研究生数学教学系列（工科类） 8

应用泛函分析

许天周 编著

GM

科学出版社

研究生数学教学系列（工科类）

应用泛函分析

许天周 编著

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书是为工科研究生学习“应用泛函分析”课程而编写的教材. 全书共分八章,内容包括:实分析基础、距离空间、赋范线性空间与 Banach 空间、内积空间与 Hilbert 空间、线性算子的一般理论、谱理论、Banach 空间上的微积分、线性算子半群. 本书着力于说明有限维和无限维分析学的本质差别,尽量用范例来说明各种抽象概念和定理,使读者能了解在无限维空间中处理问题的基本思想、理论和方法,特别是紧性、自伴性、压缩性等在无限维分析学中的重要作用. 书后配有相当数量的习题与提示,为读者掌握泛函分析方法提供必要的训练.

本书内容丰富,深入浅出,利于实用和读者自学,可以作为高等院校理工科本科高年级学生和研究生的教材或教学参考书,也可以供对泛函分析有兴趣的科研、工程技术人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/许天周编著. —北京:科学出版社,2002.8
(研究生数学教学系列(工科类))
ISBN 7-03-010485-4

Ⅰ.应… Ⅱ.许… Ⅲ.泛函分析-研究生-教材 Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 042194 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2002年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2002年8月第一次印刷 印张:19 3/4
印数:1—3 000 字数:329 000

定价: 29.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

序　言

随着自然科学、工程技术、特别是计算机科学技术的发展，泛函分析已经日益渗透到工程和数学的许多分支，因而它在力学、物理学、化学工程、控制论和信号处理等许多学科中都起着日益重要的作用，因此，许多大学已把它列为工科研究生必修课程. 本书是根据作者为工科研究生讲授应用泛函分析课程的讲义基础上写成，它可以作为泛函分析的入门教材，对于工科研究生进一步学习泛函分析及其应用和近代数学的其他分支提供必要的基础.

泛函分析有着丰富的理论成果，本书只选取最基本的及较常用的内容. 考虑到工科研究生，大多数仅有工科大学的高等数学基础并且以工程应用为主，因此书中补充了实分析的一些基础知识，并且力图采取比较容易接受的方式来讲述，省略了一些结论的证明过程，直接使用其结果. 尽量用范例来说明各种抽象概念和定理，使读者能够了解在无限维空间中处理问题的基本思想、理论和方法，特别是紧性、自伴性、压缩性等在无限维分析学中的重要作用. 书后配有相当数量的习题与提示，为读者掌握泛函分析方法提供必要的训练.

作者多次讲授应用泛函分析课程，本书在原讲义的基础上修改而成. 在编写过程中，得到了各级领导的关怀与支持. 本书的出版也是在同仁们的鼓励与支持下才得以实现的，特别是恩师王声望先生，是他引导我一直注意泛函分析的应用，他对本书内容的选材和编写提出了许多宝贵意见. 同时，科学出版社吕虹编审也为本书的出版付出了艰辛的劳动. 借本书出版之际，对他们一并表示感谢. 由于编者的水平所限，本书还会存在错误与不妥之处，敬请广大读者批评指正.

作　者

2001 年 11 月

记号与约定

$\mathbf{Q}$: 有理数域; $\mathbf{Z}$: 整数集; $\mathbf{Z}_+ = \{n \in \mathbf{Z}: \ n \geq 0\}$. $\mathbf{N}$: 自然数集; $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$: 非负实数.

$\mathbf{C}$: 复数域; $\mathbf{R}$: 实数域; $\mathbf{F}$: 实数域或复数域.

$\mathbf{F}^n$: n 维欧几里得空间.

$\mathrm{Im}\lambda$: λ 的虚部.

$\mathrm{Re}\lambda$: λ 的实部.

$\mathrm{sgn}\lambda$: λ 的符号函数.

$x \in A$ 与 $x \notin A$ 分别表示元素 x 属于集合 A 与不属于集合 A.

$A \subset B$: 集合 A 是集合 B 的子集.

$A = B$: 集合 A 等于集合 B.

$A \backslash B = A - B$: 集合 A 与集合 B 的差集.

$b/a := \dfrac{b}{a}$: 数 b 除以数 a.

$A \cup B$: 集合 A 与 B 的并.

$A \cap B$: 集合 A 与 B 的交.

$\prod\limits_{k=1}^{n} X_k = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n$, $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} X_k = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$.

$\exists$ 与 $\forall$: 分别表示存在与对于任意的.

$:=$ 或 $\stackrel{\triangle}{=}$: 定义为.

χ_A: 集合 A 的特征函数.

A^c: 集合 A 的补集.

$\emptyset$: 空集.

$P \Rightarrow Q$: 如果 P 成立, 则 Q 也成立.

m: 勒贝格测度.

$\sup A$: 集合 A 的上确界.

$\inf A$: 集合 A 的下确界.

$\max A$: 集合 A 的最大值.

$\min A$: 集合 A 的最小值.

A': 集合 A 的导集.

$\overline{A}$: 集合 A 的闭包.

$A^{\perp}$: 集合 A 的正交补.

$B(a,r)$: 以 a 为中心以 r 为半径的开球.

$\overline{B}(a,r)$: 以 a 为中心以 r 为半径的闭球.

$S(a,r)$: 以 a 为中心以 r 为半径的球面.

$d(x,y)$: 点 x 与点 y 之间的距离.

$d(x,A)$: 点 x 与集合 A 之间的距离.

$d(A,B)$: 集合 A 与集合 B 之间的距离.

$d(A)$: 集合 A 的直径.

$\mathrm{dim}X$: 空间 X 的维数.

s: 一切数列构成的空间.

$l^p\,(1 \le p < +\infty)$: p 次幂可和数列空间.

l^∞: 有界数列空间.

c: 收敛数列空间.

c_0: 收敛于 0 的数列空间.

$L^p\,(1 \le p < +\infty)$: p 次幂可积函数空间.

L^∞: 几乎有界可测函数空间.

$C^k([a,b])$: $[a,b]$ 上具有直到 k 阶连续导数的函数空间.

$V_a^b(f,\Delta)$: f 关于分划 Δ 的变差.

$V_a^b(f)$: f 的全变差.

$\exp(t) = \mathrm{e}^t$.

I_X: 单位算子, 恒等算子.

$\|\cdot\|$: 范数.

$\|\cdot\|_p$: $l_p\,(L_p)$ 范数.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$: 内积.

数零, 零向量, 零算子, 零泛函等都记为 0 或 θ.

$A + B = \{a + b:\quad a \in A,\quad b \in B\}$.

$x + A = \{x + a:\quad a \in A\}$.

$B(X,Y)$: 赋范线性空间 X 上到赋范线性空间 Y 的有界线性算子全体; $B(X)=B(X,X)$.

$F(X,Y)$: 赋范线性空间 X 上到赋范线性空间 Y 的 Fredholm 算子全体; $F(X)=F(X,X)$.

$K(X,Y)$: 赋范线性空间 X 上到赋范线性空间 Y 的紧算子全体; $K(X)=K(X,X)$.

$FR(X,Y)$: 赋范线性空间 X 上到赋范线性空间 Y 的有限秩算子 (算子值域为有限维) 全体; $FR(X)=FR(X,X)$.

$B_2(X,Y)$: Hilbert 空间 X 上到 Hilbert 空间 Y 的 Hilbert-Schmidt 算子全体; $B_2(X)=B_2(X,X)$.

X^*: 空间 X 的对偶空间.

$\mathrm{span}(A)$: 集合 A 生成的子空间.

$\overline{\mathrm{span}(A)}$: 集合 A 生成的闭子空间.

$\ker(T)$: 算子 T 的零空间.

$D(T)$: 算子 T 的定义域.

$T(A)=\{Tx:\ x\in A\cap D(T)\}$.

$R(T)$: 算子 T 的值域.

T^*: 算子 T 的对偶算子或伴随算子.

$\alpha(T):=\dim(\ker(T))$ 、 $\beta(T):=\dim(Y/R(T))$

$R_\lambda=R(\lambda;T)=(\lambda I-T)^{-1}$: 算子 T 的预解式.

$r_\sigma(T)$: 算子 T 的谱半径.

$\rho(T)$: 算子 T 的预解集.

$\sigma(T)$: 算子 T 的谱.

$\sigma_p(T)$: 算子 T 的点谱.

$\sigma_c(T)$: 算子 T 的连续谱.

$\sigma_r(T)$: 算子 T 的剩余谱.

$\mathrm{ind}(T)$: Fredholm 算子 T 的指标.

$\mathrm{D}f(x_0,h)$: 算子 f 在点 x_0 沿着方向 h 的 G 微分.

$\mathrm{D}f(x_0)$: 算子 f 在点 x_0 的 G 导算子.

$\mathrm{d}f(x_0,h)=\mathrm{d}f(x_0)h$: 算子 f 在点 x_0 沿着方向 h 的一阶 F 微分.

$\mathrm{d}f(x_0)$ 或 $f'(x_0)$: 算子 f 在点 x_0 的一阶 F 导算子.

$f^{(n)}(x_0)$: 算子 f 在点 x_0 的 n 阶 F 导算子.

$C^k(U,Y)$: 由 U 上到 Y 的具有 k 阶连续 F 导算子的算子全体构成的集合.

目 录

第一章 实分析基础

§1.1 集 合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念. 把客观世界或思维中一定范围内的所有对象，作为一个整体来研究，我们把这个整体就称为一个 **集合**. 构成集合的那些事物称为集合的 **元素**. 例如，实直线上点的全体构成一个集合，它的元素是点. 以实数为系数的多项式全体构成一个集合，它的元素是实系数多项式. 直线上的一切开区间构成一个集合，这个集合的元素是开区间. $[a,b]$ 上一切连续函数构成一个集合，这个集合的元素是连续函数.

本书中集合通常用大写字母 A, B, C, $\cdots$ 表示，集合的元素用小写字母 a, b, c, $\cdots$ 表示.

设 A 是一个集合，当 a 是集合 A 的元素时，称 **a 属于 A**, 它的意义与 A 含有 a 相同，用记号 $a \in A$ 表示. a 不属于 A 用 $a \notin A$ 表示. 当集合 A 是由一切具有性质 P 的元素构成时，可表示成

$$A = \{x: \quad x \text{ 具有性质 } P\}.$$

含有有限个元素的集合称为 **有限集**. 含有无限个元素的集合称为 **无限集**. 不含任何元素的集合称为 **空集**, 通常用符号 $\emptyset$ 表示. 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的 **子集**, 记作 $A \subset B$.

为了方便起见，对于任意的集合 A, 我们规定 $\emptyset \subset A$.

集合的包含关系有以下的性质:

(1) 自反性: $A \subset A$;

(2) 反对称性: $A \subset B$, $B \subset A \Longrightarrow A = B$;

(3) 传递性: $A \subset B$, $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

若 $A \subset B$, 并且 $B \subset A$, 则称集合 A 与集合 B **相等**, 记作 $A = B$.

注

(1) 对于一个给定的集合，集合中的元素必须是确定的，也就是说，任何一个对象或者是这个给定集合中的元素，或者不是这个给定集合中的元素，二者必居其一，且只能居其一.

(2) 对于一个给定的集合，集合中的元素必须是互异的，也就是说，一个集合中的任何两个元素都不同. 如 2 与 2 不能是同一集合的两个元素.

(3) 集合中的元素无先后次序. 如由元素 2, 4, 6, 8, 9 组成的集合和由元素 4, 2, 8, 9, 6 组成的集合是同一个集合.

(4) 集合中的元素可以是任何事物，因此一个集合也可以作为另一个集合的元素. 如学生按分班组成班集合，学校的所有班组成校集合，校集合中的元素就是另外一些集合.

2. 集合的运算

设 A 与 B 是两个集合，由 A 中的元素和 B 中的元素全体构成的集合称为 A 与 B 的 **并集**, 简称 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$, 也就是说

$$A\cup B:=\{x:\quad x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由既属于 A 又属于 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的 **交集**, 简称 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$, 也就是说

$$A\cap B:=\{x:\quad x\in A, \text{而且 } x\in B\}.$$

由所有属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的 **差集**, 记作 $A\backslash B$, 也就是说

$$A\backslash B:=\{x:\quad x\in A,\ \text{但是 } x\notin B\}.$$

考虑集合 X 的元素及其子集 A, B, $\cdots$, 此时 $X\backslash A$ 称为 A **的补集(或余集)**, 记作 A^c, 也就是说

$$A^c:=X\backslash A=\{x:\quad x\in X,\ \text{但是 } x\notin A\}.$$

对于 X 的子集 A, B, 有

$$A\cup A^c=X,\ \ A\cap A^c=\emptyset,\ \ A^{cc}=A,\ \ A\subset B\Longleftrightarrow A^c\supset B^c,$$

集合的运算具有下述运算法则:

(1) 幂等律: $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(2) 交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(3) 结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) 分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(5) 吸收律: $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

(6) 对偶律 (De Morgan 定律): $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

注 集合的并与交运算还可以推广到任意多个 (有限或无限) 集合的情况. 设 $\{A_\alpha:\ \alpha\in\Lambda\}$ 是一个集族, 其中 α 为集合的指标, 它在指标集 Λ 中变化, 则这族集合的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\triangleq\{x:\ \exists\,\alpha\in\Lambda,\ x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\triangleq\{x:\ \forall\,\alpha\in\Lambda,\ x\in A_\alpha\}.$$

De Morgan 定律可推广为

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)^c=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c,\quad \Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)^c=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c.$$

De Morgan 定律也称为对偶原理, 在集合论及其应用中有重要的作用. 若等式与基本集 X 的子集有关, 用代换的方法, 把所考察的一切子集换成它的补集, 并运算换成交运算, 交运算换成并运算, 就会得到另一个对偶的等式. 如果是带有 $\subset$ 或 $\supset$ 的包含关系式, 再把两者互换, 所得关系式也成立.

3. 笛卡儿积 (直积集)

设 A, B 是给定的集合, 则称

$$A\times B:=\{(x,\ y):\ \ x\in A,\ y\in B\},$$

为 A, B 的 **笛卡儿积 (直积集)**, 如 $A=[a,\ b]$, $B=[c,\ d]$, 则 $A\times B=[a,\ b]\times[c,\ d]$, 也就是矩形中的点所组成的集合. $\mathbf{R}$ 表示实数集, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$, 即表示普通平面上点所组成的集合. $A\times B$ 中的元素也称为有序对, 当 $x\neq y$ 时, $(x,\ y)\neq(y,\ x)$. $(x_1,\ y_1)=(x_2,\ y_2)\Longleftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2$. 设 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 是给定的集合, 则

$$\begin{aligned}&A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\\ &:=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n):\ x_1\in A_1,\ x_2\in A_2,\cdots,\ x_n\in A_n\}.\end{aligned}$$

§1.2 映　射

在高等数学中已学过函数关系 $y=f(x)$, 它是从实数集 $\mathbf{R}$ (或其子集) 到 $\mathbf{R}$ 中的一种对应关系. 这个概念可推广到一般集合上.

设 X, Y 是两个非空集合, 如果有一个对应关系 (或法则) 存在, 对于 X 中的每一元素 x, 有 Y 中一个元素 y 与其对应, 则称给出了一个从 X 到 Y 的 **映射** f, 记作 $f:\ X\longrightarrow Y$, 而且把 x 与 y 的对应关系写成 $y=f(x)$, 表示 f 把 x 映成 y, 称 y 是 x 在映射 f 下的 **像**, 称 X 是 f 的 **定义域**, 记作 $D(f)$, 而集合 $f(X):=\{f(x):\ x\in X\}$ 称为 f 的 **值域**, 记作 $R(f)$. 一般地, $R(f)$ 是 Y 的一个子集, 不必是整个 Y, 称 $\{(x,\ y):\ y=f(x),\ x\in X\}\subset X\times Y$ 为映射 f 的 **图像**.

由于映射是函数概念的推广, 有时也可把映射称为函数、算子、变换, 特别地, 当 Y 是数集 (实数集 $\mathbf{R}$ 或复数集 $\mathbf{C}$) 时, f 称为定义在集合 X 上的 **泛函**.

对于映射 $f:\ X\longrightarrow Y$, 当 $f(X)=Y$ 时, 称为 **满射或映上的**, 也就是说 f 是由 X 到 Y 上的映射.

对映射 $f:\ X\longrightarrow Y$, 如果对 X 中所有不同的两个元素 x_1, x_2, 恒有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称 f 为 **单射 (或一一映射)**, 即对于 $f(X)$ 中每一个元素 y, 存在 X 中唯一的元素 $x\in X$ 与其对应, 此时 X 与 $f(X)$ 的元素之间有一一对应关系. 如果 f 既是满射又是单射, 则称 f 为 X 到 Y 上的 **双射**. 此时 X 与 Y 的元素之间有一一对应关系.

对于映射 $f:\ X\longrightarrow Y$ 和 $g:\ Y\longrightarrow Z$, 由 $h(x)=g(f(x))$ 所确定的映射 $h:\ X\longrightarrow Z$ 称为 f 和 g 的 **复合映射**, 记作 $h=g\circ f$. 它是复合函数概念的推广. 对映射 $f:\ X\longrightarrow Y$, $g:\ Y\longrightarrow Z$, $\phi:\ Z\longrightarrow W$ 的复合映射来说, 结合律 $(\phi\circ g)\circ f=\phi\circ(g\circ f)$ 成立. 对于一一映射 $f:\ X\longrightarrow Y$, 使 $y=f(x)$ 对应于 x 的映射 $f^{-1}:\ Y\longrightarrow X$ 称为 f 的 **逆映射**. 逆映射是反函数概念的推广. 一般来说, 有

$$f\circ f^{-1}=I_Y,\quad f^{-1}\circ f=I_X.$$

对于映射 $f:\ X\longrightarrow Y$, 如果存在映射 $g:\ Y\longrightarrow X$, 使得 $f\circ g=I_Y$, $g\circ f=I_X$, 则 f 必是双射, 而且 $f^{-1}=g$.

如果有两个映射 f, g, $D(f)\subset D(g)$, 且对于任意的 $x\in D(f)$, $f(x)=g(x)$, 则称 g 是 f 在集 $D(g)$ 上的 **延拓或扩张**, 称 f 是 g 在 $D(f)$ 上的 **限制**, 记作 $f=g|_{D(f)}$.

设映射 $f: X \longrightarrow Y$, $A \subset X$, 集合 $f(A) := \{f(a): a \in A\}$ 称为 A 在 f 下的**像**. 如果 $B \subset Y$, 集合 $f^{-1}(B) = \{x: f(x) \in B\}$ 称为 B 关于 f 的**原像**.

注 这里的 f^{-1} 并不表示逆映射存在, 但当逆映射存在时, B 在逆映射 f^{-1} 下的像即是 B 关于 f 的原像.

定理 1.1 设映射 $f: X \to Y$, 而且 A_1, A_2, A 是 X 的子集, 则有

(1) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;

(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

(3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;

(4) $f(X \backslash A) \subset f(X) \backslash f(A)$, $f^{-1}(f(A)) \supset A$;

另一方面, 设 B_1, B_2, B 是 Y 的子集, 则有

(5) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

(6) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

(7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

(8) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \subset B$.

注 (3) 中等号不一定成立. 例如, 如果取 $f(x) = x^2$, $A_1 = [-2, -1]$, $A_2 = [1, 2]$, 则 $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$, 但 $f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4]$, 这就说明 (3) 中等号不能成立.

例 1.2

(1) 当映射 f 的定义域和值域同为 X, 即 $f: X \longrightarrow X$, 而对所有的 $x \in X$, $f(x) = x$, 则 f 称为 X 上的恒等映射, 以 $f = I_X$ 表示之.

(2) 对于函数 $f(x) = x^2$. 因为 f 的定义域和值域选取的不同将会属于不同类型的映射.

(i) $f: (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ 既不是满射也不是一一映射;

(ii) $f: (-\infty, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是满射而不是一一映射;

(iii) $f: [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ 是一一映射而不是满射;

(iv) $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是双射;

(v) $f: (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$ 是双射.

(3) 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 对于 $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m$, 则线性变换 $y = Ax$ 确定了一个映射 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

(4) 设 $R([0, 1])$ 表示闭区间 $[0, 1]$ 上黎曼 (Riemann) 可积函数全体构成的集合, 定义 $f: R([0, 1]) \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall\ x(t) \in R([0, 1]),$$

则泛函 f 是满射但不是一一映射.

(5) 设 $C([0,\ 1])$ 表示闭区间 $[0,\ 1]$ 上连续函数全体构成的集合，$C^1([0,\ 1])$ 表示闭区间 $[0,\ 1]$ 上具有一阶连续导函数的函数全体构成的集合，定义映射 f： $C([0,\ 1]) \to C^1([0,\ 1])$ 为

$$[f(x)](t) = \int_0^t x(u)\,\mathrm{d}\,u, \quad \forall\ \ x(t) \in C([0,\ 1]),$$

则 f 是一一映射但不是满射. 事实上，如果 $f(x) = f(y), x,\ y \in C([0,\ 1])$，则对于任意的 $t \in [0,\ 1]$ 有 $[f(x)](t) = [f(y)](t)$，求导得 $x(t) = y(t)\ (t \in [0,\ 1])$，因此 $x = y$，故 f 是一一映射. 但 f 不是满射，用反证法证明. 由于 $v(t) = 1 \in C^1([0,\ 1])$，如果存在 $x \in C([0,\ 1])$，满足 $[f(x)](t) = u(t) = 1$，求导得到 $x(t) = 0$，但是 $[f(0)](t) = \displaystyle\int_0^t 0\,\mathrm{d}\,u = 0$，这就产生一个矛盾.

§1.3 集合的基数

1. 集合的基数

下面讨论无限集合中元素多少的概念和方法，主要介绍集合的对等与基数的概念.

设 A，B 是两个集合，若有双射 f： $A \longrightarrow B$，则称 A 和 B 是**对等的**，记作 $A \sim B$.

对等关系有下列三条性质：

(1) 自反性： $A \sim A$；

(2) 对称性： $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$；

(3) 传递性： $A \sim B,\ \ B \sim C \Longrightarrow A \sim C$.

一般地，某集合 X 上具有 (1), (2), (3) 三条性质的关系 $\sim$ 称为**等价关系**. 如 $a \sim b$，则称 a 和 b **等价**. 同元素 a 等价的全体元素的集合称为 a 的等价类，各等价类是非空的，因为 a 属于 a 的等价类. 相异的等价类无公共元素. 集合 X 可按等价关系分类，即分成等价类. 等价关系在数学和一般科学以至在日常生活中是很多的，如图形的全等，相似等等都是等价关系. 这里集合对等是一种特殊的等价关系，可用对等关系对所有集合进行分类，彼此对等的集合属于同一集合类. 容易看出，元素个数相同的两个有限集可以建立一一对应，因而是对等的. 反之，两个有限集之间存在一一对应，则其元素个数必定相等. 如果 n 是一个确定的自然数，所有元素个数等于 n 的有限