线性代数

金义明　等 编著

1.2

中国物资出版社

线　性　代　数

金义明　丁嘉华　王海敏

编　著

中国物资出版社

图书在版编目(C I P)数据

线性代数/金义明等编著. - 北京:中国物资出版社,2002.7
ISBN 7 - 5047 - 1882 - 3

Ⅰ.线... Ⅱ.金... Ⅲ线性代数 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 049527 号

责任编辑:沈兴龙　　责任校对:顾　勇

责任印制:沈兴龙　　责任设计:金　辉

中国物资出版社出版发行

网址:http://www.clph.com.cn

社址:北京市西城区月坛北街 25 号

电话:(010)68392746　邮编:100834

全国新华书店经销

保定市印刷厂印刷

开本:787×1092mm 1/16　印张:11.125　字数:168 千字

2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7 - 5047 - 1882 - 3/G·0432

印数:5100 册

定价:17.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

前　言

随着现代化经济的发展，数学模型的使用日益广泛而深刻，对经济、管理类学生的数学要求也日益提高。线性代数作为一个基本数学工具，在经济科学、管理科学中有着广泛的应用，学好这门课程不仅对学习后继课程是必不可少的，而且对掌握现代经济理论并应用于实践有着重要的意义。

本书是按照国家教委对经济、管理类大学本科线性代数考试大纲编写的，并力求以通俗的语言向读者介绍线性代数最基础的知识。全书共分四章。第一章的内容以行列式为中心，介绍了行列式的概念、性质及计算，以及用克莱姆法则求解线性方程组的方法；第二章介绍了矩阵这一重要的工具，讨论了矩阵的运算及初等变换；第三章以矩阵为工具，进一步讨论了线性方程组的解法和解的结构；第四章通过对矩阵的特征值和特征向量的讨论，研究了矩阵的对角化问题及实二次型标准化问题。第一章、第三章由丁嘉华编写，第二章由王海敏编写，第四章由金义明编写，最后由金义明总纂定稿。在内容的编写上，我们力求做到科学性与通俗性结合，由浅入深，循序渐进。读者只要具备高中数学的基础知识就能顺利阅读本书，对书中一些较复杂的证明，初学者可以跳过，不会影响后面内容的学习。

讲授本教材约需54课时。

由于编者的水平有限，书中肯定存在疏漏和不足，敬请广大读者和师生不吝指正。

杭州商学院统计与计算科学学院经济数学系列教材编写组

2002年6月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　行列式

行列式是线性代数中一个最基本的概念,在线性方程组、矩阵、矩阵的特征值、二次型等的讨论中都要用到行列式,在数学的其他领域中行列式也有着广泛的应用.

本章的主要内容是介绍行列式的定义、性质以及计算方法.

为了便于读者较好地掌握这部分内容,我们还通过一些例子介绍了几种常用的计算 n 阶行列式的方法.

第一节　二阶与三阶行列式

在初等代数中,对于二个未知数二个方程的线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为方程组的系数,$b_i(i=1,2)$称为常数项.

用加减消元法或代入消元法解这个方程组,第一个方程两边同时乘 a_{22},第二个方程两边同时乘 a_{12},然后两式相减,消去 x_2,可得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

用同样的方法可消去 x_1 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

如果未知数 x_1,x_2 的系数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,则方程组(1.1)有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆,我们引进二阶行列式的概念.

由 4 个数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$排成二行二列,再引入行列式记号“|　|”(注意:此处不是绝对值记号!),就得到一个二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

规定:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为了便于一般讨论,组成二阶行列式的 4 个数中每一个数都有二个脚标,其中第一个脚标表示它在行列式中是位于第几行,第二个脚标表示它在行列式中是位于第几列.例如 a_{21}表示在行列式中位于第二行第一列的交叉处的数.

根据以上二阶行列式的定义,可得

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

因此方程组(1.1)的解,可利用二阶行列式简洁的表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

(其中$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$,该行列式也称为方程组(1.1)的系数行列式)

类似地,对于三个未知数三个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

其中,a_{ij}是方程组的系数($i,j=1,2,3$),b_i 是常数项($i=1,2,3$).

为了简洁地表达它的解,我们引入三阶行列式的概念.

由 9 个数排成三行三列,引入行列式的符号“| |”,得到一个三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

规定:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

可见,三阶行列式是由 $3! = 6$ 项组成的代数和.其中三项前面带正号,三项前面带负号.每一项由三个数相乘而得,这三个数在行列式中位于不同行,不同列.

在三阶行列式中,从左上角到右下角的连线称为主对角线,从左下角到右上角的连线称为次对角线.

为了便于记忆,我们把三阶行列式的第一列、第二列写在行列式的右边.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

主对角线(及与此平行的二条线段)上的三个数相乘,前面取正号;

次对角线(及与此平行的二条线段)上的三个数相乘,前面取负号.把这六项相加就得到三阶行列式的计算公式.

【例 1】 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

解 把第一列、第二列写在行列式右边

$$\left|\begin{matrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)(-1)4 + 0 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 2 \\ &\quad - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 18 \end{aligned}$$

有了三阶行列式的概念,利用加减消元法或代入消元法,我们可以把方

程组(1.2)的解用三阶行列式较简洁地表示出来.

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\qquad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}\qquad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

则当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.2)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}$$

在引进了 n 阶行列式后,还可以把上述结论推广到未知数更多的线性方程组(详见本章第五节).

第二节　n 阶行列式

由 16 个数组成的 4 行 4 列引入行列式的符号“| |”,组成一个四阶行列式:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

为了计算四阶行列式,我们先介绍所谓余子式的概念.

定义 1.1　在行列式中,划去元素 a_{ij} 所在的行,所在的列,剩下的元素按原来的顺序组成的低一阶的行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}.

如 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

中，元素 a_{12}的余子式

$$M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}$$

a_{22}的余子式

$$M_{22}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$$

例如，四阶行列式

$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 6 & 0 & -2\\ 0 & -3 & 3 & 4\end{vmatrix}$$

中，M_{32}为划去 a_{32}(即数字 6)所在的行、所在的列，剩下的三阶行列式

$$M_{32}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 5\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}=43$$

定义 1.2　令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称为元素 a_{ij}的代数余子式.

从代数余子式的定义可以看出，a_{ij}的余子式 M_{ij}与代数余子式 A_{ij}或者相等，或者相差一个符号，取决于 $i+j$ 是偶数还是奇数.

上例中，由于 $3+2=5$ 为奇数，因此，$A_{32}=-M_{32}=-43$

利用余子式与代数余子式的概念，下面我们把三阶行列式的计算公式加括号整理后，用余子式或代数余子式表示出来.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

即:三阶行列式的值等于第一行上的元素与其对应的代数余子式的乘积之和.这个结论也称为行列式按第一行的展开公式.

我们也可把三阶行列式的计算公式重新加括号,整理成以下形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$$= - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= - a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

即三阶行列式等于第二行的所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和.这个结论也称为行列式按第二行的展开公式.

类似地,可以得到三阶行列式按第三行(或者第一列、第二列、第三列)的展开公式.

我们把上面的结果归纳为:

三阶行列式的值等于任意一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和.这个结论称为三阶行列式按任意一行(列)的展开公式.而三阶行列式按第一行的展开公式也可作为三阶行列式的定义,即利用二阶行列式来定义三阶行列式,假设二阶行列式的定义已给出,则三阶行列式的值定义为

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

其中 A_{1j} 是 a_{1j} 的代数余子式,$j = 1,2,3$,这种用数学归纳法的思想给出的三阶行列式的定义的做法可以推广到 n 阶行列式.下面我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3　二阶行列式的定义已给出,假定 $n-1$ 阶行列式已经定义,则我们可用 $n-1$ 阶行列式来归纳定义 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

其中，A_{1j}是元素 a_{1j}的代数余子式($j = 1,2,\cdots,n$).

把三阶行列式按任意一行(列)的展开公式推广到 n 阶行列式，可得如下

定理 1.1　(n 阶行列式按任意一行(列)的展开公式)n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它任意一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

由定理 1.1，n 阶行列式的定义(即定义 1.3)实际上是行列式按第一行展开.

下面，我们利用行列式按任意一行(列)的展开公式来计算四阶行列式的值，相当于要计算 4 个代数余子式，即 4 个三阶行列式.

【例 1】　利用行列式按任意一行(列)的展开公式，计算

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -8 \end{vmatrix}$$

解　由于第二列上有二个元素为 0，我们按第二列展开，得

$$D = 0A_{12} + (-2)A_{22} + 3A_{32} + 0A_{42}$$

只须计算 A_{22}与 A_{32}.

$$M_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & 5 & -8\end{vmatrix}=-55\qquad M_{32}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 4\\ 2 & 5 & -8\end{vmatrix}=67$$

因此，$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}=-55\quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}=-67$

因此 $D=(-2)(-55)+3(-67)=-91$

【例 2】 证明

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & c_1 & c_2\\ a_{21} & a_{22} & c_3 & c_4\\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12}\\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}$$

证　上式左端按第一列展开后，得到的二个三阶行列式再继续按第一列展开，得

$$\text{左}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & c_3 & c_4\\ 0 & b_{11} & b_{12}\\ 0 & b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & c_1 & c_2\\ 0 & b_{11} & b_{12}\\ 0 & b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}-a_{21}a_{12}\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}$$

【例 3】 计算上三角行列式(主对角线下方的元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

解　按第一列展开

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即:上三角行列式的值等于主对角线上的元素相乘.

最后我们指出:n 阶行列式是由 $n!$ 项所组成的代数和,其中一半项前面带正号,一半项前面带负号,每一项由行列式中位于不同行,不同列的 n 个数相乘而得.

第三节　行列式的性质

从 n 阶行列式的定义可看出,用定义计算一个 n 阶行列式,需要计算 $n!$ 项,每项又是 n 个元素的乘积,当 n 比较大时,运算量是相当大的.

本节介绍的行列式的一些性质,不仅可以简化行列式的计算,也便于对行列式作理论上的研究.

性质 1　行列互换,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

下面,我们用数学归纳法来证明(1.3).

当 $n=2$ 时,容易验证结论成立.

假设对 $n-1$ 阶行列式性质 1 成立,对 n 阶行列式,把(1.3)左边按第一行展开后,得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} \tag{1.4}$$

而(1.3)右边按第一列展开得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}M_{j1} \tag{1.5}$$

注意到 M_{1j} 与 M_{j1} 都是 $n-1$ 阶行列式,并且将 M_{1j} 行列互换恰好是 M_{j1},于是由归纳假设 $M_{1j}=M_{j1}$,因此由(1.4)式及(1.5)式可知(1.3)式成立.

由性质 1 可知,行列式中凡是对行具有的性质,对列也同样成立,反之亦然.

由性质 1 及上节例 3 可得,下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

性质 2　行列式中互换两行(或两列)的位置,行列式的值变号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

我们用数学归纳法证明性质 2. $n=2$ 时显然成立,假设对 $n-1$ 阶行列式性质 2 成立,对于 n 阶行列式,将(1.6)式的二个行列式分别按第 k 行展开(其中 $k\neq i,k\neq j$)则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}$$

$$= (-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}+(-1)^{k+2}a_{k2}M_{k2}+\cdots+(-1)^{k+n}a_{kn}M_{kn}$$

$$= (-1)^{k+1}[a_{k1}M_{k1}-a_{k2}M_{k2}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{kn}M_{kn}]$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k+1}[a_{k1}\overline{M}_{k1}-a_{k2}\overline{M}_{k2}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{kn}\overline{M}_{kn}]$$

其中，$\overline{M}_{kj}$是D中a_{kj}的余子式M_{kj}经过互换第i行和第j行位置后所得．由归纳法假设可得，$\overline{M}_{kj}=-\overline{M}_{kj}\,(j=1,2,\cdots,n)$，

因此，$D_1=-(-1)^{k+1}[a_{k1}M_{k1}-a_{k2}M_{k2}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{kn}M_{kn}]=-D$．证毕

利用性质 2，容易得到如下推论．

推论 1　行列式有两行(列)的元素对应相同，则行列式的值为零．

假设n阶行列式D中第i行和第j行的元素对应相同，即

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com