科學譯叢

——理論及應用力學：第5種——

論鬆散介質的極限平衡

B. B. 索珂洛甫斯基

中國科學院出版

科 學 譯 叢

——理論及應用力學：第5種——

論鬆散介質的極限平衡

В. В. 索珂洛甫斯基 作

林 鴻 蓀 譯

中 國 科 學 院 出 版

1 9 5 4 年8月

論鬆散介質的極限平衡

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

原著者　В. В. Соколовский

翻譯者　林　鸿　蓀

編輯者　中國科學院編譯局

出版者　中　國　科　學　院
北京(7)文津街3號

印刷者　北京新華印刷廠
阜成門外北禮士路

裝訂者　北京源豐裝訂廠
和外 楊梅竹斜街62號

發行者　新　華　書　店

(譯) 54035　1954年8月第一版

(自然) 038　1954年3月第一次印刷

(京) 0001–2,400　開本：787×1092 1/25

字數：63千字　印張：4 4/25

定價：6,000元

內 容 提 要

本書選譯了B.B. 索珂洛甫斯基在近年來所發表有關鬆散介質極限平衡理論方面的五篇論文與報告。索珂洛甫基是在彈性力學、塑性力學方面傑出的研究者。雖然他的理論還有待進一步的發展，並且還需要作大量的實驗工作，但是，他的工作方向是正確的，是科學工作爲共產主義建設服務的範例。本書可供我國工程界工作同志與力學研究工作者參考閱讀。

譯者前言

蘇聯科學家在蘇聯科學院所設偉大共產主義建設工程協助委員會的統一領導下，積極參加蘇聯共產主義建設工程的工作，獲得了重大的成績。在1952年蘇聯共產主義建設工程共使用了共產主義建設協助委員會的八十多種研究成果。蘇聯科學院通訊院士索珂洛甫斯基（В. В. Соколовский）所創造的水力工程建築的若干新的計算方法是重要的成就之一*。

В. В. 索珂洛甫斯基是蘇聯彈性力學、塑性力學傑出的研究工作者，在塑性力學、彈性殼體理論等方面都有重大的貢獻。他在1942年發表了“鬆散介質的靜力學”（該書正在再版的過程中），曾獲得斯大林獎金。在1951年他將計算方法依靠物理的近似加以顯著的簡化，使得鬆散介質極限平衡理論在實際應用上更加具體化。從蘇聯科學院技術科學部門討論中可以看出，這理論雖然有待進一步發展，並且還需要作大量的實驗工作，索珂洛甫斯基的工作方向是正確的，是科學工作爲共產主義建設服務的範例。

現將近年來索珂洛甫斯基在這方面的論文及報告彙集譯出，以備我國工程界及力學研究工作者學習蘇聯的參考。

“土壤的極限平衡理論及其在水工結構計算中的應用”是索珂洛甫斯基在1952年蘇聯科學院技術科學部門一次全體會議

* 見人民日報1953年2月3日第二版

上的報告。在其開始一節中將以前的工作加以概述，其次分別考慮了沒有內摩擦及沒有凝集性土壤的極限平衡問題，其後就引進一種近似方法將原有問題簡化，(將土壤極限平衡問題的解化爲相應的不計重量問題的解及不計凝聚性問題的解之總和)並且進一步考慮了硬化作用的影響。這後一部分乃是索珂洛甫斯基新的貢獻。在"論鬆散介質的極限平衡"論文中提出具內摩擦但無凝集性鬆散介質極限平衡問題並詳盡地討論了一些具體應用。"關於鬆散介質靜力學中的一個近似方法"這一短文的重點在於說明應用上面提到的近似方法的理由。在"地基及斜坡的穩定性"及"擋土牆上的填塞壓力"兩文中對於新提出的近似方法在具體問題上的應用加以發展。

目　録

土壤的極限平衡理論及其在水工結構計算中的應用…… 1
論鬆散介質的極限平衡……………………………………21
關於鬆散介質靜力學中的一個近似方法……………………51
地基及斜坡的穩定性……………………………………56
擋土牆上的填塞壓力……………………………………73

土壤的極限平衡理論及其在水工結構計算中的應用

(蘇聯科學院通訊院士 B.B.索珂洛甫斯基 1952 年 2 月 12 日在蘇聯科學院技術科學部門全體會議上的報告)

我國的龐大水利建築，偉大的共產主義建設是與完成大量的土方工作有關的，而這些工作是建立巨大堤壩和高的擋土牆以及挖掘深的溝渠所必需。因此，提供新的土壤計算方法來保證這些結構的合理設計，在今天就具有特殊巨大的意義。

我們簡短的總結主要是針對土壤的極限平衡理論及其在地基、斜坡、路堤以及擋土牆計算上的應用而作，這些計算在實際中正被廣泛地使用着。

土壤的極限平衡

具有內摩擦及黏力的土壤的極限平衡，可以藉作者以前提出的一般理論之助來加以研究。這理論使我們能够解決許多具有巨大實際意義的問題。具比重 ν、內摩擦角 ρ 及凝聚係數 k 的土壤之平面極限平衡是由平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=\gamma, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0$$

及極限狀態條件

$$\frac{1}{4}(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau^2{}_{xy}=\left[\frac{\sin \rho}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+k\cos \rho\right]^2$$

所描述出來的。

經過變換到變數 σ 及 φ 即能方便地探討這方程組，σ 及 φ 是與應力分量如下地聯系起來的：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\}=\sigma\,(1\pm\sin\rho\cos 2\varphi)-k\operatorname{ctg}\rho,$$

$$\tau_{xy}=\sigma\sin\rho\sin 2\varphi,$$

此處 φ 是最大主應力及 x- 軸之間所作之角。

滑線在土壤極限平衡中極爲重要，這是兩族以一致的角度 $2\mu=\frac{\pi}{2}-\rho$ 相交的曲線。它們與 x- 軸形成角度 $\varphi\pm\mu$。

在考慮下的方程組有兩族特徵線，因而是屬於雙曲型的。這組方程可以變換爲所謂標準方程組

$$\frac{\partial y}{\partial\beta}=\operatorname{tg}(\varphi+\mu)\frac{\partial x}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}+2\sigma\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=\frac{\gamma\cos(\varphi-\mu)}{\cos\rho\cos(\varphi+\mu)}\frac{\partial x}{\partial\beta},$$

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}=\operatorname{tg}(\varphi-\mu)\frac{\partial x}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}-2\sigma\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=-\frac{\gamma\cos(\varphi+\mu)}{\cos\rho\cos(\varphi-\mu)}\frac{\partial x}{\partial\alpha},$$

在其中獨立變數 α 是被認爲在一族特徵線上變動，而 β 是被認爲在另一族特徵線上變動。特徵線具有明顯的物理意義——它們就是滑線。

已提出探討不同的土壤極限平衡問題的一般的解決方法。這些問題可以化爲在特徵線 $\alpha\beta$ 平面上的標準方程組的邊值問題的各種各樣的組合。土壤極限平衡問題的一個特點是：在 xy 平面上的輪廓上存在有角點而且在若干點上還有應力不連續之處。引進具有異點的特殊解就能使我們克服這困難，相當於這些異點在特徵線 $\alpha\beta$ 平面上有整組的特徵線。

下面我考慮一系列在實際上遇到的將比重算計在內的土壤

力學問題：關於基礎地基及堤壩的穩定性問題，關於斜坡的穩定性問題，關於在擋土牆上的壓力問題。

先來考慮地基的穩定性問題。問題是，假使負 y 半軸上均勻地受到法向壓力 $\sigma_x=q$，決定在一定關係

$$-\tau_{xy}=\nu(\sigma_x \operatorname{tg}\rho+k),\quad \nu\leqslant 1$$

下可能加之於正 y- 半軸上的最大應力分量 $\sigma_x=p$（圖 1）

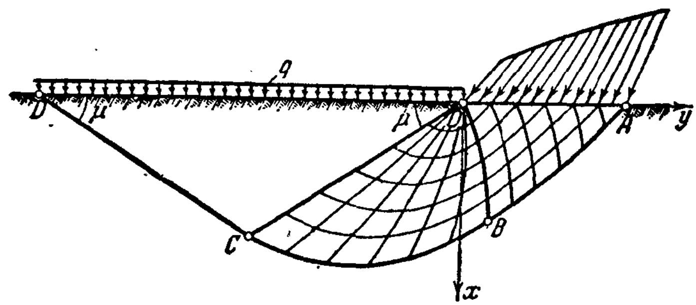

圖　1

可以引進 $\operatorname{tg}\delta=\nu \operatorname{tg}\rho$ 將 ν 代替掉而將上述條件寫作

$$-\tau_{xy}=(\sigma_x+k\operatorname{ctg}\rho)\operatorname{tg}\delta,\quad \delta\leqslant\rho.$$

在三角形 OCD 之內的應力狀態可以用緊縮形式表現出來，而滑線是兩族平行直線；要求 OBC 及 OAB 區域內的應力狀態及滑線網，就必須在輔助面 $\alpha\beta$ 上解決標準方程的邊值問題。在 O 點的應力分量 $\sigma_x=p_0$ 是由下列緊縮形式給出的：

$$p_0+k\operatorname{ctg}\rho=(q+k\operatorname{ctg}\rho)\frac{\cos\delta(\cos\delta+\sqrt{\sin^2\rho-\sin^2\delta})}{1-\sin\rho}\times$$

$$\times\ \exp\left[\left(\pi-\delta-\arcsin\frac{\sin\delta}{\sin\rho}\right)\operatorname{tg}\rho\right]$$

而在特殊情況 $\delta=0$ 下有

$$p_0+k\operatorname{ctg}\rho=(q+k\operatorname{ctg}\rho)\frac{1+\sin\rho}{1-\sin\rho}\exp(\pi\operatorname{tg}\rho)$$

應該注意，當$\gamma=0$時，所求的應力分量$\sigma_x=p$是均匀分佈而且是由上式給出的，即是說$p=p_0$

當$\delta=\rho$，即沿正y半軸有

$$-\tau_{xy}=\sigma_x\operatorname{tg}\rho+k$$

時可以求出最大分量$\sigma_x=p$的簡單表式。於是看出，所求應力分量是按下式給出的：

$$p+k\operatorname{ctg}\rho=(q+k\operatorname{ctg}\rho)\,(1+\sin\rho)\exp\left[\left(\frac{\pi}{2}-\rho\right)\operatorname{tg}\rho\right]+\gamma y\sin\rho\cos\rho.$$

其次考慮斜坡的穩定性問題。問題是，假使在正y半軸上給出了法向壓力$\sigma_x=p$，決定岸身的輪廓（圖 2）。

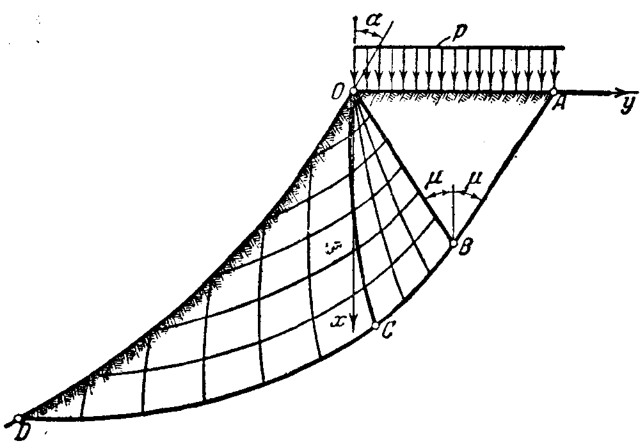

圖　2

在區域 OAB 之內，應力狀態是以緊縮形式給出來的，而滑線是兩族平行直線；要求在區域 OBC 及 OCD 內的應力狀態及滑線網，就必須在特徵線平面中解決標準方程的邊值問題。在

區域 OBC 內解有異點 O。岸身與 x 軸在 O 點所形成的角是以緊縮形式

$$2\alpha=\operatorname{ctg}\rho\ln\left[\left(\frac{p}{k}\operatorname{tg}\rho+1\right)\frac{1-\sin\rho}{1+\sin\rho}\right].$$

我們注意，$\alpha=0$ 的情形相當於壓力

$$p=\frac{2k\cos\rho}{1-\sin\rho},$$

這可被認爲是具有高度

$$h=\frac{2k\cos\rho}{\gamma(1-\sin\rho)}$$

而有垂直直線邊界 $O\,O_1$ 的土壤層的影響。這土壤層（見圖 3 陰影部分）是處於彈性狀態之中，而其下的土壤部分是處於極限狀態之中。

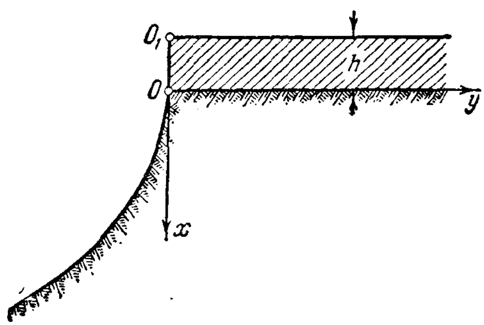

圖 3

在其背界上有摩擦力（以係數 ν 代表）的情況下受擋土牆所限的土壤的極限平衡問題具有很大的意義。

我們只考慮作用於擋土牆上的主動壓力的決定，假定在沿已給的背界上

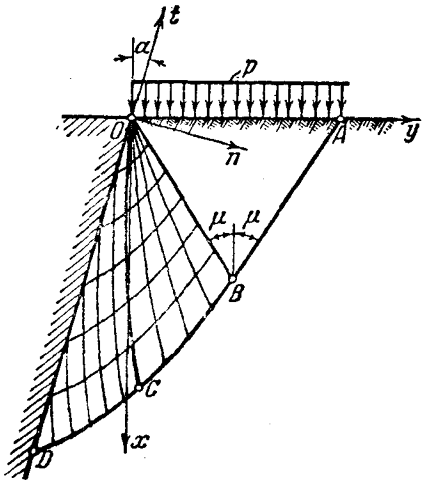

圖 4

$$\tau_{nt}=\nu(\sigma_n \operatorname{tg} \rho+k), \quad \nu \leqslant 1,$$

如果在界限回填的水平直線上有平均分佈的壓力 $\sigma_x=p$ 作用（圖 4）。

可以引進 $\operatorname{tg} \delta=\nu \operatorname{tg} \rho$ 代替掉係數 ν，並將已提出的關係表示爲

$$\tau_{nt}=(\sigma_n+k \operatorname{ctg} \rho) \operatorname{tg} \delta, \quad \delta \leqslant \rho.$$

在區域 OAB 中的應力狀態，正如在以前的問題中一樣，是用緊縮形式給出的，而滑線是兩族平行直線。在區域 OBC 及 OCD 內滑線網及應力狀態的決定化爲在特徵線 $\alpha\beta$ 平面中解標準方程組的邊値問題。一如前例，在區域 OBC 內有異點 O。在擋土牆上的壓力 $\sigma_n=q_0$ 在 O 點由緊縮形式

$$q_0+k \operatorname{ctg} \rho=(p_0+k \operatorname{ctg} \rho) \frac{\cos \delta\left(\cos \delta-\sqrt{\sin^2 \rho-\sin^2 \delta}\right)}{1-\sin \rho} \times$$

$$\times\ \exp\left[-\left(2\alpha-\delta+\arcsin\frac{\sin\delta}{\sin\rho}\right)\mathrm{tg}\,\rho\right]$$

給出。

適才說明的的理論允許我們考慮到各種複雜的因素：土壤的非均匀性及多層性，以及滲流的影響。

已提出了有關各向異性及多層的土壤的極限平衡的新問題，在這土壤中沿水平平面 $x=\text{const}$ 的內摩擦角 $\bar{\rho}$ 及凝聚係數 $\bar{k}$ 是較沿其他方向的摩擦角 ρ 及凝聚係數 k 爲小的

$$\bar{\rho}<\rho,\quad \bar{k}<k.$$

多層土壤的極限狀態條件可用下式表示：

$$\frac{1}{4}(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau^2_{xy}=\left[\frac{\sin\rho}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+k\cos\rho\right]^2;\quad |\tau_{xy}|\leqslant\sigma_x\mathrm{tg}\,\bar{\rho}+\bar{k};$$

$$\frac{1}{4}(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau^2_{xy}=\left[\frac{\sin\rho}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+k\cos\rho\right]^2;\quad |\tau_{xy}|=\sigma_y\mathrm{tg}\,\bar{\rho}+\bar{h}.$$

應用這些條件，可以解決各種不同的多層土壤的極限平衡問題。在考慮這些問題，譬如說，地基的穩定性問題時，必須區分三個區域，在這些區域內極限狀態是由寫出的條件中的第一或第二個所表示出來的。這些區域的邊界有待求出而是在解決問題的過程中求出的，現在只引給出在 O 點的應力 q_0 的緊縮形式（對純鬆散土壤成立，此時 $k=\bar{h}=0$）

$$q_0=p_0\frac{(1-\sin\rho)\,(\cos\bar{\rho}-\sqrt{\sin^2\rho-\sin^2\bar{\rho}})}{(1+\sin\rho)\,(\cos\bar{\rho}+\sqrt{\sin^2\rho-\sin^2\bar{\rho}})}\exp\left[-2\mathrm{tg}\,\rho\arcsin\frac{\sin\bar{\rho}}{\sin\rho}\right]$$

這公式在 $\bar{\rho}=\rho$ 時化爲已前給出的各向同性土壤的相應公式。

在解決上述問題中要求特徵線網結點坐標數值及在該處應

力分量，最方便是用使我們能在特徵線網的有限個結點上决定未知函數的近似方法。

在完成數值計算時應引進無因次量

$$X=\frac{\gamma}{k}x,\ Y=\frac{\gamma}{k}y,\ s=\frac{\sigma}{k},\ s_x=\frac{\sigma_x}{k},\ s_y=\frac{\sigma_y}{k},\ t_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{k},$$

這使有可能將上面的方程用無因次的方程代替。它們不包括比重 γ 及黏附係數 k，而只依存於內摩擦角，這使我們能按最合理的方式進行計算。

這裏應當提起最近巴諾夫（Д. Ю. Панов）在改善雙曲型方程系的近似解法上的研究，這些研究簡化了相應的計算。法勒珂維奇（С. В. Фалькович）也提出一系列重要的簡化，他對不同的內摩擦角 ρ 情况下斜坡的輪廓進行了計算。

純凝聚及純鬆散土壤的極限平衡

純凝聚及純鬆散土壤，即沒有內摩擦或沒有凝聚性的土壤的極限平衡具有一些特點，使我們能得出較之一般理論中能得到的更爲簡單的形式。

具比重 γ 及凝聚係數 k 的平面極限平衡是由平衡微分方程

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=\gamma,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0$$

及極限狀態條件

$$\frac{1}{4}(\sigma_x-\partial_y)^2+\tau^2{}_{xy}=k^2$$

所描寫出來的。

最方便是將這組方程經過轉換到新的變數 χ 及 φ 而加以研究，χ 及 φ 是由如

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\}=k\,(2\chi\pm\cos 2\varphi)+\gamma\,x;\quad \tau_{xy}=k\sin 2\varphi.$$

那樣與應力分量聯系起來的，此處φ是最大主法應力及x-軸所作的角。

得出方程組和以前一樣具有兩族特徵線且屬於雙曲型。這組方程可以變換爲標準方程組：

$$\frac{\partial y}{\partial\eta}=\mathrm{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial x}{\partial\eta},\quad \frac{\partial y}{\partial\xi}=\mathrm{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial x}{\partial\xi},$$

在其中我們取量$\xi=\chi+\varphi$及$\eta=\chi-\varphi$作爲獨立變數。除此之外尙有包含任意函數$\Phi(\varphi)$及$\psi(\varphi)$的積分如

$$\chi-\varphi=\mathrm{const},\quad y=x\,\mathrm{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\Phi(\varphi)$$

或

$$\chi+\varphi=\mathrm{const},\quad y=x\,\mathrm{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+\Psi(\varphi)$$

形狀，使我們能以緊縮形式得出許多問題的解。這裏，特徵線也如前例一樣具有物理意義：它們是滑線。

現以地基的穩定性問題來說明此點。和以前一樣，這問題在於，假使負y軸受到均勻分佈的法向壓力$\sigma_y=q$，求在一定切向分量$\tau_{xy}=-t$的條件下可能加之於正y軸的最大分量$\sigma_x=p$（圖5）。

三角形OAB及OCD內的應力狀態是以緊縮形式得出的，而每個三角形之中的特徵線都是兩族平行直線；在扇形域OBC中應力狀態也有簡單的形狀，而滑線是一束經過O點的直線及一族以同點O爲中心的同心圓。所求分量$\sigma_x=p$是常數而是以緊縮形式

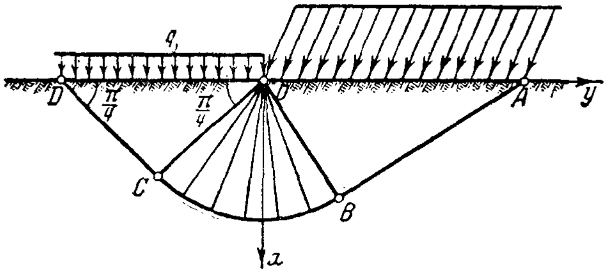

圖　5

$$p=q+k\left(\pi+1-\arc\sin\frac{t}{k}+\sqrt{1-\left(\frac{t}{k}\right)^2}\right)$$

給出。

現再提出斜坡的穩定性問題，即當正 y 軸上受到法向壓力 $\sigma_x=p$ 時，决定岸身輪廓的形狀(圖 6)。

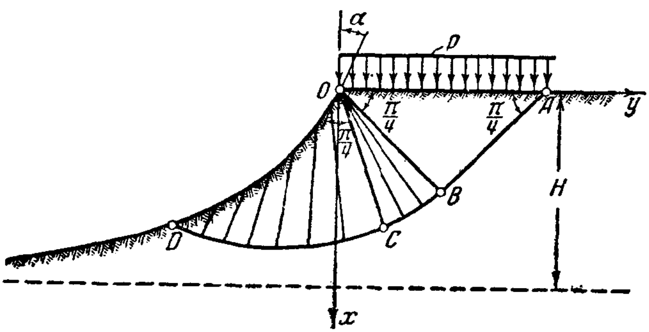

圖　6

在三角形 OAB 內的應力狀態是以緊縮形式給出的，而滑線是兩正交族平行直線；在扇形 OBC 及巨域 OCD 內的應力狀態也可用緊縮形式得出，而其中一族滑線是由直線組成的。所求的斜坡輪廓是由方程