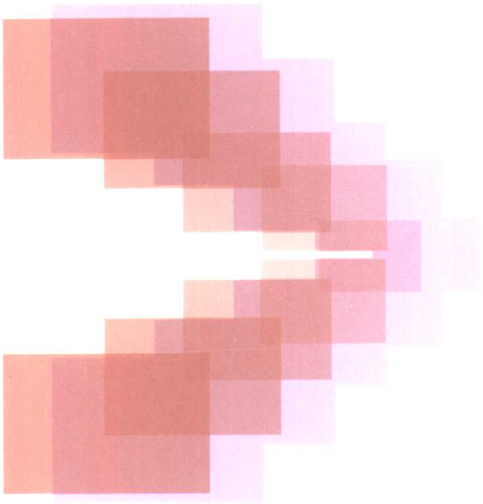
近世代数习题解

杨子胥　宋宝和　编著



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

近世代数习题解

杨子胥　宋宝和　编著

山东科学技术出版社

近世代数习题解

杨子胥　宋宝和　编著

出版者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002　电话:(0531)2065109
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@jn-public.sd.cninfo.net
发行者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002　电话:(0531)2020432
印刷者:山东新华印刷厂潍坊厂
地址:潍坊市潍州路 753 号
邮编:261008　电话:(0536)8236911

开本:787mm×1092mm 1/32
印张:19.25
字数:407 千
版次:2003 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
印数:1－3000

ISBN 7－5331－3250－5　　O·108
定价:29.00 元

图书在版编目（CIP）数据

近世代数习题解／杨子胥编.—济南：山东科学技术出版社，2003.1
ISBN 7-5331-3250-5

Ⅰ.近… Ⅱ.杨… Ⅲ.抽象代数-高等学校-解题 Ⅳ.0153-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057180 号

前　言

本题解是由我和宝和同志在长期教学与科研基础上不断积累，并参阅国内外相关文献编写而成的。全书共编选816道题，它包括了我所编著的《近世代数》(高等教育出版社2000年出版)中几乎全部的习题解答。

本书共分五章，前两章给出群论方面的题解422个，后三章给出环与域方面的题解394个。这些题目大体上包括了通行的近世代数的内容。当然，也有少数题目稍深入一些，其中也吸收了作者在群、环、域方面所发表的一些论文成果。

近世代数是一门比较抽象的学科，不少人特别是初学者在解题时常感困难。然而这方面的参考书又不是太多，特别是目前国内还未正式出版过一本这样的习题解答，本书的出版填补了这一空白。本题解的出版不仅可供高校师生教学与学习参考之用，也可供有志于考研同学参考学习，更可以帮助初学者解决一些学习中的困惑。

读题解可以根据个人不同情况采取不同的方法。初学者或基础稍差的读者可以由浅入深循序渐进地学习；基础较好的读者则可以有重点的选读。但无论哪种情形，对于一个题目最好是暂不看解答，先想一想自己能不能做得出来，实在想不出时再看解答。这样做效果可能会更好一些。近世代数

中有不少习题的特点是，苦思冥想其解，但总是无从下手，然而一旦知道关键所在，捅破了这层“窗户纸”，却又显得“一文不值”。其实，我们应在这捅破“窗户纸”上多下功夫，熟练掌握，认真对待。不管怎样，只要能深入进去仔细琢磨和思考，读者通过学习必将会得到一个良好的代数训练，并打下一个较为坚实的代数基础。另外，我们还可以从学习中发现一些未解决的问题，并提出一些科研题目以开展群、环、域方面的研究工作。衷心希望本题解会对读者能有所帮助！

本书中打“＊”的题多数稍偏难或属于群、环、域方面一些定理。

在本书出版过程中，许新斋老师对本书提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢！

作者才疏学浅，书中错误和疏漏之处在所难免，请读者批评指正。

杨子胥

2002.2.22 于济南

本书所用符号

Z	整数集
Z^*	非零整数集
Q	有理数集
Q^*	非零有理数乘群
U_n	n 次单位根群
S_n	n 次对称群
$S(M)$	集合 M 的对称群
A_n	n 次交代群
K_4	Klein 四元群
$GL_n(F)$	一般线性群
$SL_n(F)$	特殊线性群
$\langle S\rangle$	由子集 S 生成的子群
Aut$G$	群 G 的自同构群
Aut$F$	域 F 的自同构群
Inn$G$	群 G 的内自同构群
$N(S)$	S 的正规化子
$C(S)$	S 的中心化子
$\leq$	子群、子环、子域
$\trianglelefteq$	正规子群、理想
Kerφ	同态 φ 的核

$\mathrm{Im}\varphi$	同态 φ 的像
R^*	环 R 的单位群
F^*	域 F 的非零元素乘群
F_+	域 F 的加群
F_N	域 F 上方阵对加法和 $A\circ B=ANB$ 作成的环
Z_n	模 n 剩余类环
$\mathrm{char}R$	环 R 的特征
$T(n)$	正整数 n 的正因数个数
$\mathrm{End}G$	加群 G 的自同态环
$\mathrm{End}Q_+$	有理数加群的自同态环
$M_n(F)(F_{n\times n},F_{N\times N})$	域 F 上的 n 阶全阵环
$\mathrm{Aut}_K F$	域 F 在域 K 上的 Galois 群

目　录

第一章　群

§1. 映　　射

提　　要

定义 1　设 X 和 Y 是两个非空集合. 如果有一个法则 φ, 它对于 X 中每一个元素 x, 在 Y 中都有一个惟一确定的元素 y 与它对应, 则称 φ 为集合 X 到集合 Y 的一个映射. 这种关系常表示成

$$\varphi: X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto y=\varphi(x),$$

并把 y 叫做 x 在映射 φ 之下的象, 而把 x 叫做在 φ 之下元素 y 的逆象或原象.

如果 φ 和 ψ 的都是集合 X 到 Y 的映射, 且对 X 中任意元素 x 都有 $\varphi(x)=\psi(x)$, 则称 φ 与 ψ 相等, 记为 $\varphi=\psi$.

若 A 是 X 的一个非空子集, 则称 Y 的子集

$$\varphi(A)=\{\varphi(a) \mid a \in A\}$$

为子集 A 在 φ 之下的象; 若 B 是 Y 的一个非空子集, 则称 X 的子集

$$\varphi^{-1}(B)=\{x \mid x \in X, \varphi(x) \in B\}$$

为子集 B 在 φ 之下的逆象或原象.

定义 2　设 φ 是集合 X 到集合 Y 的一个映射. 如果对 X

中任二元素 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$，则称 φ 为 X 到 Y 的一个单射；

若对 Y 中每个元素 y，在 X 中都有元素 x 存在使 $\varphi(x)=y$，则称 φ 为 X 到 Y 的一个满射.

如果 φ 是 X 到 Y 的单射，又是满射，则称 φ 为 X 到 Y 的一个双射.

X 到 X 的映射，称为 X 的一个变换.

类似有 X 的单射变换、满射变换和双射变换.

定理　设 X 与 Y 是两个有限集合，且 $|X|=|Y|$，即 X 中的元素个数与 Y 中的元素个数相等，则 X 到 Y 的映射 φ 是单射当且仅当 φ 是满射.

题　解

【1】 设 M、N 是两个非空集合，且 $|M|=m$，$|N|=n$. 问：

1) M 到 N 可建立多少个映射？

2) M 到 N 可建立满射、单射、双射的条件各为何？各能建立多少个？

解　1)设 φ 是从

$$M=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\} \quad \text{到} \quad N=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$$

的任一映射，则 $\varphi(a_i)(1\leqslant i\leqslant m)$ 可为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中的任一个，即 a_i 的象有 n 种选法，且选法不同所决定的映射也不同；由于这样的 a_i 共有 m 个，因此，M 到 N 可建立且仅能建立 n^m 个(即从 n 个元素中每次取 m 个的重复排列数)映射.

2)M 到 N 可建立满射的充要条件是 $m \geqslant n$. 又因为是满射，故 N 中每个元素都必须有逆象，于是 N 中元素 b_1 的逆象在 M 中有 m 种取法，b_2 的逆象有 $m-1$ 种取法，$\cdots$，b_n 的逆象有 $m-n+1$ 种取法. 故共有

$$p_m^n = m(m-1)\cdots(m-n+1)$$

种取法，亦即 M 到 N 能而且只能建立 P_m^n 个满射.

又 M 到 N 可建立单射的充要条件是 $m \leqslant n$. 且类似满射情况可知，能而且只能建立 P_n^m 个从 M 到 N 的单射.

最后，由定理及以上二结论可知，M 到 N 能建立双射的充要条件是 $m=n$，且仅能建立 $m!$ 个双射.

【2】 试给出集合 $X=\{1,2,3,4,5\}$ 到 $Y=\{0,2,4,6,8,10\}$ 的两个单射.

解 例如，$\varphi_1: x \longmapsto 2x$ 与 $\varphi_2: 1 \longmapsto 0$，其余 $x \longmapsto 2x$ 就是 X 到 Y 的两个单射.

【3】 设 X 是数域 F 上全体 n 阶方阵作成的集合. 问：$\varphi: A \longmapsto |A|$ 是否为 X 到 F 的一个映射（$|A|$ 为方阵 A 的行列式）？是否为满射或单射？

解 当 $n=1$ 时即 $\varphi:(a) \longmapsto a$ 是双射；当 $n>1$ 时 φ 满但非单，因为

$$\varphi\begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & a \end{pmatrix} = a.$$

【4】 设 A 与 B 是数域 F 上两个 n 阶相似方阵，$F[A]$ 为系数属于 F 的关于 A 的一切多项式作成的集合. 问：法则 $\varphi: f(A) \longrightarrow f(B)$ 是否为集合 $F[A]$ 到 $F[B]$ 的映射？其中 $f(x) \in F[x]$；是否为单射或满射？

解 设 $B=CAC^{-1}$(C 可逆)且 $f(A)=g(A)$，则

$$f(B)=f(CAC^{-1})=Cf(A)C^{-1}$$
$$=Cg(A)C^{-1}=g(CAC^{-1})=g(B),$$

即 φ 是 $F[A]$ 到 $F[B]$ 的映射. 又 φ 显然为满射.

最后由 $f(B)=g(B)$ 同上可得 $f(A)=g(A)$，即 φ 又是单射，从而 φ 是双射.

【5】 给出整数集到偶数集的两个不同的映射.

解 例如，$\varphi_1: x\longmapsto 2x$ 及 $\varphi_2: x\longmapsto 2(x+1)$即是，其中 x 为任意整数.

【6】 设 φ 是集合 X 到 Y 的一个映射，而 A 与 B 是 X 的任二非空子集. 证明：

1) $\varphi(A\cup B)=\varphi(A)\cup\varphi(B)$;

2) $\varphi(A\cap B)\subseteq\varphi(A)\cap\varphi(B)$.

证 1)任取 $y\in\varphi(A\cup B)$，则存在 $x\in A\cup B$，使 $y=\varphi(x)$.

若 $x\in A$，则 $\varphi(x)\in\varphi(A)$，于是

$$y=\varphi(x)\in\varphi(A)\cup\varphi(B);$$

若 $x\in B$，则 $\varphi(x)\in\varphi(B)$，上式仍成立. 故

$$\varphi(A\cup B)\subseteq\varphi(A)\cup\varphi(B).$$

反之，任取 $y\in\varphi(A)\cup\varphi(B)$，不妨设 $y\in\varphi(A)$，于是存在 $x\in A$ 使 $y=\varphi(x)$. 由于 $x\in A\subseteq A\cup B$，故

$$y=\varphi(x)\in\varphi(A\cup B),$$

从而 $\varphi(A)\cup\varphi(B)\subseteq\varphi(A\cup B)$. 因此

$$\varphi(A)\cup\varphi(B)=\varphi(A\cup B).$$

2)任取 $y\in\varphi(A\cap B)$，则有 $x\in A\cap B$ 使 $\varphi(x)=y$.

因为 $x\in A\cap B$，故 $x\in A$，$x\in B$，从而

$$y=\varphi(x)\in\varphi(A),\quad y=\varphi(x)\in\varphi(B),$$

所以，$y\in\varphi(A)\cap\varphi(B)$. 因此

$$\varphi(A\cap B)\subseteq\varphi(A)\cap\varphi(B).$$

注 可能出现 $\varphi(A\cap B)\subset\varphi(A)\cap\varphi(B)$，自己试举一例.

【7】 设 φ 是集合 A 到 B 的任意一个映射，S 与 S' 分别为 A 与 B 的非空子集. 证明：

1) $\varphi^{-1}(\varphi(S))\supseteq S$，且当 φ 为单射时等号成立；

2) $\varphi(\varphi^{-1}(S'))\subseteq S'$，且当 φ 为满射时等号成立.

证 1)任取 $x\in S$，则 $\varphi(x)\in\varphi(S)$. 从而

$$x\in\varphi^{-1}(\varphi(S)),\quad\therefore S\subseteq\varphi^{-1}(\varphi(S)).$$

如果 φ 是单射，任取 $y\in\varphi^{-1}(\varphi(S))$，则必 $\varphi(y)\in\varphi(S)$，从而有 $x\in S$ 使 $\varphi(x)=\varphi(y)$. 但因 φ 是单射，故

$$y=x\in S,\quad\varphi^{-1}(\varphi(S))\subseteq S.$$

于是 $\varphi^{-1}(\varphi(S))=S$.

2)任取 $y\in\varphi(\varphi^{-1}(S'))$，则有 $x\in\varphi^{-1}(S')$ 使 $y=\varphi(x)$. 但由于 $x\in\varphi^{-1}(S')$，故 $\varphi(x)\in S'$，从而 $y=\varphi(x)\in S'$.

$$\therefore\ \varphi(\varphi^{-1}(S'))\subseteq S'.$$

又当 φ 为满射时，任取 $x'\in S'$，则存在 $x\in A$ 使 $\varphi(x)=x'$. 于是

$$x\in\varphi^{-1}(S'),\quad\varphi(x)\in\varphi(\varphi^{-1}(S')),$$

即 $x'\in\varphi(\varphi^{-1}(S'))$，故又有 $S'\subseteq\varphi(\varphi^{-1}(S'))$，从而

$$\varphi(\varphi^{-1}(S'))=S'.$$

【8】 设 σ 与 τ 分别为集合 A 到 B 以及 B 到 C 的映射. 证明：

1)若 σ,τ 都是单射，则 $\tau\sigma$ 是单射；反之，若 $\tau\sigma$ 是单射，则 σ 是单射.

2)若 σ,τ 都是满射，则 $\tau\sigma$ 是满射；反之，若 $\tau\sigma$ 是满射，则 τ 是满射.

证 1)乘积 $\tau\sigma$ 是集合 A 到 C 的映射. 设 $x_1,x_2\in A$，且 $x_1\neq x_2$，则由于 σ 是单射，故

$$\sigma(x_1)\neq\sigma(x_2);$$

又因为 τ 是单射，故

$$\tau(\sigma(x_1))\neq\tau(\sigma(x_2)),\quad (\tau\sigma)(x_1)\neq(\tau\sigma)(x_2),$$

即 $\tau\sigma$ 是集合 A 到 C 的单射.

反之，设 $\tau\sigma$ 是 A 到 C 的单射，则对 A 中任二不同元素 x_1,x_2 有

$$(\tau\sigma)(x_1)\neq(\tau\sigma)(x_2),\quad \tau[\sigma(x_1)]\neq\tau[\sigma(x_2)].$$

从而 $\sigma(x_1)\neq\sigma(x_2)$，即 σ 是 A 到 B 的单射.

2)设 σ,τ 都是满射，则任取 $c\in C$，由于 τ 是满射，故存在 $b\in B$ 使

$$\tau(b)=c. \tag{1}$$

又由于 σ 是 A 到 B 的满射，故对于 $b\in B$ 有

$$\sigma(a)=b,\quad (a\in A) \tag{2}$$

从而由(1)，(2)得

$$\tau[\sigma(a)]=c,\quad \text{即 } (\tau\sigma)(a)=c.$$

亦即 $\tau\sigma$ 是 A 到 C 的满射.

反之，设乘积 $\tau\sigma$ 是集合 A 到 C 的满射，则任取 $c\in C$，必有 $a\in A$ 使

$$(\tau\sigma)(a)=c,\quad \text{即 } \tau[\sigma(a)]=c.$$

亦即有 $b=\sigma(a)\in B$ 使 $\tau(b)=c$. 因此，τ 是集合 B 到 C 的满射.

注　当 $\tau\sigma$ 是单射时，τ 不一定是单射. 例如，A 是正整数集合，B 与 C 都是整数集合，又

$$\sigma: A \longrightarrow B \quad a \longmapsto a^2$$
$$\tau: B \longrightarrow C \quad b \longmapsto |b|,$$

则易知乘积 $\tau\sigma$ 是单射，但 τ 不是单射.

对满射也有类似情况.

【9】 设 σ 是集合 A 到集合 B 的一个映射. 证明：

1)σ 是单射当且仅当存在 B 到 A 的映射 τ，使 $\tau\sigma=1_A$；

2)σ 是满射当且仅当存在 B 到 A 的映射 τ，使 $\sigma\tau=1_B$，其中 $1_A, 1_B$ 分别为集合 A, B 的恒等映射.

证　1)设 σ 是单射，令 $B'=\{b' \mid b'\in B, b'\notin\sigma(A)\}$，则　　$B=\sigma(A)\cup B'$，　且 $\sigma(A)\cap B'=\varnothing$.

任取 $a_0\in A$，则显然

$$\tau: b \longmapsto a, \quad \text{当 } b\in\sigma(A),\ b=\sigma(a);$$
$$b' \longmapsto a_0, \quad \text{当 } b'\in B'.$$

是集合 B 到 A 的一个映射，且对任意 $x\in A$，都有

$$(\tau\sigma)(x)=x, \quad \text{即 } \tau\sigma=1_A.$$

反之，若存在映射 $\tau: B\longrightarrow A$ 使 $\tau\sigma=1_A$，则因 1_A 是双射，当然是单射，故由上题知，σ 是单射.

2)设 σ 是满射，则任取 $b\in B$，在 A 的子集 $\sigma^{-1}(b)$ 中任意取定一个元素 a，并令

$$\tau: B\longrightarrow A, \quad b\longmapsto\tau(b)=a,$$

其中 $\sigma(a)=b$. 于是显然对任意 $b\in B$ 有

$$(\sigma\tau)(b)=\sigma(\tau(b))=\sigma(a)=b,$$

即 $\sigma\tau=1_B$.

反之，若存在映射 $\tau: B\longrightarrow A$ 使 $\sigma\tau=1_B$，则由于 1_B 是