平衡点。显然,常值函数 $x(t) \equiv \bar{x}$ 是(1)的一个解。由解的唯一性

知, 没有其他解曲线通过 \bar{x} . 如果 W 是(1)所描述的某物理 (生物, 经济或其他类似的) 系统的状态空间, 则 \bar{x} 是“平衡状态”: 如果系统在 \bar{x} 处则总是 (以前也是) 在 \bar{x} 处.

设 $\phi: \Omega \rightarrow W$ 为相伴于(1)的流; $\Omega \subset \mathbb{R} \cdot W$ 是开集, 并且对每个 $x \in W$, 映射 $t \rightarrow \phi(t, x) = \phi_t(x)$ 是当 $t=0$ 时通过 x 的解; 它定义在 t 的某个开区间上. 若 \bar{x} 是平衡点, 则对所有的 $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t(\bar{x}) = \bar{x}$, 因此, \bar{x} 也称为流的平稳点或不动点. \bar{x} 又称为向量场 f 的零点或奇点.

假定 f 是线性的: $W = \mathbb{R}^n$ 且 $f(x) = Ax$, 其中 A 是 \mathbb{R}^n 上的线性算子. 于是原点 $0 \in \mathbb{R}^n$ 是(1)的一个平衡点. 在第七章我们曾看到过当 $\lambda < 0$ 大于 A 的所有特征值的实部时, 则解 $\phi_t(x)$ 指数地趋向于 0 : 对于某个 $C > 0$,

$$|\phi_t(x)| \leq C e^{\lambda t},$$

现在假定 f 是 C^1 向量场 (不必是线性的), 其平衡点 $0 \in \mathbb{R}^n$. 我们把 f 在 0 处的导数 $Df(0) = A$ 看作在 0 附近趋近于 f 的线性向量场. 我们称它为 f 在 0 处的线性部分. 若 $Df(0)$ 的所有特征值都有负实部, 就称 0 为收点. 更一般地说, 若 $Df(\bar{x})$ 的所有特征值都有负实部, 则(1)的平衡点 \bar{x} 是收点.

下面的定理说明非线性收点 \bar{x} 的局部性态如线性收点: 附近的解指数地趋向 \bar{x} .

定理 设 $\bar{x} \in W$ 是方程(1)的收点. 假定 $Df(\bar{x})$ 的每个特征值有小于 $-c$ ($c > 0$) 的实部. 则存在 \bar{x} 的邻域 $U \subset W$ 使得

- (a) 对所有的 $x \in U, t > 0, \phi_t(x)$ 有定义并且在 U 中.
- (b) \mathbb{R}^n 上存在一个欧几里得范数使得对所有的 $x \in U, t \geq 0$ 有

$$|\phi_t(x) - \bar{x}| \leq e^{-ct} |x - \bar{x}|.$$

- (c) 对 \mathbb{R}^n 上任一范数, 存在一个常数 $B > 0$, 使得对所有

$x \in U, t \geq 0$ 有

$$|\phi_t(x) - \bar{x}| \leq B e^{-ct} |x - \bar{x}|.$$

特别地, 对所有的 $x \in U$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\phi_t(x) \rightarrow \bar{x}$.

证明 为方便起见, 假定 $\bar{x} = 0$. (否则, 给 \mathbf{R}^n 以新坐标 $y = x - \bar{x}$; 在 y 坐标下, f 就以 O 为平衡点, 等等.)

令 $A = Df(0)$, 选取 $b > 0$ 使得 A 的特征值的实部小于 $-b < -c$. 第七章第 1 节的引理证明了 \mathbf{R}^n 有基 \mathcal{B} , 其对应的范数和内积对于所有的 $x \in \mathbf{R}^n$ 满足

$$\langle Ax, x \rangle \leq -b |x|^2.$$

因为 $A = Df(0)$ 和 $f(0) = 0$, 由导数的定义知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - Ax|}{|x|} = 0.$$

因此由柯西不等式得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\langle f(x) - Ax, x \rangle}{|x|^2} = 0.$$

从而存在如此小的 $\delta > 0$, 若 $|x| \leq \delta$, 则 $x \in W$ 且

$$\langle f(x), x \rangle \leq -c |x|^2.$$

令 $U = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq \delta\}$. 设 $x(t)$ ($0 \leq t \leq t_0$) 为 U 中的解曲线, 且 $x(t) \neq 0$. 于是

$$\frac{d}{dx} |x| = \frac{1}{|x|} \langle x', x \rangle.$$

因此, 由 $x' = f(x)$ 得

$$(2) \quad \frac{d}{dx} |x| \leq -c |x|.$$

这就证明了, 第一, $|x(t)|$ 是递减的; 因此对所有的 $t \in [0, t_0]$ 有 $|x(t)| \in U$. 因为 U 是紧的, 由第八章第 5 节知轨线 $x(t)$ 对所有 $t \geq 0$ 有定义, 并且在 U 中. 第二, (2) 蕴含着对所有 $t \geq 0$ 有

$$|x(t)| \leq e^{-ct} |x(0)|.$$

于是(a)和(b)得证, 从范数的等价性可得(c).

在非线性收点 \bar{x} 处的相图很象向量场的线性部分的相图: 在适当的范数下轨线指向所有绕 \bar{x} 的充分小球的内部(图A).

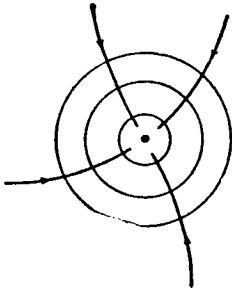


图 A 非线性收点

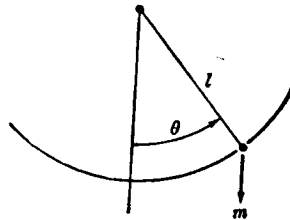


图 B 摆

注意, 这些球不一定是“圆”球; 它们是在特定范数下的球. 在标准坐标下它们可能是椭圆.

非线性收点的一个简单的物理例子是在铅直平面中摆的运动(图B). 假定向下的常重力等于摆锤的质量 m ; 我们忽略支锤杆的质量. 假定有与锤的速度成比例的阻碍运动的摩擦(或粘滞)力.

设 l 为杆长(常量). 摆锤沿半径为 l 的圆周运动. 若 $\theta(t)$ 是在时间 t 从铅直线逆时针方向转到锤杆的角度, 于是摆锤的角速度为 $d\theta/dt$, 而速度为 $ld\theta/dt$. 所以摩擦力是 $-kl d\theta/dt$, 其中 k 为非负常数; 这个力与圆相切.

向下的重力 m 有切于圆的分量 $-m \sin\theta(t)$; 这个力是作用在摆锤上而使它运动的力. 所以在时间 t 与圆相切的总力是

$$F = -\left(kl \frac{d\theta}{dt} + m \sin\theta\right).$$

摆锤切于圆的加速度是

$$a = -l \frac{d^2\theta}{dt^2};$$

因此,从牛顿定律 $a = F/m$ 得

$$l\theta'' = -\frac{kl}{m}\theta' - \sin\theta,$$

或

$$\theta'' = -\frac{k}{m}\theta' - \frac{1}{l}\sin\theta.$$

引入新变量

$$\omega = \theta'$$

(解释为角速度),我们就得到等价的一阶系统

$$(3) \quad \theta' = \omega,$$

$$\omega' = -\frac{1}{l}\sin\theta - \frac{k}{m}\omega.$$

这个 \mathbf{R}^2 中的非线性自治方程有平衡点:

$$(\theta, \omega) = (n\pi, 0); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

我们集中注意于平衡点 $(0, 0)$.

定义着(3)的向量场是

$$f(\theta, \omega) = \left(\omega, -\frac{1}{l}\sin\theta - \frac{k}{m}\omega \right).$$

它在 (θ, ω) 处的导数是

$$Df(\theta, \omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{l}\cos\theta & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}.$$

因此

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix},$$

其特征值为

$$\frac{1}{2} \left\{ -\frac{k}{m} \pm \left[\left(\frac{k}{m} \right)^2 - \frac{4}{l} \right]^{1/2} \right\}.$$

由于质量是正的,只要摩擦系数 k 是正的,则实部 $-k/2m$ 就是负的. 所以平衡点 $\theta = \omega = 0$ 是一个收点. 由此我们可以断定: 对于所有充分小的初始角和初始速度,摆趋向于平衡位置 $(0, 0)$.

当然,这也不奇怪. 事实上,从经验似乎也可以明显地看出,从任何初始位置和初始速度出发的摆将趋向于下垂的平衡状态,但要除去少数趋向于竖直平衡位置的初始状态. 然而要从数学上验证这个物理结论是需要费些气力的. 第 3 节我们再讨论这个问题.

在放下摆的问题之前,我们指出这样一个悖论:摆不能达到静止,就是说,它一旦处于运动状态——不平衡——就不能达到平衡状态,而仅仅是任意接近平衡状态. 这是由于微分方程解的唯一性! 当然,我们知道实际上摆是会达到静止的. 有人又可能这样争辩说,摆不是“真正”的静止而是它的运动小得难以察觉. 一个较好的说明是摆的运动的数学模型(3)不过是真实情况的一种近似.

习 题

- (a) 叙述并证明第 1 节中定理的逆定理.
(b) 定义非线性向量场的“源点”并证明有关源点的一个有趣的定理.
- 举例说明若 f 是非线性 C^1 向量场且 $f(0) = 0$, 对于 $Df(0)$ 的特征值不具负实部的方程 $x' = f(x)$ 的所有解可能有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.
- 假定 f 是 \mathbb{R}^n 上的 C^1 向量场且 $f(0) = 0$. 假定 $Df(0)$ 的某特征值有正实部. 证明在 0 的每个邻域中存在解 $x(t)$, 在某区间 $[0, t_0]$ ($t_0 > 0$) 上 $|x(t)|$ 是递增的.
- 若 \bar{x} 是动力系统的收点, 则它有不包含其它平衡点的邻域.

§ 2 稳 定 性

在常微分方程及其应用,平衡点的研究起着极其重要的作

用。然而为了在物理上有意义，平衡点必须满足一定的稳定性准则。（和本书其他地方一样，这里“物理上”一词的含义较为广泛；例如，在某些情况下，物理上可以代之以生物上，化学上或甚至于生态上。）

最常见的稳定性概念是由李雅普诺夫所建立的。如果一个平衡点附近的解始终保持在它附近，则这个平衡点是稳定的。由于在动力系统的应用中不可能极其精确地确定一个状态，它只能是近似的，故平衡点必须是物理意义上的稳定。

数学上的定义是：

定义 1 假定 $\bar{x} \in W$ 是微分方程

$$(1) \quad x' = f(x)$$

的一个平衡点，其中 $f: W \rightarrow E$ 是从向量空间 E 的开集 W 映入 E 的 C^1 映射。如果对 W 中 \bar{x} 的每个邻域 U ，有 U 中 \bar{x} 的邻域 U_1 使得每个有初始值 $x(0) \in U_1$ 的解 $x(t)$ 有定义，且对所有 $t > 0$ ， $x(t)$ 在 U 中（见图 A）。则称 \bar{x} 为稳定平衡点。

定义 2 如果 U_1 可以这样选取，使得除定义 1 中所描述的性质外

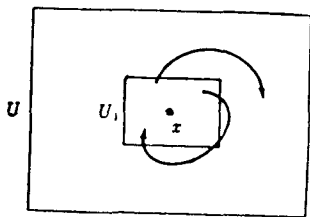


图 A 稳定

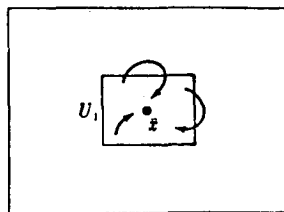


图 B 渐近稳定

还有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ ，则 \bar{x} 是渐近稳定的。（见图 B）

定义 3 不稳定的平衡点 \bar{x} 称为不稳定点。这是指 \bar{x} 存在邻域 U 使得对 U 中 \bar{x} 的每一个邻域 U_1 ，至少有一个从 $x(0) \in U_1$ 出发的解 $x(t)$ ，它不全在 U 中。（见图 C）

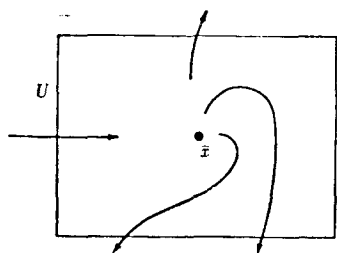


图 C 不稳定

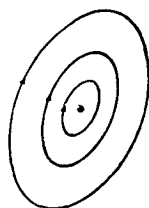


图 D 稳定,但不是渐近稳定

收点是渐近稳定的,因而是稳定的. 例如线性微分方程

$$(2) \quad x' = Ax,$$

其中 A 的特征值皆为纯虚数, \mathbf{R}^2 中的原点是稳定的但不是渐近稳定的. 它的轨道都是椭圆. (图 D)

在应用中这个例子的重要性是有限的 (尽管有著名的谐振子), 因为只要很微小的非线性扰动就会破坏它的特性. 由于“双曲性”是线性流的属性 (见第七章), 所以即使很小的线性扰动也可使它变成收点或源点.

源点是不稳定平衡点的一个例子.

作为第 2 节的主要定理的补充, 我们有下面的不稳定性定理, 其证明对于本书其余部分不是必要的.

定理 设 $W \subset E$ 是开的且 $f: W \rightarrow E$ 连续可微. 假定 $f(\bar{x}) = 0$ 且 \bar{x} 是方程

$$x' = f(x)$$

的稳定平衡点. 则 $Df(\bar{x})$ 的特征值没有正实部.

若导数 $Df(\bar{x})$ 不具实部为零的特征值, 我们就说平衡点 \bar{x} 是双曲的.

推论 双曲平衡点或者是不稳定的或者是渐近稳定的.

定理的证明 假定某特征值有正实部; 我们将证明 \bar{x} 是不稳定的. 可以假设 $\bar{x} = 0$, 否则就用 $f(x - \bar{x})$ 代替 $f(x)$. 由标准型定

理 (第二章), E 有一个在 $Df(0)$ 下不变的分裂 $E_1 \oplus E_2$ 使得 $A = Df(0)|_{E_1}$ 的特征值都有正实部, 而 $B = Df(0)|_{E_2}$ 的特征值都有负实部或 0 实部.

设 $a > 0$ 且 A 的每个特征值的实部 $> a$, 于是在 E_1 上有欧几里得范数使得对所有 $x \in E_1$ 有

$$(3) \quad \langle Ax, x \rangle \geq a|x|^2.$$

同理, 对任何 $b > 0$, 在 E_2 上存在欧几里得范数使得对所有 $y \in E_2$ 有

$$\langle By, y \rangle < b|y|^2.$$

我们选择 b 使得

$$0 < b < a.$$

取 $E = E_1 \oplus E_2$ 上的内积为 E_1 和 E_2 上内积的直和; 我们也要用到与 E_1, E_2 , 和 E 上的内积相伴的范数. 若 $z = (x, y) \in E_1 \oplus E_2$, 则 $|z| = (|x|^2 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}$.

利用在 O 附近 f 的泰勒展开式:

$$f(x, y) = (Ax + R(x, y), By + s(x, y)) = (f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

其中

$$(x, y) = z; (R(x, y), s(x, y)) = Q(z).$$

于是, 给定任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得若 $U = B_\delta(O)$ (绕 O 的半径为 δ 的球) 则对于 $z \in U$ 有

$$(5) \quad |Q(z)| \leq \varepsilon|z|.$$

我们定义锥 $C = \{(x, y) \in E_1 \oplus E_2 \mid |x| \geq |y|\}$.

引理 存在 $\delta > 0$ 使得若 U 是闭球 $B_\delta(O) \subset W$, 于是对所有 $z = (x, y) \in C \cap U$,

(a) 若 $x \neq 0$, 则 $\langle x, f_1(x, y) \rangle - \langle y, f_2(x, y) \rangle > 0$. 且

(b) 存在 $\alpha > 0$, 使得 $\langle f(z), z \rangle \geq \alpha|z|^2$.

由这个引理可得下面的不稳定性定理. 我们首先说明条件

(a). 设 $g: E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbf{R}$ 由 $g(x, y) = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)$ 所定义. 于是 g 是 C^1 的, $g^{-1}[0, \infty) = C$ 并且 $g^{-1}(0)$ 是 C 的边界.

另外, 若 $(x, y) = z \in U$, 则

$$\begin{aligned} Dg(z)(f(z)) &= Dg(x, y)(f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ &= \langle x, f_1(x, y) \rangle - \langle y, f_2(x, y) \rangle, \end{aligned}$$

如果 $z \in g(0)^{-1}$, 由(a)知上式为正, 这意味着在 U 中通过 C 的边界的解 $z(t)$ 上 g 是递增的, 因为由链规则,

$$\frac{d}{dt}g(z(t)) = Dg(z(t))f(z(t)).$$

所以没有从 C 中出发的解能够在离开 U 之前离开 C . 图 E 为其示意图.

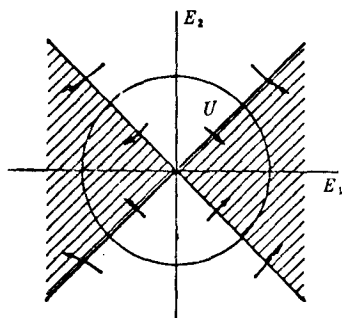


图 E 锥 C 是阴影部分

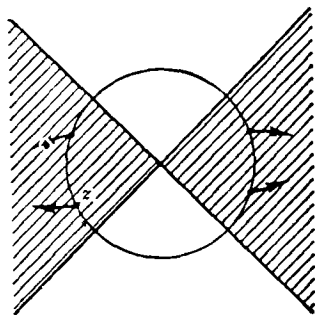


图 F

从几何上说, (b) 意味着每个在 $z \in C$ 处的向量 $f(z)$, 从经过 z 并在以 O 为心的球面指向球外. 见图 F.

条件(b) 有下述量的含义. 若 $z = z(t)$ 是 $C \cap U$ 中的解曲线, 则

$$\langle f(z), z \rangle = \langle z', z \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z|^2,$$

故(b) 蕴含

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z|^2 \geq \alpha |z|^2,$$

或

$$\frac{\frac{d}{dt} |z|^2}{|z|^2} \geq 2\alpha,$$

$$\frac{d}{dt} \ln |z|^2 \geq 2\alpha,$$

$$\ln |z(t)|^2 \geq 2\alpha t + \ln |z(0)|^2,$$

$$|z(t)|^2 \geq e^{2\alpha t} |z(0)|^2;$$

于是

$$|z(t)| \geq e^{\alpha t} |z(0)|.$$

因此每个从 $C \cap U$ 中出发的非平凡解，只要它有定义并且在 $C \cap U$ 中它就以指数速率从原点移开。

若对所有 $t \geq 0$, $y(t)$ 没有定义，则由第八章第 5 节知它一定离开紧集 $C \cap U$ ；如上面我们已经看到的，它一定离开 U 。另一方面，若对所有的 t , $y(t)$ 有定义，它也一定离开 U ，因为 U 是半径为 δ 的球并且对大的 t 有 $e^{\alpha t} |z(0)| > \delta$ 。所以有一些解从任意接近于原点的地方出发而离开 U 。因此（假定引理成立），向量场 f 不以原点为稳定平衡点。

现在证明引理。首先证 (b)：若 $(x, y) = z \in C \cap U$ ，则，

$$\langle f(z), z \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle By, y \rangle + \langle Q(z), z \rangle,$$

故由 (3), (4), (5) 有

$$\langle f(z), z \rangle \geq a|x|^2 - b|y|^2 - \epsilon|z|^2.$$

在 C 中， $|x| \geq |y|$ 且 $|x|^2 \geq \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2) \geq \frac{1}{2}|z|^2$ 。

因此 $\langle f(z), z \rangle \geq \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \epsilon\right)|z|^2$ 。取 $\epsilon > 0$ ，然后选 $\delta > 0$ 使得

$\alpha = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \epsilon > 0$ ，于是 (b) 得证。

为了验证(a),注意到(a)的左端为

$$\langle Ax, x \rangle - \langle By, y \rangle + \langle x, R(x, y) \rangle - \langle y, S(x, y) \rangle,$$

但

$$|\langle x, R(x, y) \rangle - \langle y, S(x, y) \rangle| \leq 2|\langle z, Q(z) \rangle|.$$

我们可以象前面那样继续推导;最后,取 $\delta > 0$ 使得 $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2e > 0$,这就证明了(a),从而引理得证.

在第七章中我们介绍了线性双曲流.其非线性类比是动力系统 $x' = f(x)$ 的双曲平衡点 \bar{x} ;重复地说,这意味着 $Df(\bar{x})$ 的特征值有非零实部.若这些实部都是负的, \bar{x} 自然是一个收点;若它们都是正的,则 \bar{x} 是源点.若两种符号都出现, \bar{x} 就是鞍点.由前面的定理可以看出鞍点是不稳定的.

若 \bar{x} 是动力系统的渐近稳定平衡点,根据定义,存在 \bar{x} 的邻域 N 使得每条从 N 中出发的解曲线都趋于 \bar{x} ,所有趋于 \bar{x} (当 $t \rightarrow \infty$ 时)的解曲线的并称为 \bar{x} 的盆记为 $B(\bar{x})$.

显然,与 N 相遇的任何解曲线都在 $B(\bar{x})$ 中,反之, $B(\bar{x})$ 中任何解曲线必与 N 相遇.从而 $B(\bar{x})$ 是一个开集;因为,由流的连续性,若 x 的轨线与 N 相遇,则任何附近点的轨线也与 N 相遇.

注意,当 \bar{x} 和 \bar{y} 为不同的渐近稳定平衡点时, $B(\bar{x})$ 和 $B(\bar{y})$ 是不相交的.因为如果一条轨线趋向 \bar{x} 就不能又趋向于 \bar{y} .

若一个动力系统表示一个物理系统,在实际上我们可以把 $B(\bar{x})$ 中的状态与 \bar{x} 等同起来,因为 $B(\bar{x})$ 中每个状态经过一段时间以后将如此地接近 \bar{x} 以致和 \bar{x} 难以区分.

对于经常出现的各种动力系统(如第4节的梯度系统),几乎每个状态都在某收点的盆中;而其他状态“未必出现”(它们构成测度为0的集).对于这样的一个系统,收点表示着不同类型的长期性态.

确定一个收点 \bar{x} 的盆往往具有实际的重要性.例如,假定 \bar{x} 表