General Mathematical Texts for Undergraduate

大学公共数学系列教材

线性代数

Linear Algebra

武汉大学数学与统计学院

齐民友 主编

蔡德祺 刘丁酉 编

高等教育出版社

大学公共数学系列教材

线性代数

武汉大学数学与统计学院

齐民友　主编

蔡德祺　刘丁酉　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/齐民友主编．—北京：高等教育出版社，2003.2

ISBN 7-04-011962-5

Ⅰ．线…　Ⅱ．齐…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 004382 号

责任编辑：徐　可　　**封面设计**：王凌波

版式设计：杨　明　　**责任印制**：张小强

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	煤炭工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2003 年 2 月第 1 版
印　　张	15	**印　　次**	2003 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	280 000	**定　　价**	18.00 元

《大学公共数学系列教材》编委会

主　编　齐民友

编委（按姓氏笔划为序）

王维克　刘丁酉　刘禄勤　许明浩
陈　化　陆君安　张选群　姜明启
费浦生　黄象鼎

前　　言

线性代数作为理工科本科学生的一门重要数学基础课，对于培养大学生的计算和抽象思维能力十分必要.本书是适用于大学非数学专业学生的线性代数教材，也是武汉大学在多年教学实践基础上编写的公共数学系列教材之一.在掌握了中学数学和微积分的初步知识基础上学好线性代数，可以帮助学生进一步学习计算数学等后续课程，也可在今后更好地应用其作为数学工具，解决自然科学和工程技术各领域中的诸多问题.

本书的主要内容包括行列式、矩阵，线性方程组，矩阵的相似，二次型，线性空间与线性变换.由于高等学校非数学专业的不同层次对线性代数课程教学提出了不同的基本要求，因而在课程设置上安排了不同的学时数.本书基于这一特点，为照顾到不同学时的学生使用，在内容安排上做了一些处理，使内容更为丰富一些，适当扩充内容，注重概念、方法、理论的背景和应用是编写本教材的基本指导思想.本书可作为高等学校理工科各专业本科生线性代数课程的教材，少学时专业也可在适量删减后作为教材使用.

多年的教学实践告诉我们，理工科非数学专业线性代数教材的更新并非易事，本书在以下几个方面作出了一些努力：

1.注重课程自身的系统性和科学性，在基本保持传统体系和内容的同时，力求创新，并注重内容的循序渐进，低起点、高坡度.在本书前三章以解线性方程组为主线分别引入有关概念，自然地将矩阵的秩归为矩阵一章中讲述.第四章继续讨论方阵的相似，最后介绍空间理论等内容使叙述更加连贯.

2.注重理论联系实际，加强概念与理论的背景和应用介绍，增加实例与习题量.考虑到工程建模中运用分块矩阵表述的不断加强，我们增强了分块矩阵的计算，对矩阵相似形的讨论也作了简单介绍和补充.

3.注重基本概念的准确理解和常用方法的熟练掌握，将重点放在概念与方法的应用上，有些常用方法和结论(如正交化方法，异特征值的特征向量的线性无关性等)的证明则移到后面的空间理论中去介绍.

4.注重借鉴和吸收国内外同名优秀教材的经验，丰富了本书的趣味性和可读性.

我们编写本书的一本基本想法是给予使用本教材的教师们更多处理该教材的空间，各位老师可以结合不同学时数和不同的专业对象作更多灵活的删择或补充.对于少学时专业，有些理论(如行列式的性质，矩阵的 Jordan 标准形，二次齐

式和空间理论中某些较难的定理等)可以精减或不给出证明.

本书在编者充分讨论的基础上进行了分工:第一章~第三章由蔡德祺编写,第四章~第七章由刘丁酉编写,书后各章节的习题及答案也由编者给出,然后对书稿进行了交叉修改.

在本书的编写过程中,叶明训教授对本书进行了深入细微的审查,提出了许多宝贵的修改意见和建议,并逐一指出了不完善之处,对于叶明训教授的热心指点和辛勤付出,我们在此表示最诚热的谢意.同时,我们也对高等教育出版社和武汉大学数学与统计学院的大力支持,尤其是徐可编辑和陆君安教授给予的帮助表示衷心的感谢.

限于编者的水平与学识,疏漏与错误难免,欢迎大家批评指正.

编 者

2003 年 1 月于武汉

目　　录

第一章　行列式

n 阶行列式产生于解线性方程组.它表示 n^2 个数按指定规则运算得到的一个数值.作为一个数学工具,行列式不仅用于下一章矩阵的讨论,而且在科技领域中得到广泛的应用.

本章在二阶、三阶行列式的基础上定义了 n 阶行列式,接着介绍行列式的基本性质和计算方法.最后给出用行列式解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　二阶与三阶行列式

在初等代数中,用消元法解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

时,先分别用 a_{22}, $-a_{12}$ 乘(1) 的一、二式的两边,再将得到的两式相加,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

当 x_1 前的系数不为零时,得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

用类似办法,从(1) 消去 x_1,得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{2}$$

(2) 式表示的数称为**二阶行列式**.为了便于记忆,可看成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(实连线两数之积减去虚连线两数之积).

又设

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

其中 D_1 和 D_2 分别是在 D 中把第 1 列与第 2 列元素换成(1) 中的常数项 b_1,b_2 得到. 则当 $D\neq 0$ 时,方程组(1) 有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{3}$$

同理,若考虑三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{4}$$

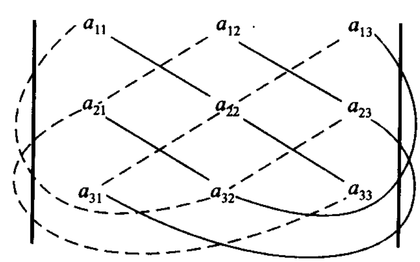
先从前两式消去 x_3,后两式消去 x_3,得到只含 x_1,x_2 的两个新线性方程,再从这两个新线性方程消去 x_2,于是就得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3,\end{aligned}$$

把 x_1 的系数记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},\end{aligned} \tag{5}$$

(5) 式表示的数称为**三阶行列式**. 为了便于记忆,可写成



(对角线法:实连线三数之积减去虚连线三数之积).

根据三阶行列式对角线算法,有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{aligned}&b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}\\ &-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.\end{aligned}$$

于是，当 $D\neq 0$ 时，x_1 可表为

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

同理可得

$$x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$D_j(j=1,2,3)$ 分别是在 D 中把第 j 列元素换成(4)中右端常数项 b_1,b_2,b_3 得到.

例 1 解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1, \\ x_1-5x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=-1. \end{cases}$$

解 因

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0.$$

故立即得出

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{11}{-8},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{9}{-8},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{6}{-8}.$$

利用二阶与三阶行列式，可以把二元与三元一次方程组的解表达为简洁的形式.自然希望能采用同类记号推广到 n 元线性方程组求解问题中去.为此，观察三阶行列式(5)，我们发现有以下特点：

1）三阶行列式是 $3!$ 项的代数和；

2) 每项是行列式中在不同行不同列的 3 个元素的乘积;

3) 每项有确定的符号.

为了分析各项所带符号的规律,我们把各项的 3 个元素按它们在行列式中行的顺序排成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$;即第一个下标(行标)都按自然顺序排列成 123,而其第二个下标(列标)排列成 $j_1j_2j_3$,它们构成自然数 1,2,3 的一个排列.这样各项所带符号只与列标的排列有关.为了说明其中的关系,下面引进有关概念.

把自然数 $1,2,\cdots,n$ 的每一种有确定次序的排列简称为一个 n **元排列**,记为 $i_1i_2\cdots i_n$.显然 n 元排列一共有 $n!$ 个.例如自然数 1,2,3,4 共有 $4!=24$ 个 4 元排列,2134 便是其中一个.称 $12\cdots n$ 为**自然排列**.

定义 1 在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数排在较小的数之前,就称这两个数构成一个**逆序**,n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 所有逆序的总和称为它的**逆序数**,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

如果设 $t_k(k=1,2,\cdots,n)$ 表示 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中 i_k 后面比 i_k 小的元素 $i_l(l=k+1,k+2,\cdots,n)$ 的个数,就说 i_k 这个元素的逆序数是 t_k.那么

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{k=1}^{n}t_k.$$

例2 求排列 1 3 2 5 4; $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

解 $\tau(1\ 3\ 2\ 5\ 4)=0+1+0+1+0=2.$

$$\tau(n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

如果 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=2k(k\in\mathbf{N})$,称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为**偶排列**;否则称为**奇排列**.显然,自然排列 $12\cdots n$ 是偶排列.三阶行列式中取负号的项的列标排列 321,213,132 均是奇排列.

有了逆序数的概念,我们可以把由(2)、(5) 式表示的二阶、三阶行列式改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2)}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

这里 $\sum\limits_{(j_1j_2)}$,$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 分别表示对 1,2 与 1,2,3 的一切排列取和.

1.1.2 n 阶行列式的定义

有了逆序数和奇(偶) 排列,我们可将行列式概念推广到 n 阶情形.

定义 2 称用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n **阶行列式**,简记为 $D=\det(a_{ij})$.它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和,各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.因此,一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 元排列.当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 元排列时,则得到 n 阶行列式表示的代数和中的所有项.

因此 n 阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad (6)$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的一切排列取和.

当 $n=1$ 时,一阶行列式由一个元素构成,其值就是这个元素本身.比如 $|5|=5,|-2|=-2$.

例 3 计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式,在展开的和式中应有 $4!=24$ 项,但由于每一项的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中只要有一个元素等于零,乘积就是零.因此,我们不妨从含有 0 元素最多的第 4 行考虑.$a_{44}\neq 0$,故只须考虑 $j_4=4$ 的项.第三行中除了 a_{33},a_{34} 外都是 0,现已取 $j_4=4$,所以必须取 $j_3=3$.同理,只能取 $j_2=2,j_1=1$.即该行列式中不为零的项只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,此时 $j_1j_2j_3j_4=1234$ 为偶排列,所以

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}. \end{aligned}$$

该行列式的特点是主对角线(行列式记号中从左上角到右下角的直线)以下的元素都为0(即当 $i > j$ 时 $a_{ij} = 0$).这种行列式称为**上三角形行列式**.

一般地,n 阶上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即等于主对角线元素的乘积.

同理,对**下三角形行列式**,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

它的特点是除主对角线外其他元素皆为0,称为**对角形行列式**.

例 4 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 类似于例3的讨论,除了第1行取 a_{1n},第2行取 a_{2n-1},…,第 n 行取 a_{n1} 为因子的项 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$ 外,其余的项均为零,而它带的符号为

$$(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 2\,1)} = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

所以

$$D = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 2\,1)} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\ldots a_{n1}.$$

出于讨论行列式性质的需要,我们引入对换概念并给出它与排列的奇偶性之间的关系.

定义 1 在一个 n 元排列 $j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n$ 中,如果仅将 j_k 与 j_l 对调,其他数位置不变,得到另一个排列 $j_1\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n$,这样的变换称为一个**对换**.特别地,当

$l = k + 1$ 时称此对换为**邻换**.

比如,在排列 31425 中,1,5 施以对换,便得到排列 35421.4,2 施以邻换,便得到排列 31245.

定理 1　一次对换改变排列的奇偶性.

证　(1) 先考虑邻换情形. 设 n 元排列 $j_1\cdots j_k j_{k+1}\cdots j_n$,邻换 j_k, j_{k+1},得到新排列 $j_1\cdots j_{k+1}j_k\cdots j_n$. 由于除 j_k, j_{k+1} 两数外,其余的数位置没有改变,所以其余的数的逆序经过邻换后并不改变. 当 $j_k < j_{k+1}$ 时,经邻换,j_k 的逆序数不变,而 j_{k+1} 的逆序数增加 1;而当 $j_k > j_{k+1}$ 时,经邻换后,j_k 的逆序数减少 1,而 j_{k+1} 的逆序数不变. 因此新排列仅比原排列增加或减少 1 个逆序,所以它们的奇偶性相反.

(2) 再考虑对换情形. 设原排列为 $j_1\cdots j_k b_1 b_2\cdots b_{s-1} j_{k+s}\cdots j_n$(即 j_k 与 j_l 间隔 $s-1$ 个数),经过对换变为新排列 $j_1\cdots j_{k+s} b_1 b_2\cdots b_{s-1} j_k\cdots j_n$. 在原排列中,将 j_k 依次与 $b_1, b_2, \cdots, b_{s-1}, j_{k+s}$ 作 s 次邻换,变为 $j_1\cdots b_1 b_2\cdots b_{s-1} j_{k+s} j_k\cdots j_n$. 再将 j_{k+s} 与 $b_{s-1}, b_{s-2}, \cdots, b_1$ 作 $s-1$ 次邻换便得到新排列. 即新排列可由原排列经过 $2s-1$ 次邻换得到. 由(1) 的结论可知它改变了奇数次奇偶性,所以它与原排列的奇偶性相反.

推论 1　任何一个 n 元排列都可通过对换成自然排列,且所需对换次数与该排列的奇偶性相同.

证　不妨设排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是奇排列. 由定理 1 对该排列作对换的次数就是该排列奇偶性变化的次数. 而自然排列 $12\cdots n$ 是偶排列,故只能通过奇数次对换才能实现要求.

利用对换及其性质,可以得到 n 阶行列式的等价定义.

定理 2

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2\cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}. \tag{7}$$

证　对于左端 n 阶行列式 D 的任一项

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

当列标的排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 经过 K 次对换变成自然排列 $12\cdots n$ 时,相应的行标的自然排列 $12\cdots n$ 经相同的 K 次对换变成排列 $i_1 i_2\cdots i_n$,由于数的乘法是可交换的,所以有

$$a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}.$$

由定理 1 的推论 1,对换次数 K 与 $\tau(j_1 j_2\cdots j_n)$ 有相同的奇偶性,同理,K 与 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$ 也有相同的奇偶性,从而 $\tau(j_1 j_2\cdots j_n)$ 与 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性,所以有

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{nj_n} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

即 D 中的任一项(7) 式右端总有且仅有一项与之对应，于是结论成立.

例 5　计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & d \end{vmatrix}.$$

解　考察给定行列式的非零项. 由于第 3 行和第 1 列均只有一个非零元素，因此非零项必取第 1,2 列的元素 a_{21}, a_{32}. 于是对于第 3,4 列只可能取 a_{43}, a_{14} 或 a_{13}, a_{44}，而 $a_{13} = 0$，所以有

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(2341)} a_{21} a_{32} a_{43} a_{14} \\ &= -b\,c\,d\,a. \end{aligned}$$

习题 1.1

1. 求下列各排列的逆序数，从而判别排列的奇偶性.

(1)4231；　(2)3214765；

(3)215479683；　(4)$135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 642$.

2. 求出 $i, j (1 < i, j < 9)$，使 $1274i56j9$ 为奇排列.

3. 已知排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为 t，求排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的逆序数.

4. 写出 4 阶行列式中所有含因子 a_{23} 且带有负号的项.

5. 用行列式定义计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

6. 用行列式的定义证明：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. 证明：若 n 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中有多于 n^2-n 个零，则

$$\det(a_{ij})=0$$

8. 计算下列三阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 11 & 6 & -1 \\ 6 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$.

§1.2　行列式的性质

当行列式的阶数 $n\leqslant 4$，或者元素比较特殊时，直接用行列式定义计算尚可行，但对阶数 n 较大的行列式则十分困难. 例如 $n=10$，需作 $9\times 10!$ 次乘法. 为此，我们需要讨论行列式的基本性质，以便得到计算行列式更为有效的方法.

把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列互换，不改变它们前后的顺序得到的新行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 D 的**转置行列式**，显然 D 也是 D^{T} 的转置行列式，即

$$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D.$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

证　设 a_{ij} 与 b_{ij} 分别表示 D 与 D^{T} 的第 i 行第 j 列的元素. 由转置定义，有 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 依照行列式定义及(7)式，

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \\ &= D. \end{aligned}$$