国家科学技术学术著作出版基金资助出版

量子力学纠缠态表象及应用

范洪义　著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

纠缠态是量子态制备、量子编码、量子信息与量子计算机理论的基础，它起源于爱因斯坦等人的思想，是量子力学的精粹所在。

本书在引入“有序算符内的积分(IWOP)理论”的基础上，系统地、多方面地建立了量子力学的纠缠态表象，并介绍了它在量子光学、固体物理、热场动力学、量子场论等方面的应用。书中还发展了量子力学相似变换理论及其在量子统计力学中的应用。这些内容在更深层次上揭示了狄拉克符号法的优美与简洁，为量子力学提供了新篇章，体现了作者独具匠心的研究风格与成果。

本书适合理工科大学的学生、教师与各个专业领域的物理工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

量子力学纠缠态表象及应用/范洪义著.—上海:上海交通大学出版社,2001
ISBN 7-313-02452-5

Ⅰ.量…　Ⅱ.范…　Ⅲ.量子力学　Ⅳ.O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 26246 号

量子力学纠缠态表象及应用
范洪义　著
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030)
电话:64071208　出版人:张天蔚
常熟市印刷二厂印刷　全国新华书店经销
开本:850mm×1168mm 1/32　印张:9.375　字数:241 千字
2001 年 6 月第 1 版　2001 年 6 月第 1 次印刷
印数:1～2000
ISBN 7-313-02452-5/O·122　定价:25.00 元

引　言

量子力学的创始人之一、诺贝尔物理奖得主狄拉克，曾期望他用以阐述量子论的符号法(Symbolic method)"在将来当它变得更为人们所了解，而且它本身的特殊数学得到发展时，它将更多地被人们所采用"。这是因为"符号法用抽象的方式直接地处理有根本重要意义的一些量"，"符号法更能深入事物的本质，它可以使我们用简洁精练的方式来表达物理规律"。

英国物理学家 Stephan Hawking(S.霍金)在 1995 年 11 月 13 日纪念狄拉克时指出："他写出了一篇出色的论文，其中他阐述了任何系统的量子力学的一般规则。这些规则结合了海森伯与薛定谔的理论并指出它们的等价性。在现行量子力学的三个奠基人中，海森伯和薛定谔的功劳是他们各自看到了量子理论的曙光，但是正是狄拉克把他们看到的交织在一起并揭示了整个理论的图像"。

"狄拉克在这个世纪对近代物理以及在改变人们对宇宙的图像认识方面所作的贡献，除了爱因斯坦以外，多于任何其他人。"

——摘自 Paul Dirac, The Man and His Work, 1998 Edited by Peter Goddard. 剑桥大学出版社. Memorial address by Stephen Hawking.

1997 年底，《量子力学表象与变换论》[1]（以下简称为书[1]）在物理学界一些前辈、朋友和学生的热心关怀与鼓励下，由上海科学技术出版社出版了。在书[1]中系统地介绍了有序算符内的积分理论(其英译简称为 IWOP)[2]~[11]，它把寓于狄拉克符号法中深层次的物理内涵与应用潜力揭示出来，在看似已臻完美的量子力

学理论体系中开辟了一个新的研究方向，找到了不少物理上有用的新表象与新变换，也成了量子光学数理基础的重要内容。

正如书[1]序的结尾所指出的那样："相信越来越多的应用还会被找出来。"本书是在书[1]的基础上继续深入地用有序算符内的积分理论发展量子力学的表象与变换论的结晶。

学过量子力学的人都知道，狄拉克的《量子力学原理》[12]搭建了量子力学的理论构架，他的符号法已经成为量子力学的"语言"。诚如大数学家冯·诺依曼所说的那样，狄拉克的理论体系"就其简洁和优美而言是很难超过的"。[13]倘若我们以法国文学家雨果的"有用的，不过就是有用的，美的，不过就是美的；有用的而又美，这就是崇高了"的标准来衡量，狄拉克在本世纪20~30年代创造的符号法由于其反映物理本质的深刻性和记号的方便性，不但可以跨世纪地沿用下去，而且已经成了人们阐述多种理论爱用的框架。狄拉克也因其无废话的魅力，在物理学界赢得广泛的尊敬。[14]

关于符号法中的变换理论，狄拉克曾说："这是我一生工作中最使我兴奋的一件工作……"。"变换理论是我的至爱[The transformation theory (became) my darling]"。在另一场合他又说："我的许多论文仅仅来自一个十分偶然出现的想法的结果……但是我关于量子力学的物理诠释工作却是一种值得夸奖的成功"。[15]所以也有一些学者认为狄拉克的符号法也许是他对物理最大的贡献，这是因为量子论超越了经典的逻辑，人们不能用传统的"经典的"语言来描述它并进行交流。诚如海森伯所说的："在量子论中出现的最大困难……是有关语言运用问题。首先，我们在使用数学符号与用普通语言表达的概念相联系方面无先例可循；我们从一开始就知道的只是不能把日常的概念用到原子结构上去"。而正是狄拉克在总结了海森伯的矩阵力学与薛定谔的波动力学后终于发现了阐述量子理论的精确而自洽的数学形式(语言)。

让我们详细地看一下海森堡对狄拉克在量子力学诠释方面的

评价。海森堡在获诺贝尔物理学奖的演说时指出："经典力学的每一个参数，例如电子的能量或动量，在量子力学中都可规定出相应的矩阵。由此出发（不仅是为了描述事件的实验状况）还必须把属于各个参数的矩阵有系统地联系起来……

玻恩、约尔丹与狄拉克的功劳是把上述的数学系统发展成协调的和实用的理论。他们最先发现量子条件可以写成代表电子动量和坐标的矩阵之间的对易关系，并得出了下面的方程（p_r 是动量矩阵，q_r 是坐标矩阵）：

$$p_r q_s - q_s p_r = \frac{h}{2\pi i}\delta_{rs},\quad q_r q_s - q_s q_r = 0,$$

$$p_r p_s - p_s p_r = 0,\quad \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s \text{ 时}; \\ 0, r \neq s \text{ 时}。\end{cases}$$

他们用这些对易关系在量子力学中得到了经典力学的基本规律，即能量、动量和角动量不随时间而改变。

然而在物理意义上，量子力学和经典力学之间存在着深刻的差别，因此需要充分讨论量子力学的物理解释。现在已经清楚，用量子力学可以求出原子发出的辐射、稳定态的能量值和表征定态的其他参数……然而，在所有要求对瞬态事件做直观描述的场合，例如在解释威尔逊照片时，理论的形式似乎不适于解释事件的实验状况。在这一点上，根据德布罗意的论题发展起来的薛定谔波动力学帮助了量子力学。

……在薛定谔指出了波动力学在数学上与量子力学等价之后，这两种不同的物理思想达到了成功的结合，使量子理论体系极大地扩展与丰富。起初只有波动力学才能对复杂的原子系统做数学处理，后来狄拉克与约尔丹分析了这两种理论之间的联系，建立了所谓的变换理论。"

从以上这段话可以看出，狄拉克等发展海森伯的矩阵力学有两大贡献，一是把量子化条件用$[q_r, p_s]$对易子代表，把量子力学的对易子与经典力学的泊松括号相类比，从而使量子力学规律与

方程的表达空前地简洁与深刻;二是发展了量子变换理论,它又是建立在严格的表象理论基础上的,而表象又是用 bra 与 ket 来表现的。

海森伯的这段话还表明:经典力学与量子力学在数学处理上的根本区别就在于普通数(可对易的)与算符(一般而言是不可对易的)之区别。算符的不可交换性给量子系统的数学处理带来了复杂性与困难,有什么办法能使普通数与算符在数学处理上的差距缩小呢?

"科学在艺术上不足的程度,就是它作为科学不完善的程度。"本书及书[1]的作者注意到量子力学中一大类的积分型 ket - bra 算符,在 80 年代以前的文献中并没有提到如何进行数学处理,而把积分明显积出,而这类积分在物理上代表了量子变换,因而是值得研究的。在书[1]中系统地提出了有序算符内的积分理论(IWOP技术)。对于玻色算符,这个理论充分注意并应用了正规乘积的性质,尤其是正规乘积内部玻色算符相互对易的特点,所以只要把原本并不对易的玻色算符置于有序状态,就可使人们能够在对不互为共轭虚量的 ket - bra 型积分算符积分时,把算符视为互相可对易的(普通数)参量,这样一来,积分就可顺利进行。在这样做的时候,并不失去算符的本性,然后人们可以对积分的结果取消有序性而恢复算符明显的不对易性。这就是 IWOP 技术的基本思想。通过掌握有序算符内的积分理论,人们可以对狄拉克符号法的浩瀚深邃有更深的体会与理解,而这又是十分必需的。恰如狄拉克所指出的那样:"新的理论,如果人们脱离它的数学背景去看,是由许多物理概念所组成,而这些物理概念是不能用语言恰当地讲清楚,就像每个人在他出生后就必须学会的那些基本概念(例如,远近、相同)一样,要能掌握这些物理学的更新概念,只有靠长期地熟悉它们的性质和用途"。

有感于此,作者继书[1]后又写了这本续集,使读者进一步熟悉狄拉克所创造的量子力学语言,看一看符号法在融入了有序算

符内的积分理论后能把理论发展到多远,能开拓多少新的研究课题,能帮助我们找到多少新的表象与有物理意义的算符(可观测量)……

歌德曾指出:“独创性的一个最好的标志,就是在选择题材之后,能把它加以充分发挥,从而使得大家承认,压根儿想不到会在这个题材里发现那么多的东西。”有序算符内的积分理论正在实现狄拉克生前所说的符号法会得到发展的天才预见,丰富着他的知识体系,成为符号法的有机组成部分,给人以“更上一层楼”的感觉。这进一步表明了狄拉克符号法的强大生命力和永恒的科学价值。因为狄拉克自己也认为符号法“正在开创某种可能将来永垂不朽的东西”,“成了现在量子力学中使用的标准记号”。

在这本续集中,作者将继续用有序算符内的积分理论给出若干新的有用的量子力学表象,重点放在研究纠缠量子态表象的应用。什么是量子力学的纠缠态呢? 这要追溯到 1935 年 Einstein (爱因斯坦)、Podolsky 与 Rosen(EPR)的一篇论文[16]。他们指出,按照量子力学的常识,会存在一些两粒子态,若测量粒子 1 的某个可观测量,就能完全决定粒子 2 的相应的可观测量的测量值。而在测量时,这两个粒子是分离得如此远,以致于在测量粒子 1 的有效时间内对另一个粒子不可能施加任何影响。

对于这样的两粒子态,EPR 引进了“物理实在”的概念,当对第一个粒子物理量的一次测量结果能够确定地预言第二个粒子的相应物理量而又不干扰该粒子,那就存在物理实在的一个元素以对应此物理量,即第二个粒子有这样一个物理量值,而不管它是否实际上被测量与否。这在某种意义上与测量才告知我们现实这一事实相悖,以致使人困惑。更令人迷惑不解的是对粒子 1 的共轭于上述物理量的可观测量作测量,其结果又能预言粒子 2 的相应共轭量的值。一般而言,该粒子的相互共轭的算符并不对易,按照量子力学理论,它们不能被同时确定。这一点似乎又告诉我们,不管你决定去测量粒子 1 的一个变量还是与之共轭的变量,当第二个

粒子相距得足够遥远，这种测量也会影响到第二个粒子。于是自相矛盾就出现了。这导致 EPR 得出现行的量子力学是“不完备”的结论。但是，两粒子的这种非局域性的关联在实验上被观测到了，而且这种非定域效应是量子力学的基本特征，能反映 EPR 佯谬(paradox)的这种态就称为纠缠态。[17,18]

人们利用纠缠性可以制备光场的新的量子态。因为对相互纠缠着的两个子系统中的一个进行测量，就可使得另一个坍缩到一个特定的状态。另一方面，纠缠态所反映出来的量子非局域性也成了量子信息学的理论基础，也使得量子远程通信(teleportation)成为可能。而如果把纠缠性推广到多原子系统，实现对于多原子纠缠态的制备与操纵，将使量子计算机的试制成为可能。总而言之，由于在量子世界中，量子态是信息的载体，量子信息的接收、处理与发送归根结底是实现对量子态的制备与操纵(所谓量子态工程)，所以本书所重点讨论纠缠态表象的意义是深远的。

在本书中，作者将指出量子力学中还有哪些物理系统中是存在着纠缠态或是形式上类似于纠缠态的，例如对电子在均匀磁场中平面运动的系统可以建立纠缠态表象，对热场动力学、复标量场及描写光子的偏振也可以建立纠缠态表象。这些与 IWOP 技术密切相关。

作者还将从纠缠态表象中派生(推导)出若干新的量子力学中有用的表象，例如能明显地表现出电荷数递增及递减的表象。

作者还着重讨论了纠缠态表象的新应用，尤其是深刻揭示了量子光学中双模非线性相算符的“纠缠”性质；建立了纠缠态表象中的 Wigner 算符理论。

另一方面，本书用 IWOP 技术更深入地讨论了玻色体系与费米体系的量子幺正变换与相似变换，使量子统计力学得到发展。一些新的与李代数相关的量子光学态矢量及其性质也在本书中有适当的讨论。

本书虽然与已出版的《量子力学表象与变换论——狄拉克符

号法进展》有一定的联系，但作者在写作时尽量保持了本书的相对独立性，即为了使手头暂时还没有书[1]的读者仍能方便地阅读本书，作者在写作时使之自成系统，但又不失与书[1]的合理衔接。相信凡是理解了量子谐振子及其代数解法的人都能读懂这本书，这有利于他们扩大知识面，深化基础知识，培养发现问题与解决问题的能力。

我衷心感谢各位同行对书[1]及本书出版的关心与支持，尤其是中科院院士彭恒武先生、于敏先生、苏肇冰先生、何祚庥先生、杨国桢先生和朱清时教授，北京大学曾谨言教授与上海交通大学庞乾骏教授给了我很多鼓励，翁海光同志提供了许多帮助，李良时、杨震山、陈伯展、张艳、梁先庭、刘乃乐、孙治湖和林景贤同志作了若干文字整理工作，我也要提到上海交通大学出版社编辑们，他们的热情支持使得本书顺利地与读者见面。我也怀念钱临照先生为书[1]所录王安石的诗句："看似寻常最奇崛，成如容易却艰辛。"

在本书即将写完前，家母不幸逝世。每每想到她老人家的教诲，使我能做到在哀痛中仍完成写作。我应该感谢她此时无声胜有声的鞭策。

谨恳广大读者对本书给予批评指正。

范洪义

目　录

第一章

若干新的量子力学表象及其应用

1.1 纠缠态表象的引入、定义与标准形式

量子力学表象论是狄拉克在1926～1930年期间首先提出的，它是量子力学的数理基础之一。表象是解动力学薛定谔方程的“载体”，选择合适的表象有利于算符的对角化。正如狄拉克所指出的那样：“在解量子力学中具体问题时，一个人可以减少其工作量，如果他采用了某个表象，而在这个表象中问题所涉及的较重要的抽象量的表示是尽可能的简单”。[12]

在书[1]第二章中扼要介绍了量子力学中常用的表象：坐标表象、动量表象及相干态表象[19,20]以及它们与粒子数表象（也称Fock表象）的关系，在第四章又引入了两粒子系统的新本征态$|\eta\rangle$与$|\xi\rangle$，[见(1.3)式与(1.4)式]，它们对于解两粒子相互作用的动力学问题是有用的。这里要进一步指出$|\eta\rangle$与$|\xi\rangle$态是一类纠缠态表象，非常适合于深入研究与Einstein，Podolsky和Rosen（EPR）非定域性相关的量子力学现象。我们从坐标Q与动量P谈起。

我们知道在量子光学理论中[21]，Q与P代表单模光场的两个正交分量（quadrature），由于(Q,P)与光子产生算符$a^\dagger$、湮没算符a有关系（为简略符号，设$\hbar=m=\omega=1$）：

$$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^\dagger),\quad P=\frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{i}}(a-a^\dagger),$$

$$[Q,P]=\mathrm{i}\hbar,$$

所以物理上可观测的是场的正交分量(厄米特算符)以代替非厄米特算符 $a^\dagger$ 与 a。相应地,量子光场的电场分量

$$E(t)\sim a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+a^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

将改写为 $E(t)\sim Q\cos\omega t+P\sin\omega t$,(正弦函数与余弦函数相位差90°,故称为正交),这样一来,光场的量子起伏就可以用海森伯测不准关系 $\Delta Q\Delta P\geqslant\frac{\hbar}{2}$ 来衡量。例如对于相干态 $|z\rangle$,实振幅 Q 在相干态中无确定值,因为 $|z\rangle$ 不是 Q 的本征态(在这方面,说明了量子谐振子在相干态的特点并不完全像经典谐振子,后者用复振幅 $z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 与用实振幅 $|z|\cos(\omega t-\arg z)$ 描写是一致的)。尽管量子谐振子的复振幅 $\langle z|a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}|z\rangle=z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 有确定值,而实振幅却不然,

$$\langle z|(\Delta Q)^2|z\rangle=\frac{\hbar}{2\omega},\ \langle z|(\Delta P)^2|z\rangle=\frac{\hbar\omega}{2},\ \Delta Q\Delta P=\frac{\hbar}{2}。$$

所以在下节要讨论的 $\lambda Q+\nu P$ 可以称为是“转动”了的光场的正交分量,并具有可观测的意义(见 1.2 节和 1.3 节)。

另一方面,场的正交分量的本征态提供了使正交分量(算符)得以压缩的压缩算符的自然表示,例如 Q 的本征态 $|q\rangle$ 提供的单模压缩算符是

$$S_1\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{q}{\mu}\right\rangle\left\langle q\right|,S_1QS_1^{-1}=\mu Q,S_1PS_1^{-1}=P/\mu。$$

在书[1]第三章中创造的有序算符内的积分技术[2]~[11](Integration within an ordered product of operators——IWOP)使上式积分可以干净利落地实现

$$\int\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{q}{\mu}\right\rangle\left\langle q\right|=\exp\left(-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda\right)\cdot\exp\left[\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\ln\operatorname{sech}\lambda\right]\exp\left(\frac{a^2}{2}\tanh\lambda\right),$$
$$\mu=\mathrm{e}^{\lambda}。\tag{1.1}$$

对于双模压缩算符,书[1]的§4.13中也给出了其自然表示