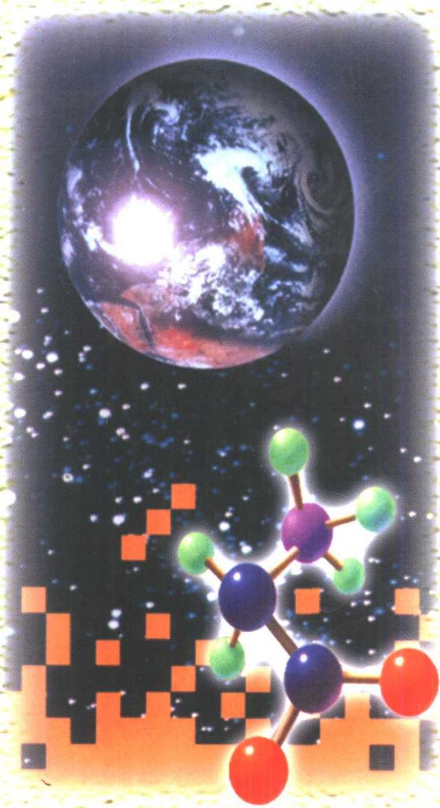
中国科学院研究生教学丛书



李群

孟道骥　白承铭　著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书是中国科学院研究生教材，主要讲述李群的基本理论、紧李群的结构、紧李群的自同构群与表示、紧半单李代数的对合自同构、实半单李代数的分类及 Riemann 对称空间等内容. 书中还备有大量的例子，供初学者理解书中的抽象理论.

本书适合高等院校数学专业高年级学生、研究生作为教学用书，也可供数学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

李群/孟道骥，白承铭著. —北京：科学出版社，2003
(中国科学院研究生教学丛书)

ISBN 7-03-011346-2

Ⅰ.李… Ⅱ.①孟… ②白… Ⅲ.李群-研究生-教材 Ⅳ.O152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 023535 号

责任编辑：陈玉琢　吕　虹/责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生/封面设计：槐寿明

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2003年8月第 一 版　开本：850×1168 1/32
2003年8月第一次印刷　印张：12 1/8
印数：1—2 500　字数：314 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

《中国科学院研究生教学丛书》序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了．相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用．

21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量．世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争．而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量．我国要想在21世纪顺利地实施"科教兴国"和"可持续发展"战略，实现小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理，有能力参与国际竞争与合作的科技大军，这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务．

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多，科研条件好，科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生．当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好"三个基地"的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才．

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务．研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作．由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展．为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版．希望通过数年努力，出版一套面向 21 世纪科技发展，体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书．本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿．这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书．

“桃李不言，下自成蹊．”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把他们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献．

路甬祥

序

从古典数学到现代数学有两个极重要的转折. 一是牛顿,莱布尼兹创建微积分. 将微积分用于几何则有微分几何的发展. 解决含有未知函数的微分，或积分的方程就发展了微分方程，或积分方程的理论. 另一是伽罗瓦在解决高次方程的根式解的问题时，考虑了根的置换. 若尔当系统地论述了群论和伽罗瓦理论. 随着群论的建立,发展了抽象代数理论. 这些构成了 20 世纪发展的支柱，促进了 20 世纪数学的飞跃发展.

挪威数学家李(Marius Shophus Lie, 1842～1899)将微积分与群论结合起来,长期从事连续变换群及其不变量的研究，是连续变换群理论的创始人. 这种理论后来称为“李群理论”. 李群在微分几何、微分方程中都有重要的应用. 特别 Cartan. É 将李群用于 Riemann 对称空间的研究，取得了非常突出的成就. 李群所产生的影响还包括代数学、物理学、化学等等，发展异常迅速,从名称的变化就可知一二. 20 世纪初称为“李群理论”，中期称为“李群、李代数理论”,后期称为“李理论”.

陈省身和华罗庚在西南联合大学任教时，举办了李群讨论班. 正在西南联合大学学习的严志达，王宪钟等都参加了这个讨论班. 这是我国进行李群的学习与研究的开始. 几十年过去了，我国在李理论的研究及人才培养都有长足的发展. 但是，与李理论在数学中的地位相比，与我国在世界数学界的地位相比这种发展还是远远不够的. 我国学者出版的此领域的著作(专著与教材)太少，开设此领域课程的学校也不多. 为了促进李理论在我国的发展，开设课程，出版教材是很重要的.

20 世纪 60 年代中，作者师从段学复、聂灵沼教授学习李群、李代数. 由于人所共知的原因，学习被迫中断. 1979 年作者又跟

随严志达教授从事李理论的学习、教学与研究.此间，中国科学院数学所的许以超研究员常来南开大学指导,对作者帮助很大.作者到南开大学后的 20 多年中多次讲授李群、李代数的课程，积累了一些资料,整理出版教材,这对于我国李理论的教学多少会有一些助益.

本书分成 7 章. 第一章讲述拓扑群与回顾微分几何的基本事实.这些是讲述李群的准备知识，有的李群教材是不涉及的，我们添上此部分内容是为了方便读者.第二章讲述李群的基本理论，包括李群的定义,李群的左不变向量场(即李群的李代数)、左不变微分形式、左不变联络等几何性质,重要的线性群，李群基本定理与逆定理，单参数子群与子群,李群的通用覆盖群，旋量群等等. 这些是本书最基本，也是最重要的内容.第三章讲述紧李群的结构，包括不变内积、Cartan 子代数、紧单李代数的分类等.第四章讲述紧李群的自同构群与表示，表示是指有限维的复表示与实表示. 第五章讲述紧半单李代数的对合自同构，紧半单李代数的对合自同构是实半单李代数分类的基础.这里主要介绍紧单李代数对合自同构的严志达标准形，这是严志达很有特色的工作.第六章讲述实半单李代数的分类,除介绍严志达紧单李代数对合自同构的严志达标准形分类外，还介绍另一类分类(Satake 分类)及这两种分类的关系，这也是严志达出色工作的一部分.第七章讲述 Riemann 对称空间，Riemann 对称空间包含了许多常见的几何空间,这也是 Cartan. É 的重要成果之一. 李群在研究 Riemann 对称空间的巨大作用,推动了李理论的发展. 在书中有大量的例子，这些例子不仅有助于对抽象理论的理解,同时这些例子本身也是很重要的. 相信读者已经具备了解这些例子所需要的线性代数的知识，书中就不再列出.

本书部分内容由白承铭执笔,白承铭先生从博士后流动站出站后在南开数学所工作，曾开设有限群表示，紧李群的表示等课程.

虞言林先生和张知学先生给予作者很大帮助和支持，当然还

有许多同事、同学,如史毅茜等也为此书作了许多工作.作者在此向他们表示由衷的感谢.

本书得到中国科学院研究生教材出版基金,国家自然科学基金(19971044,102710176)和南开大学的资助与支持. 作者表示衷心的谢意.

作者还要感谢使用本书的读者,特别欢迎给本书提出宝贵的意见,使本书得以提高和完善.

孟道骥

2002年1月

目　　录

第一章 拓扑群与微分几何

本章应该看成是李群理论的准备工作. 拓扑群,特别是微分几何都是数学理论的独立分支和重要组成部分. 它们与李群都有密切关系. 我们这里只是介绍与李群有关的内容,特别是微分几何部分,只是叙述有关的结果,而不证明. 因为只有另写一本书,才能把证明写完.

1.1 拓 扑 群

定义 1.1.1 **拓扑群**是具有下述性质的集合 G:

1) G 是一个群;

2) G 是 Hausdorff 空间;

3) $G\times G$ 到 G 的映射 $(x,y)\to xy^{-1}$ 连续.

性质 3)称为 G 的群结构与拓扑结构相容. 不难证明也可以换成下面的

3′) $(x,y)\to xy$, $x\to x^{-1}$ 分别是 $G\times G$ 到 G, G 到 G 的连续映射.

定义 1.1.2 设 G 是一个拓扑群,对任一 $g\in G$ 称 G 到 G 的映射

$$L_g: x\to gx,\quad \forall x\in G,$$
$$R_g: x\to xg,\quad \forall x\in G,$$

分别为 G 的**左平移**,**右平移**.

显然下面四个性质成立.

1. $(L_g)^{-1}=L_{g^{-1}}$, $(R_g)^{-1}=R_{g^{-1}}$.

2. L_g, R_g 以及映射 $x\to x^{-1}$ 均是 G 的自同胚映射.

3. $\mathrm{ad}g=L_gR_{g^{-1}}$ 也是 G 的自同胚映射,且 $\forall x\in G$, $\mathrm{ad}g(x)$

$= gxg^{-1}$.

4. 对任何自然数 n,映射

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to x_1 x_2 \cdots x_n$$

是 $\underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n个}$ 到 G 的连续映射.

例 1 n 维 Euclid 空间(酉空间) $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ 按向量加法构成拓扑群.

例 2 通常的群按离散拓扑构成拓扑群.

例 3 有限群作为拓扑群,其拓扑必为离散拓扑.

因此,以后讨论拓扑群主要讨论无限拓扑群.

设 G 是一个群, $V, V_1, V_2 \subset G$. 约定下面符号:

$$V^{-1} = \{v^{-1} \mid v \in V\},$$

$$V_1 V_2 = \{v_1 v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\},$$

$$V^n = \underbrace{VV \cdots V}_{n个}.$$

引理 1.1.1 设 e 为拓扑群 G 的单位元,则存在 e 的基本邻域组 $\mathscr{U}$,它适合下面条件:

1) $V_1, V_2 \in \mathscr{U}$,则 $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{U}$;

2) $V \in \mathscr{U}$,而 $W \supset V$,则 $W \in \mathscr{U}$;

3) $\bigcap\limits_{V \in \mathscr{U}} V = \{e\}$;

4) $\forall V \in \mathscr{U}, \exists V_1 \in \mathscr{U}$,使得 $V_1 V_1^{-1} \subseteq V$;

5) $\forall V \in \mathscr{U}, a \in G$,则 $aVa^{-1} \in \mathscr{U}$.

反之,给定一个群 G 及一个包含 e 的集族 $\mathscr{U}$ 满足上述五个条件,则 G 可惟一地定义为拓扑群,使 $\mathscr{U}$ 为 e 的基本邻域组.

证 由于 G 是 Hausdorff 空间, $\mathscr{U}$ 是 e 的基本邻域组,故 1)—3)成立. 又 $(x, y) \to xy^{-1}$ 在 (e, e) 处连续,故 4)成立. 又 ad$a$ 连续,故 5)成立.

反之,设 $\mathscr{U}$ 是 G 中含 e 的集族,且满足 1)—5). 令

$$\mathscr{O} = \{O \subset G \mid 若 x \in O, 则有 V \in \mathscr{U} 使 Vx \subseteq O\}.$$

1. $\mathscr{O}$ 满足开集公理. $\varnothing, G \in \mathscr{O}$. 对任意指标 α, $O_\alpha \in \mathscr{O}$,有 $\bigcup\limits_\alpha O_\alpha$

$\in \mathscr{O}$. 又若 $O_1, O_2 \in \mathscr{O}$, 且 $x \in O_1 \cap O_2$, 于是有 $V_1, V_2 \in \mathscr{U}$ 使得 $V_1 x \subseteq O_1$, $V_2 x \subseteq O_2$. 于是 $(V_1 \cap V_2)x = V_1 x \cap V_2 x \subseteq O_1 \cap O_2$, 而 $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{U}$, 故 $O_1 \cap O_2 \in \mathscr{O}$. 于是 $\mathscr{O}$ 可定义为 G 的开集族.

2. 在上述拓扑下, e 的基本邻域组 $\mathscr{W} = \mathscr{U}$. 事实上, 设 $W \in \mathscr{W}$, 故有 $O \in \mathscr{O}$, 使得 $e \in O \subseteq W$. 故有 $V \in \mathscr{U}$, 使得 $Ve \subset O$. 故 $e \in V = Ve \subseteq O \subseteq W$. 因而由 2) 知 $W \in \mathscr{U}$, 即 $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{U}$. 反之, 设 $V \in \mathscr{U}$, 令 $W = \{x \in V \mid 有 V_1 \in \mathscr{U} 使得 V_1 x \subseteq V\}$. 于是 $e \in W \subseteq V$. 若能证明 $W \in \mathscr{O}$, 则知 $V (\supseteq W)$ 为 e 的邻域. 故 $V \in \mathscr{W}$. 因而 $\mathscr{U} = \mathscr{W}$.

为证 $W \in \mathscr{O}$, 先证对任何 $V \in \mathscr{U}$, 有 $S \in \mathscr{U}$ 使得 $SS \subset V$. 因为对 $V \in \mathscr{U}$, 有 $V_1 \in \mathscr{U}$ 使得 $V_1 V_1^{-1} \subseteq V$, 故 $V_1 \subseteq V^{-1}$. 因而 $V^{-1} \in \mathscr{U}$. 同样, $V_1^{-1} \in \mathscr{U}$. 令 $S = V_1 \cap V_1^{-1}$, 于是 $S \in \mathscr{U}$, 而 $SS \subseteq V_1 V_1^{-1} \subseteq V$. 现在回到证明 $W \in \mathscr{O}$. 设 $a \in W$. 于是有 $V_1 \in \mathscr{U}$ 使得 $V_1 a \subseteq V$, 又有 $V_2 \in \mathscr{U}$, 使得 $V_2 V_2 \subseteq V_1$. 从而有 $V_2 V_2 a \subseteq V_1 a \subseteq V$, 即对任何 $b \in V_2 a$, 有 $V_2 b \subseteq V$. 故 $b \in W$. 所以 $V_2 a \subseteq W$, 故 $W \in \mathscr{O}$.

3. 此拓扑和群结构相容.

首先, 由 4) 知 $(x, y) \to xy^{-1}$ 在 (e, e) 处连续.

其次, 对 $R_g: O \to Og$, 若 Og 是开集, 则 $\forall a \in O, ag \in Og$. 于是有 $V \in \mathscr{U}$, 使得 $Vag \subseteq Og$, 于是 $Va \subseteq O$. 故 O 是开集. 因而 R_g 是 G 到 G 上的连续映射.

$L_g: O \to gO$, 若 gO 为开集, $x \in O$, 则 $gx \in gO$. 故有 $V \in \mathscr{U}$, 使得 $Vgx \subseteq gO$, 故 $(g^{-1} Vg)x \subseteq O$, 由 5) $g^{-1} Vg \in \mathscr{U}$. 故 O 是开集. 因而 L_g 是 G 到 G 上的连续映射.

最后, $\forall a, b \in G$, 令 $x = au$, $y = bv$. 则由 $(u, v) \to uv^{-1}$ 在 (e, e) 处连续, 知 $(x, y) \to (a^{-1}x, b^{-1}y) = (u, v) \to uv^{-1} \to auv^{-1}b^{-1} = xy^{-1}$ 在 (a, b) 处连续. 即此拓扑与群结构相容.

4. 对此拓扑 G 为 Hausdorff 空间. 设 $a, b \in G$, $a \neq b$. 于是 $ab^{-1} \neq e$, 由 3) 有 $V \in \mathscr{U}$, 使得 $ab^{-1} \notin V$. 又对 V 有 $V_1 \in \mathscr{U}$, 使 $V_1 V_1^{-1} \subset U$. 前面已证 $V_1^{-1} \in \mathscr{U}$, $S = V_1 \cap V_1^{-1} \in \mathscr{U}$, 因而 $S^{-1}S \subset$

V.则 $Sa\cap Sb=\varnothing$,不然有 $s_1,s_2\in S$,使得 $s_1a=s_2b$,于是 $ab^{-1}=s_1^{-1}s_2\in S^{-1}S\subset V$,矛盾.故 G 对此拓扑为 Hausdorff 空间.

5. 由于 $\mathscr{U}$ 取定后,G 的拓扑完全定了,故拓扑群 G 的拓扑是惟一的. □

习题 1.1

1. 设 τ 为映射 $x\to x^{-1}$.求证 $R_a=\tau L_{a^{-1}}\tau$.

2. 设 G 是一个群,又是一个拓扑空间,则下述条件等价:

(1) G 的群结构与拓扑结构相容.

(2) $\forall g\in G,L_g,R_g$ 连续,且$(x,y)\to xy^{-1}$在(e,e)处连续.

(3) $\forall g\in G,L_g,\tau$ 连续,且$(x,y)\to xy^{-1}$在(e,e)处连续.

(4) $\forall g\in G,R_g,\tau$ 连续,且$(x,y)\to xy^{-1}$在(e,e)处连续.

3. 设 G 是一个群,又是一个拓扑空间,且群结构与拓扑结构相容,则 G 是拓扑群的充分必要条件为$\{e\}$是闭集.

4. 试证拓扑群是正则空间.

1.2 拓扑群的子群与同态映射

设 G 是一个拓扑群,H 是一个子群,$\mathscr{O}$ 是 G 的开集族.则 H 的子集族 $\mathscr{O}_H=\{O\cap H\mid O\in\mathscr{O}\}$满足开集公理.于是在 H 中可引进拓扑,称为拓扑群 G 在 H 上的诱导拓扑.易证对此拓扑,H 为拓扑群.以后不作声明,均将 H 理解为这样的拓扑群.

定理 1.2.1 设 H 是拓扑群 G 的任一子群.则在左陪集空间 G/H 中可引进惟一的拓扑,使得

1) G 到 G/H 的自然映射 $\pi(g)=gH(g\in G)$是连续的.

2) 若 f 是 G/H 到任一拓扑空间 T 的映射,且 $f\pi$ 连续,则 f 连续.

又若 H 是 G 的闭子群,则对上述拓扑 G/H 是 Hausdorff 空间.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f\pi"'] & G/H \arrow[dl, "f"] \\ T & \end{tikzcd}$$

证 在 G/H 中定义拓扑为：G/H 中子集 K 称为开集，如果 $\pi^{-1}(K)$ 为 G 的开集. 由于

$$\bigcup_\alpha \pi^{-1}(K_\alpha) = \pi^{-1}(\bigcup_\alpha K_\alpha),$$

$$\bigcap_\alpha \pi^{-1}(K_\alpha) = \pi^{-1}(\bigcap_\alpha K_\alpha),$$

因而这样定义的开集满足开集公理. 又若 K 为 G/K 的开集，则 $\pi^{-1}(K)$ 为 G 的开集，故 π 连续.

设 f 是 G/H 到拓扑空间 T 的映射，且 $f\pi$ 连续，即对 T 中任一开集 O，$(f\pi)^{-1}(O)$ 是 G 的开集，即 $\pi^{-1}(f^{-1}(O))$ 是 G 的开集. 因此 $f^{-1}(O)$ 是 G/H 的开集. 故 f 连续.

若 G/H 上有两种拓扑 $\mathscr{T},\mathscr{T}'$ 均满足 1)，2). 考虑 G/H 的恒等映射 id. 于是由 $\pi\mathrm{id}=\pi$ 连续，知 id 连续，$\mathrm{id}^{-1}=\mathrm{id}$ 亦连续. 故 $\mathscr{T},\mathscr{T}'$ 相同. 即 G/H 上满足 1)，2) 的拓扑是惟一的.

又若 H 是 G 的闭子群. 设 $x, y\in G$，$xH\neq yH$. 于是 $x\notin yH$. 由 H 闭，知 yH 亦闭，于是有 $U\in\mathscr{U}$，使得 $Ux\cap yH=\varnothing$. 于是有 $W\in\mathscr{U}$，使得 $W^{-1}W\subset U$. 若 $WxH\cap WyH\neq\varnothing$，则有 $w_1, w_2\in W$，$h_1, h_2\in H$ 使得 $w_1xh_1 = w_2yh_2$. 故 $w_2^{-1}w_1x = yh_2h_1^{-1}\in yH$. 但是，$W^{-1}Wx\subset Ux$，矛盾. 故 $WxH\cap WyH=\varnothing$. 因而，$\pi(WxH)\cap\pi(WyH)=\varnothing$. 而 $\pi(WxH)$，$\pi(WyH)$ 为 G/H 的开集，故 G/H 是 Hausdorff 空间. □

称 G/H 的这种拓扑为 G 诱导的拓扑. G/H 也称为商空间. 不作声明，G/H 上的拓扑均指诱导拓扑.

推论 G 到 G/H 的自然映射 π 是开映射.

事实上，设 V 为 G 中一开集，则由

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = VH = \bigcup_{h\in H} Vh$$

知 $\pi^{-1}(\pi(V))$ 是 G 的开集，于是，$\pi(V)$ 是 G/H 的开集. 故 π 是

开映射. □

定理 1.2.2 设 N 是拓扑群 G 的正规子群,则 G 在 G/N 上诱导的拓扑结构与群结构相容. 又若 N 是闭正规子群,则 G/N 是拓扑群.

证 设 π 是 G 到 G/N 的自然映射, W 是 $\pi(a)\pi(b)^{-1}=\pi(ab^{-1})$ 的一个邻域, $\pi^{-1}(W)$ 是 ab^{-1} 的邻域. 故有 a,b 的邻域 U_1,U_2,使得 $U_1U_2^{-1}\subseteq\pi^{-1}(W)$. 由于 π 是开映射,故 $\pi(U_1)$, $\pi(U_2)$ 为 $\pi(a)$, $\pi(b)$ 的邻域,且

$$\pi(U_1)\pi(U_2)^{-1}=\pi(U_1U_2^{-1})\subseteq\pi(\pi^{-1}(W))=W,$$

即映射 $(\pi(a),\pi(b))\rightarrow\pi(a)\pi(b)^{-1}$ 是 $G/N\times G/N$ 到 G/N 的连续映射,即 G/N 的拓扑结构与群结构相容.

又 N 闭时, G/N 为 Hausdorff 空间,故 G/N 为拓扑群. □

今后,我们也将拓扑群 G/N 称为拓扑群 G 对于闭正规子群 N 的**商群**.

定义 1.2.1 若拓扑群 G_1 到拓扑群 G_2 内的群同态 φ,又是拓扑空间的连续映射,则称 φ 为**同态映射**. 若 φ 是群同构,又是同胚映射,则称 φ 为**同构映射**. 上述两种情形分别简称**同态**, **同构**.

定理 1.2.3 设 φ 是拓扑群 G_1 到拓扑群 G_2 内的开同态,则同态核 $H_1=\varphi^{-1}(e_2)$ 为 G_1 的闭正规子群,而且有商群 G_1/H_1 到 $\varphi(G_1)$ 上的同构 $\tilde{\varphi}$ 使得 $\varphi=\tilde{\varphi}\pi$,其中 π 为 G_1 到 G_1/H_1 上的自然映射. 换言之,下图是交换图.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G_2 \\
G_1/H_1 \arrow[ur, dashed, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

证 由于 φ 连续,故 $H_1=\varphi^{-1}(e_2)$ 是 G_1 的闭集. 又由群论知, H_1 为 G_1 的正规子群,而且 $g_1\in G_1$, $\tilde{\varphi}(\pi(g_1))=\varphi(g_1)$ 为 G/H_1 到 $\varphi(G_1)(\subseteq G_2)$ 的群同构.

因此, H_1 为 G_1 的闭正规子群, G_1/H_1 为拓扑群, $\tilde{\varphi}\pi=\varphi$.