普通高等教育"十五"国家级规划教材

大学数学教程

微积分

刘建亚 主编
刁在筠 许闻天 蒋晓芸 编

1

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学教程

微积分（一）

刘建亚　主　编
刁在筠　许闻天　蒋晓芸　编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程微积分(一)/刘建亚主编-北京:高等教育出版社,2002.8
ISBN 7-04-010805-4

Ⅰ.微…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第048236号

责任编辑 胡乃冏　**封面设计** 王　雎　**责任绘图** 尹文军
版式设计 李　杰　**责任校对** 李　杰　**责任印制** 陈伟光

大学数学教程微积分(一)
刘建亚　主编

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市东城区沙滩后街55号
邮政编码 100009
传　　真 010-64014048
购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经　　销 新华书店北京发行所
印　　刷 北京民族印刷厂

开　　本 787×960　1/16
印　　张 21.5
字　　数 400 000
版　　次 2002年8月第1版
印　　次 2002年8月第1次印刷
定　　价 24.60元(含磁盘)

大学数学教程

丛书

主　编　刘建亚

副主编　陈君华　吴　臻

编　委（按姓氏笔画排列）

刁在筠	包芳勋	许闻天
吕　同	胡发胜	秦　静
傅国华	蒋晓芸	潘建勋

前　言

按传统的观点，在大学里除数学类各专业外，数学只是理、工等类专业学生的基础课，是学习后续课程和解决某些实际问题的工具．随着社会的进步、科学技术的发展和高等教育水平的不断提高，数学已渗透到包括经济、金融、信息、社会等各个领域，人们越来越深刻认识到过去看法的不足，越来越深刻认识到数学教育在高等教育中的重要性．数学不仅是基础、是工具，更重要的，数学是探索物质世界运动机理的重要手段，是一种思维模式 —— 数学思维模式，数学教育是培养大学生理性思维品格和思辨能力的重要载体，是开发大学生潜在能动性和创造力的重要基础；同时，数学又是一种文化 —— 数学文化，它显示着千百年来人类文化的缩微景象，也是当代大学生必须具备的文化修养之一．因此大学数学不仅是理、工类学生应该学习，而且也是大学各类专业都应该学习的课程，数学教育是大学生素质教育的重要组成部分．当然，不同类型专业对数学的要求和内容会有所不同．

为了适应新世纪我国高等教育迅速发展的形势和实行学分制的需要，满足新时期高等教育人才培养拓宽口径、增强适应性对数学教育的要求，山东大学数学与系统科学学院从 2000 年开始按照教育部《高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神和要求，在学院领导的亲自参与下，组织部分教师对非数学类专业大学数学的课程体系进行了认真深入的研究和认证．针对大学数学是高校非数学类专业所有大学生应当具有的素质，又考虑到不同专业的要求深浅不同、内容多少各异的实际情况，制订了适应这种情况的新课程体系．新课程体系的主要特点是采取平台加模块的结构，整个大学数学的课程共分三个平台，不同平台反映了不同专业对数学知识的不同层次、级别要求，体现数学知识结构和大学生认知结构的统一．鉴于人类认识是从感性到理性，由易到难，由浅入深的，因此第一平台（包括微积分（一）、线性代数和概率统计）是体现高等数学的普及和基础，体现所有各专业应当具有的数学素质教育，主要侧重基本概念和基本方法，加强基本运算，努力渗透基本数学思想；第二平台是对第一平台基本概念的加深和知识方法的拓宽，在本平台中还适当体现出数学理论的系统性和严谨性；第三平台（包括数学建模、数值分析、数理方程、复变函数和积分变换、运筹学等）则是为满足某些对数学知识和方法有特殊要求的专业而设置．各

平台的教学内容由浅入深,反映不同专业对数学知识和内容的不同要求;各平台的内容又采取模块组合的方式,模块间相对独立,各专业亦可根据本专业的需要,选用不同的模块组合,这样就使得新的课程体系具有更大的灵活性,能够满足不同层次、不同要求的专业对数学教学的需求．另外,新课程体系还将利用计算机解决数学问题的数学实验融入其中,做到理论和实践的有机结合．

山东大学教务处对新课程体系给予充分的肯定,并大力支持按新课程体系编写相应的教材．在我们完成初稿之后,教务处按排几个专业的学生先行试用,并在此基础上加以修改完善.目前,已完成了前两个平台共计四册的教材编写和修改.其中,微积分为二册,分属二个平台;线性代数和概率统计各一册.这套教材的特点除上述平台加模块的结构外,还有以下特色:

1. 内容少而精,体现素质教育,突出数学思想.我们重点介绍高等数学中的基本概念和基本方法;从培养读者的能力和提高素质的着眼点,有选择地保留了部分定理、性质的证明,对那些用类似的技巧方法,或者读者举一反三可以理解或自学的证明部分省略或简化处理.

2. 扩大了读者的知识面.我们将各专业不同需求的数学内容融进了一套教材中.主要的做法是:用“*”号标明不同层次对数学的要求;从不同的学科例题分析中引进基本概念;阐述基本内容在各主要学科中的应用;习题中涉及多学科.这使不同专业的读者可以了解到高等数学中的相关知识在其他专业中的应用.这在知识经济时代是非常必要的.另一方面,可以满足目前多数读者希望跨学科获取更多知识的愿望.如在数学要求较低专业学习的读者希望学习更多数学知识(如跨学科考研或工作需要)时,可以从同一本书中按“*”号的标示获取.当然,教师在授课时可按本专业的要求有选择地使用.

3. 与中学知识相衔接,易教易学.对一些较困难,不易被刚进大学的学生所接受的内容,如极限的“ε-N”,“ε-δ”定义,以及部分不影响整体结构的较困难内容如泰勒中值定理等均放入第二平台.希望能使读者对数学增添兴趣,提高学习的自信心.

4. 总学时减少,可在原定学时中学习更多、更新的知识.

5. 各节后的习题配置除基本练习外,还有部分综合练习题,以提高读者分析问题、解决问题的能力.综合练习题多置于每节习题后部且配以“*”号标示.

6. 增添了利用计算机解决数学问题的内容,在每章后均有解决本章主题问题的MATLAB程序和例题演示.书后附有通用数学软件MATLAB简介.并附有软盘.

7. 本书附有在数学发展史中一些著名数学家的简介.从这些数学家辉煌成

就背后的艰苦奋斗故事中，希望可以激发读者学习的热情和兴趣.

本套书由山东大学数学与系统科学学院组织部分有较高水平和丰富教学经验的教师集体编写，最后聘请有关专家审定.在长达近两年的编写过程中，学院领导给予了极大的关注、支持和具体指导，为此曾多次召开各种类型的会议反复论证，几易手稿.

大学数学教程的主编是刘建亚.微积分部分由刁在筠(第1,2,10,11,12章)、许闻天(第3,4,6,8,9章)、蒋晓芸(第5,7章及第9章部分)编写，由刁在筠完成统稿及改写工作；陈绍著审定；各册的数学实验内容及所附教学软盘由傅国华编写和制作；数学家简介由包芳勋编写.

本套教材作为普通高等教育"十五"国家级规划教材正式出版，是教育改革的产物.在此，我们感谢山东大学教务处、山东大学出版基金委、山东大学数学院领导对改革和教材出版的鼎力支持，感谢仪洪勋、江守礼教授对我们的鼓励和帮助.我们特别感谢高等教育出版社，由于他们的指导和帮助才使本书顺利与读者见面.

新时期大学数学的教学改革是一项非常紧迫、非常重要，也是非常艰巨的工作.限于编者水平，本书肯定会有许多不足和缺点，乃至问题，恳请读者批评指正.

编　者

2002年4月

微积分(一)“ * ”号的使用说明:

1. 不加“ * ”号内容是最基本的,建议各专业均采用;

2. 加一个“ * ”号内容为对数学要求中等及较高专业所需,如经济、生化类,理、工科各专业等;

3. 加二个“ * * ”号内容仅对数学要求较高专业所需,如理、工科各专业等.

微积分(二)“ * ”号的使用说明:

1. 不加“ * ”号内容为对数学要求中等及较高专业所需;

2. 加一个“ * ”号内容仅为对数学要求较高专业所需,如理、工科各专业等.

目　录

第 1 章　函数、极限和连续

初等数学基本上是关于常量的数学，而高等数学是关于变量的数学．“就是由于有了变量，才在数学中引进了运动与辩证法……”（恩格斯）．研究变量之间的相互依赖关系，研究变量的变化趋势，导出了微积分学中有关函数、极限和连续等基本概念．本章将介绍这些基本概念及它们的一些性质．

§1.1 函　数

1. 函数概念

在观察某种自然现象、社会问题或技术过程时，往往会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中始终不变，也就是保持一定的数值，这种量叫做**常量**；还有一些量在过程中是变化着的，也就是这个量可以取不同的数值，这种量叫做**变量**．例如我们观察飞行中的飞机．在这个现象中，飞机中乘客的人数，全部行李的重量，飞机两翼的长度等等这些量均为常量．而飞机离起飞地点或目的地的距离，它离地面的高度，飞行速度，汽油的储存量，温度，周围大气的压力与云量等等均是变量．而对于飞行来说，正是这些变量有着最重要的意义．自然辩证法指示我们在研究各种现象时，需要研究的不是它在某一瞬间的截面，而是这个现象整个的进行过程，以及在这个过程中究竟是什么东西在变化，它们是如何变化的．因此微积分中第一个基本概念就是变量．

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析．例如就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量．

通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,t 等表示变量．在几何上，用数轴上的点来表示数．常量在数轴上的图像是一个定点；而变量由于它在过程中可以取不同的数值，所以可用数轴上在某个点集合中的动点来表示．例如变量 x 所取值的全体组成一个区间 $(a,b]$，那么 x 就表示数集

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

中任何点的符号．特殊地，若数集 $\{x\mid x=a\}$ 只含唯一的一个点，那么表示数集元素的符号 x 就是常量．在这个意义上，常量可视为变量的特殊情况．

在以后的章节中常用到的一种数集称为邻域．**即对给定的数 a 及任意的正数 δ，称集合**

$$\{x|\quad |x-a|<\delta\}$$

为点 a 的δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$.其中点 a 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**.因为$|x-a|$表示点 x 与点a 间的距离,因此 $U(a,\delta)$表示数轴上与点 a 距离小于δ 的一切点x 的全体.有时用到的邻域需要把邻域中心去掉.称集合

$$\{x|\quad 0<|x-a|<\delta\}$$

为点 a 的去心δ 邻域,记作 $U(\bar{a},\delta)$.在应用中,当不需指明邻域半径时,一般用 $U(a)(U(\bar{a}))$表示 a 的(去心)邻域.

在同一个现象中往往同时有几个变量在变化着,这几个变量并不是孤立地在变,而是相互联系彼此影响.一般说来,一个量的变化就常常引起另外一个量随之而变.例如,圆半径变大时,其面积也同时变大;适当增加地里的施肥量,庄稼的收成也随之增加等等.但在这两个例子中就变量间相互关联的精确性来说,是很不相同的.在第一个例子中变量半径 r 与变量面积 S 之间的关系是精确的:$S=\pi r^2$.在后一个例子中虽则可以精确地知道田地里的施肥量,但不能完全精确地预料收成的多少.很自然地,我们首先要研究的是变量之间的那种精确关系,即只要知道一组变量的值之后,我们可遵循一定的变化规律,完全精确地决定另外一组变量的值.现在我们先就在同一个变化过程中两个变量的情况举几个例子.

例 1.1.1　在电子技术中,常会遇到各种波形.图 1.1.1 是“锯齿波”中的一个波形,横坐标表示时间 t,纵坐标表示电压 u.从图上知,电压 u 随时间t 的变化而变化,在区间 $0\leqslant t\leqslant 30$ 中,每确定一个 t 值,都有一个确定的 u 值与它对应.u 与 t 的关系用数学表达式表示为:

$$u=\begin{cases}\dfrac{1}{10}t, & 0\leqslant t<10,\\[2mm] \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{20}t, & 10\leqslant t\leqslant 30.\end{cases}$$

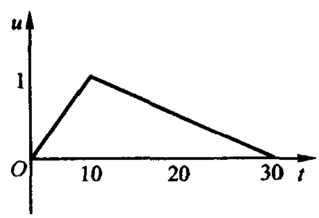

图 1.1.1

像例 1.1.1 这样在不同区间上有不同表达式的变量关系在工程、科技、企业经济活动中很常见.

例 1.1.2　一天中的气温 T 随时间t 而变化.温度自动记录仪记录了某一

天气温 T 随时间 t 的变化曲线，如图 1.1.2 所示. 时间 t 的变化范围为 $0\leqslant t\leqslant 24$（小时），t 确定后都可在图上得到相应的温度 T 的数值. T 与 t 之间存在着通过曲线确定的相互依赖关系.

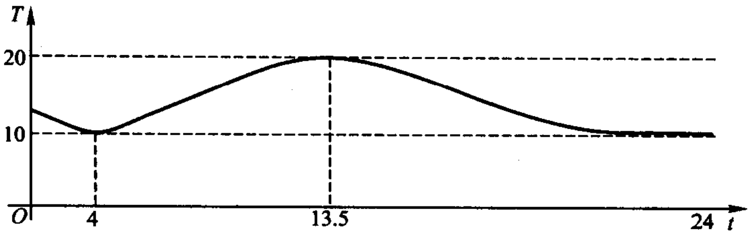

图 1.1.2

例 1.1.3　由实验测出某地区大气空气密度 ρ 随海拔高度 h 的变化情况如下表：

h/(m)	0	500	1 000	1 500	2 000	3 000	4 000
ρ/(kg/m^3)	1.22	1.17	1.11	1.06	1.01	0.91	0.82

上表反映了 ρ 与 h 的依赖关系. 根据这个表，当 h 取表中某一值时，对应的 ρ 值也随之确定. 反之亦然. 有一种在飞机上使用的高度计就是依照这一原理设计的.

以上各例中具体内容各不相同，表达方式也不相同，但却有共同的特征：问题涉及两个变量，两变量间有一个确定的依赖关系（即对应规律），虽然对应规律的表达方式不同（用数学表达式、图像、表格等），但是，当其中一个变量在某一范围内取值时，另一变量按照对应规律就有确定的值与之对应. 两个变量的这种对应关系就是函数关系. 函数是微积分学中的基本概念，研究函数的局部性质、整体性质以及函数的分解与合成构成了微积分学中的基本内容. 下面我们给出函数的定义.

定义 1.1.1　**设在某变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 x 在一个给定的数集 D 中取值，如果对于 D 中每个确定的变量 x 的取值 x，变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数**，记作

$$y=f(x)\ .$$

数集 D 叫做这个函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**.

当 x 取定数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作

$$f(x_0) \quad 或 \quad y|_{x=x_0}=f(x_0).$$

当 x 遍取 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集称为函数的**值域**,即值域为数值集合 $W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$.

根据定义,我们前面所列出的三个例子均涉及一个函数,它们可分别表示为 $u=f(t), 0\leqslant t\leqslant 30$; $T=g(t), 0\leqslant t\leqslant 24$; $\rho=\varphi(h), 0\leqslant h\leqslant 4000$.这里的 f, g, φ 等是一个符号,表示变量之间存在着的确定的对应法则.

由函数的定义可知,构成函数的基本要素有两个:一是对应法则,二是定义域.值域是派生的.若两个函数的对应法则和定义域都相同,则这两个函数恒等,而不管它们的自变量和因变量选用什么字母表示.如 $y=\sin x, -\infty<x<+\infty$ 和 $u=\sin t, -\infty<t<+\infty$,这两个函数是恒等的.

在实际问题中,函数的定义域是由这个问题的实际意义确定的.如圆的面积 S 是半径 r 的函数,$S=\pi r^2$,其定义域 $D=[0,+\infty)$.如果不考虑函数的实际意义,抽象地研究用算式表达的函数,函数的定义域就是自变量所能取得使算式有意义的一切实数值.$S=\pi r^2$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

在函数定义中,我们用“唯一确定”来表明所讨论的函数都是**单值函数**.当 D 中的某些 x 值有多于一个 y 值与之对应时,我们称之为**多值函数**.本书只讨论单值函数.

例 1.1.4 函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$

称为**符号函数**,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1.1.3 所示.在例 1.1.1 与本例中,函数的对应法则由两个或两个以上的解析表达式表示,这种函数称为**分段函数**.

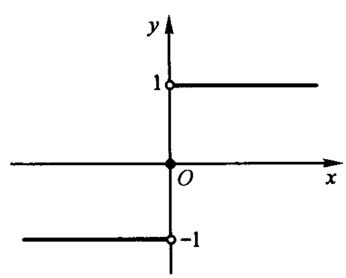

图 1.1.3

例 1.1.5 已知函数 $y=f(x)=\sqrt{2+x^2}$,求:$f(1), f(a), f(\frac{1}{a})$, $f(x_0+h)$.

解 $f(1)=\sqrt{2+1^2}=\sqrt{3}$;

$f(a)=\sqrt{2+a^2}$;

$f(\frac{1}{a})=\sqrt{2+(\frac{1}{a})^2}=\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$;

$f(x_0+h)=\sqrt{2+(x_0+h)^2}$.

2.函数的几种特性

研究函数的目的是为了了解它所具有的性质,以便掌握它的变化规律.下面列出函数的几个简单的特性.

(1)奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 为一个关于原点对称的数集,即 $x\in D$ 时,有 $-x\in D$.如果对于任意 $x\in D$ 有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为**偶函数**;如果对于任意 $x\in D$ 有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为**奇函数**.

例如函数 $y=x^3$,$y=\sin x$ 是奇函数;$y=x^2$,$y=\cos x$ 是偶函数,而 $y=x^3+x^2$ 是一个非奇非偶函数.不难看出,偶函数的图形关于 y 轴是对称的,奇函数的图形关于原点是对称的.

(2)单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加(减少)**的.又若 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在区间 I 上是**单调不减(不增)的**.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.例如,函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$上是单调减少的;在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的;在区间$(-\infty,+\infty)$内函数 $y=x^2$ 不是单调的.

(3)有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,对于数集 $X\subset D$,若存在数 $M>0$,使得对任意的 $x\in X$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 X 上是**有界的**;否则称 $f(x)$在 X 上是**无界的**.

例如,$y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的;$y=\frac{1}{x}$在$(0,1]$上是无界的,但在$[1,+\infty)$上是有界的.有界函数的界 M 不是唯一的.对于 $y=\cos x$,不仅 1

是它的界,而且任何大于 1 的数都可取作定义中的 M. 有界函数的图形总是位于平行于 x 轴的直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

(4)周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个非零常数 T,使得对任一 $x\in D$ 有 $x+T\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 是**周期函数**,T 为其**周期**. 我们通常所说的周期函数的周期是指**最小正周期**.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\sin \pi x$ 都是周期函数,它们的周期分别是 2π 和 2. 周期为 T 的周期函数,在其定义域内每两个长度为 T 的相邻区间上,函数图形有相同的形状.

3. 反函数与复合函数

(1)反函数

在初等数学中我们已熟知反函数概念. 如对数函数 $y=\log_a x$ $(x>0, a>0$ 且 $a\neq 1)$ 与指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 互为反函数,三角函数(在自变量的取值范围内)与反三角函数等等. 一般来说,在函数关系中,自变量与因变量是相对而言的. 例如我们把圆的面积 S 表示为半径 r 的函数: $S=\pi r^2$ $(r\geqslant 0)$,也可以把半径 r 表示为面积的函数: $r=\sqrt{S/\pi}$ $(S\geqslant 0)$. 就这两个函数来说,我们可以把后一个函数看作是前一个函数的反函数,也可以把前一个函数看作是后一个函数的反函数.

定义 1.1.2　给定函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,值域为 W,如果对于 W 中任一值 $y=y_0$,必定在 D 中有唯一的 x_0,使 $f(x_0)=y_0$,那么我们说在 W 上确定了 $y=f(x)$ 的 反函数,记作

$$x=f^{-1}(y), y\in W.$$

此时也称 $y=f(x)$ $(x\in D, y\in W)$ **在 D 上是一一对应的**.

由定义知,反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 W,值域为 D. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 一般地,直接函数与反函数的对应法则、定义域和值域是不相同的.

习惯上我们用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因而常把函数 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式. 从而 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的,这是因为这两个函数因变量与自变量互换的缘故.

对于一个给定的函数 $y=f(x)$,$x\in D$,$y\in W$,不一定存在反函数. 例如 $y=x^2$,$x\in(-\infty,+\infty)$,$y\in[0,+\infty)$. 任意给定一个 $y_0\in[0,+\infty)$,此时有两个数值 x_0 和 $(-x_0)$ 与之对应,均满足 $y_0=(x_0^2)=(-x_0)^2$,即 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是一一对应的,所以它没有反函数. 但把 $y=x^2$ 看成分别定义在

$(-\infty,0]$和$[0,+\infty)$上的两个函数时,它们是一一对应的,其反函数存在,分别为$y=-\sqrt{x}$和$y=\sqrt{x}$.

对于一个给定的函数 $y=f(x),x\in D,y\in W$,它在 D 上有反函数存在的充要条件是$f(x)$在 D 上是一一对应的.因为单调函数是一一对应的,所以单调函数一定存在反函数.例如正弦函数,$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上不是一一对应的,所以不存在反函数.但是如果限制 x 的取值区间为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,$y=\sin x$ 在该区间上是单调增加函数,因此有反函数,即反正弦函数 $y=\arcsin x$,其定义域为$[-1,1]$,值域为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

(2)复合函数

经常遇到一些函数,例如 $y=\sqrt{x^2+1}$,我们可以把它看成是将 $u=x^2+1$ 代入到 $y=\sqrt{u}$之中而得到的.像这样在一定条件下,将一个函数"代入"到另一个函数中的运算称为函数的复合运算,而得到的函数称为复合函数.

一般地,若函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1,函数 $u=g(x)$在 D_2 上有定义,而 $W_2=\{u\mid u=g(x),x\in D_2\}$,且 $W_2\subset D_1$,那么,对于任一 $x\in D_2$,通过函数 $u=g(x)$有确定的 $u\in W_2$ 与之对应,由于 $W_2\subset D_1$,因此对于这个 u 值,通过函数 $y=f(u)$有确定的 y 值与之对应.这样,对于任一 $x\in D_2$,通过 u 有确定的y值与之对应,从而得到一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数,称这个函数为由函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$复合而成的**复合函数**,记作

$$y=f[g(x)],$$

而 u 称为**中间变量**.

复合函数是说明函数对应法则的某种表达方式的一个概念.利用复合这个概念,有时可以把一个复杂的函数分解成几个简单的函数的某些运算,有时也可利用几个简单的函数复合成一个较为复杂的函数.例如,函数 $y=\lg(1-x^2)$可看作由 $y=\lg u$ 和$u=1-x^2$ 复合而成的.

不是任意两个函数都能够复合成一个复合函数的.例如,$y=\arcsin u$ 和$u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数.因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内任何 x 值所对应的u 值都大于或等于 2,都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

复合函数的概念可推广到有限多个函数复合的情况.例如,函数 $y=2^{\sqrt{x-1}}$可以看成是由

$$y=2^u,u=\sqrt{v},v=x-1(x\geqslant 1)$$

三个函数复合而成,其中 u,v 为中间变量,x 为自变量,y 为因变量.复合函数$y=2^{\sqrt{x-1}}$的定义域为$[1,+\infty)$.