

338538
成都工业学院图书馆

基本馆藏

中等专业学校教材

大地測量計算和平差

曹鴻彝 高昌洪 都潤祥 合編



中国工业出版社

中等专业学校教材



大地測量計算和平差

曹鴻彝 高昌洪 都潤祥 合編

中国工业出版社

本书是根据中等专业学校大地测量专业的教学计划和大地测量计算和平差教学大纲编写的。

全书共九章，以实际操作方法为主，以Ⅰ、Ⅳ等三角测量平差为重点，其他部分仅作了一般性的说明。

本书可作为中等专业学校大地测量专业的试用教材，亦可供有关业务人员参考。

大地测量计算和平差

曹鸿彝 高昌洪 都润祥合编

国家测绘总局测绘书刊编辑部编辑（北京三里河国家测绘总局）

中国工业出版社出版（北京沙滩后街10号）

北京市书刊出版业营业许可证出字第110号

中国工业出版社第一印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ ·印张 $137^{7/16}$ ·插页7·字数344,000

1964年1月北京第一版·1965年5月北京第三次印刷

印数1,631—3,690·定价(科四)1.80元

统一书号: K15165·2513(测绘-86)

前 言

本书系适应教学需要，提高教学质量，在以往自编讲义的基础上，結合当前生产实践，編写而成。

全书共分概論、大地位置計算、高斯平面直角坐标、条件观测平差、Ⅲ、Ⅳ等三角测量平差、間接观测平差、高程测量平差、导綫测量平差、多組平差与三边鎖平差的概念等九章。其中以条件观测平差，Ⅲ、Ⅳ等三角测量平差，間接观测平差为重点，作了比較詳細的叙述；其他各章偏重于实际作业方法的介紹，有关理論部分仅作了必要的闡述，比較复杂的公式大部沒有推导。

本书是根据中等专业学校大地测量专业大地測量計算和平差的教学大綱編写的，可作为中等专业学校大地測量专业的試用教材，亦可作为有关业务人員的参考书。

本书由曹鴻彝主編，由曹鴻彝、高昌洪、都潤祥三人协作編写而成。由于編者水平有限，在編写过程中虽然参考了部分有关文献；整理了以往教学中的經驗和体会；并經過多次討論，但缺点和錯誤在所难免，希讀者提出批評和意見，以便再版时修改。

編 者

1962 12.

目 录

前 言

第一章 概論	1
§1-1 大地測量計算概論	1
§1-2 計算機的使用	4
第二章 大地位置計算	10
§2-1 地球橢圓體	10
§2-2 橢圓體面上點位的坐標系統	13
§2-3 曲率半徑	15
§2-4 子午圈、平行圈和法截綫的弧長	17
§2-5 相對於法截綫和大地綫	21
§2-6 三角測量中直接觀測值的歸算	23
§2-7 球面角超及球面(或橢球面)上小三角形的邊長解算	30
§2-8 大地子午綫收斂角和大地方位角的推算	35
§2-9 大地坐標計算	37
§2-10 史賴伯大地坐標正算公式	39
§2-11 高斯反解大地問題第二公式	52
§2-12 橢圓體面上的直角坐標	54
第三章 高斯平面直角坐標	60
§3-1 地圖投影概說	60
§3-2 高斯-克呂格投影的基本概念	66
§3-3 由大地坐標求高斯平面直角坐標	68
§3-4 由高斯平面直角坐標求大地坐標的公式	78
§3-5 高斯子午綫收斂角	81
§3-6 方向改正	83
§3-7 距離改正	88
§3-8 高斯投影分帶和實用坐標	91
§3-9 三角網展繪到高斯投影平面上的概念	94

§3-10 高斯坐标由一个投影带换算到另一个投影带.....	98
第四章 条件观测平差.....	107
§4-1 三角测量平差计算概论.....	107
§4-2 图形条件.....	111
§4-3 圆周角条件.....	115
§4-4 测站条件.....	117
§4-5 极条件或边条件.....	120
§4-6 基线条件和固定边条件.....	130
§4-7 方位角条件和固定角条件.....	139
§4-8 坐标条件.....	142
§4-9 自由网中条件方程式的选择.....	155
§4-10 自由网中独立条件方程式的个数.....	160
§4-11 非自由网中条件方程式的选择.....	164
§4-12 非自由网控制条件的数目.....	170
§4-13 条件方程式解算及最小二乘法的主要特点.....	174
§4-14 非等精度观测条件方程式的解算.....	181
§4-15 法方程式的组成.....	189
§4-16 组成法方程式时的检算.....	193
§4-17 法方程式的解算.....	196
§4-18 法方程式的检算.....	201
§4-19 法方程式的解算格式.....	204
§4-20 改正数的计算.....	207
§4-21 角度观测结果的精度估计.....	210
§4-22 条件方程式常数项容许值的确定.....	212
§4-23 三角测量平差元素精度的估计.....	216
§4-24 各等三角测量的平差程序.....	226
§4-25 自由三角网按方向平差示例.....	228
第五章 III、IV等三角测量平差.....	241
§5-1 概论.....	241
§5-2 克吕格分組平差基本原理.....	243
§5-3 一点插入一角的平差.....	258
§5-4 一点插入一三角形的平差.....	262

§5-5	两点插入两固定点的平差	266
§5-6	四边形中插入一点的平差	268
§5-7	綫形三角鎖的平差	273
第六章	間接观测平差	287
§6-1	間接观测平差的概念	287
§6-2	組成誤差方程式的基本原理	287
§6-3	史賴伯法則的基本原理	292
§6-4	法方程式的組成、解算与精度估算	296
§6-5	双点交会平差示例(按方向进行坐标平差)	299
§6-6	按角度进行坐标平差	312
§6-7	多次后方交会平差示例(按角度进行坐标平差)	315
§6-8	坐标角平差的基本原理	323
§6-9	条件平差和坐标平差的比較和选用	337
第七章	高程平差	341
§7-1	高程平差的基本原理	341
§7-2	以逐次趋近法作高程平差示例	351
§7-3	以逐次趋近法作水准网平差示例	355
第八章	导綫平差	358
§8-1	导綫平差的基本原理	358
§8-2	附合导綫平差示例	364
第九章	多組平差与三边鎖平差概念	366
§9-1	多組平差的概念	366
§9-2	三边鎖平差概念	394
参考文献		410
附录(一)	方向系数表	411
附录(二)	檢核(a)及(b)計算的輔助表	422
附录(三)	角度正弦1"之对数差,以第六位小数为单位	424

第一章 概 論

§1-1 大地測量計算概論

大地測量的最終目的，是求定大地點的坐標和高程。外業手簿中所記錄的和經過整理的大地測量成果，只是最基本的原始資料。根據這些原始資料，在室內進行系統的整理和計算，才能得到大地點的最終成果——坐標和高程。因此，大地測量計算（包括平差計算）是大地測量的最後工序。從外業手簿的檢查整理起，到求得大地點的最終成果止，全部的工作過程，都屬於大地測量計算的內容。

大地測量計算是根據已知數據（包括起始大地成果，觀測量和數學來源的數值），按照預先選定的公式，遵循一定的規則和順序進行的數學計算。其結果的可靠程度，取決於各個方面的因素。這裡僅就計算方面的因素說明如下：

由於各種條件的限制，觀測值都包括有不可避免的誤差，所以，一切觀測值都是近似值。它與數學來源的近似值不同，只能用一定個數的準確有效數字來表示。其具體有效數字的個數，應由觀測精度來確定，不能人為的增減。人為的減少，就會降低實際的觀測精度；人為的增加，除增添無意義的計算工作量而外，不但不能提高精度，反而構成虛假現象。因此，一切觀測成果，只應包括具有充分根據的、能反映實際測量精度的必要個數的準確有效數字。

起算數據準確有效數字的個數，不能少於下一級計算的要求。

數學來源的數值，例如： $\pi=3.14159265\dots\dots$ ； $\rho''=206,264.806\dots\dots$ 等等，可以用無窮多個準確有效數字來表示。實際計算中，不可能也不必要採用無窮多個準確有效數字，只能根據計算

的要求，对所采用的无理数进行凑整，留用必要的个数。

綜合以上所述得知，大地測量計算中所采用的数据，除少数自然数而外都是近似值。由于近似值本身的誤差和凑整誤差在計算过程中的积累，計算結果的精度，常常低于原始观测的精度。为了减小这些誤差对計算結果的影响，中間运算須比最后結果多取一位有效数字。例如：由中誤差确定的测角精度为十分之一秒，計算中采用的观测值应取到百分之一秒（最后結果仍凑整到十分之一秒）。这样做，对計算工作量虽有一定程度的增加，但对保証最終成果精度来讲，仍然是必要的和适宜的，它与任意增减有原則区别，不能同等看待。

应用完备的公式进行計算时，計算結果的精度完全取决于采用数据的精度和計算誤差。但当未知量与地球橢圓体的元素有关时，由于技术上的原因，只能采用有关的近似公式进行計算。此时，計算結果的精度，除上述原因外，还决定于近似公式的精度。为了免除近似公式对最后結果的影响，实际計算中，应适当确定近似公式改正項的取用項数。

为了使計算能够順利而完善地进行，对三角网、鎖的起算数据、观测方法和精度的分析是非常重要的。因为，只有在这个基础上，才能正确地选用平差方法和計算公式。

周密的計算格式，能使計算簡便和規律化，达到減輕計算工作量和提高工效的目的。因此，表格設計也是平差計算工作中一个重要的工作內容。

大地測量計算可以采用对数法和真数法来进行，具体选择，主要决定于計算工具和計算用表。計算用表的位数，应与計算精度相适应。因为， n 位計算用表，只能求得 n 位有效数值。三角函数表和三角函数对数表的位数，决定于角度的精度，即当：

角度的精度低于 $10''$ 时，采用四位三角函数表（或三角函数对数表）；

角度的精度低于 $1''$ 时，采用五位三角函数表（或三角函数对

数表)；

角度的精度低于 $0''.1$ 时，采用六位三角函数表（或三角函数对数表）；

角度的精度低于 $0''.01$ 时，采用七位三角函数表（或三角函数对数表）。

上述的关系，无论由角度求三角函数值；由三角函数值求角度；或由角度求三角函数的对数值；由三角函数的对数值求角度，都必须严格遵守。

大地测量平差计算，是一个复杂的整体计算工作，计算过程中任何一个微小的错误，都将导致大部或全部返工。因此，检查计算是整个平差计算中不可缺少的重要组成部分。

检查计算的方法很多，除计算过程中的附加检算外，两人对算是应用较多的一种。具体选择视要求和人力而定，不一一列举。

转抄计算成果，不仅增加工作量，而且会增加错误。因此，除起始数据及有关必须重抄的数据外（要仔细进行校对），一切计算都要直接填写在计算表格中，严禁使用草稿纸做附属记录和最后重抄。

平差计算的结果，特别是高等级三角测量的平差计算结果，使用的机会很多，并需长期保存。因此，除应保持整洁美观外，所有的数字必须清楚易认，并用墨水按照印刷体书写。

计算过程中有关数字的位数，因三角网锁的等级而异，应参考有关规定执行。

数字的凑整，根据近似数的凑整原则进行，即在任何情况下，凑整误差的绝对值，不得超过留下的最末一位有效数字的半个单位。计算用表：如对数表，三角函数表，三角函数对数表等，最末一位有效数字都是按上述凑整原则求得的，并注有相应的符号，使用时应特别注意，以避免不适当的凑整。

三角测量平差计算，一般分为概略计算、平差计算和精算三个步骤。概略计算的目的是将外业观测成果化算为符合平差计

算要求的成果。其主要內容有：(1)外業資料的檢查（包括觀測手簿和歸心投影用紙）；(2)編制三角網資用略圖；(3)邊長概算和球面角超計算；(4)近似坐標計算；(5)歸心元素綜合表的編制和歸心改正數 c'' 和 r'' 的計算；(6)大地綫曲率改正數 δ'' 的計算；(7)方向值表的編制；(8)觀測精度估算。平差計算是在概略計算的基礎上進行的，它是應用最小二乘法的原理，計算各觀測值的最或是改正數，從而消除由於多余觀測和觀測誤差同時存在所引起的各種矛盾。根據平差後的方向值（或角度值）計算最終成果（包括邊長、坐標方位角和坐標）則屬於精算。

根據作業單位的實際情況及教學上的方便，把概略計算部分併入到大地測量有關章節中講述，而將大地位置計算及高斯直角坐標等內容，在本書內講述。

本書就主要的平差方法原理和實施作比較詳細的系統敘述，而對實際作業中的一些改進辦法，未作全面介紹。

§1-2 計算機的使用

大地測量計算中，計算機已成為普遍使用的計算工具。目前使用的計算機，雖然型號不一，但構造大体相同。現以國產“飛馬牌”手搖計算機為例，說明其構造，基本計算方法和使用中應注意的事項如下：

一、部件介紹：飛馬牌手搖計算機有十三個主要部件，參照圖1-1，其名稱是：

- | | |
|---------|-----------|
| 1.撥數杆 | 8.右歸零扳手 |
| 2.對照盤 | 9.對照盤歸零扳手 |
| 3.搖柄 | 10.指示箭頭 |
| 4.左指示盤 | 11.定位針 |
| 5.右指示盤 | 12.安全針 |
| 6.移動扭 | 13.乘除機鈕 |
| 7.左歸零扳手 | |

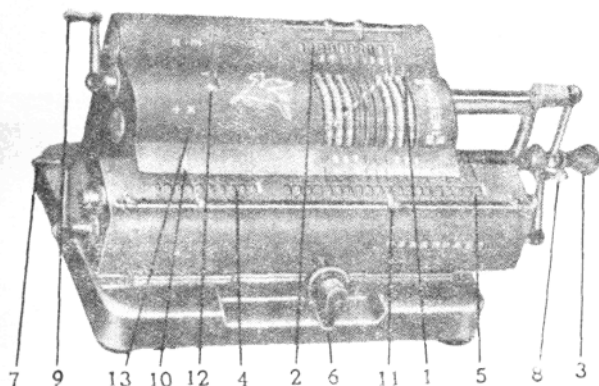


图 1-1

注意：当转动摇柄“3”时，应将摇柄稍许向右拉。

二、基本计算方法（以大地测量计算中常用者为主）：

1. 加法的计算程序 例如， $345 + 549 = 894$

(1) 将乘除机钮拨至“×”的方向；

(2) 用拨数杆拨出被加数(本例为345)；

(3) 将摇柄正摇(顺时针方向)一整周，滑架的右指示盘上即出现被加数(本例为345)；

(4) 搬动对照盘归零扳手，使对照盘归零。对正小数位数，仿(2)用拨数杆拨出加数(本例为549)；

(5) 将摇柄再正摇一整周，右指示盘上即出现所求的和数(本例为894)；

(6) 当很多数连加时，仿(4)与(5)步骤连续操作，直至最末一个加数，则右指示盘上的数字，即为所求的总和。

2. 减法的计算程序 例如， $894 - 345 = 549$

(1) 将乘除机钮拨至“×”的方向；

(2) 用撥數杆撥出被減數(本例為894);

(3) 將搖柄正搖一整周, 右指示盤上即出現被減數(本例為894);

(4) 搬動歸零扳手, 使對照盤歸零。對正小數位數, 仿(2)用撥數杆撥出減數(本例為345);

(5) 將搖柄倒搖(逆時針方向)一整周, 右指示盤上即出現所求的差數(本例為549);

(6) 當連減很多數時(被減數為一個, 減數有若干個), 仿(4)與(5)步驟連續操作, 直至最末一個減數, 則右指示盤上的數字, 即為所求的差數;

(7) 若有加、有減時, 分別按加法和減法的程序進行, 則右指示盤上最後保留的數字, 即為所求的結果。如出現

$$99,999,999,998.765$$

時, 則表示所求的結果為“負”數, 具體數字為其餘數, 即“-1.235”為所求的最後結果。

3. 乘法的計算程序 例如 $34,685.246 \times 7635.24$

$$= 264,830,177.66904$$

(1) 將乘除機鈕撥至“ $\times$ ”的方向;

(2) 確定各數的小數點位置。本例中, 被乘數的定位針在撥數杆上放在“3—4”之間的位置; 乘數的定位針在左指示盤上放在“2—3”之間的位置; 積的定位針在右指示盤上放在“5—6”之間。

(3) 用撥數杆撥出被乘數(本例為34,685.246);

(4) 將指示箭頭對準乘數最末一位數應在的位置, 正搖搖柄, 其轉動周數同乘數最末一位數字的數值(本例為4), 此時左指示盤上最末一位出現“4”;

(5) 用移動機鈕將滑架向右移動一位, 正搖搖柄, 其轉動周數同乘數倒數第二位數字的數值(本例為2), 此時左指示盤上最末兩位出現“24”;

(6) 仿(5)連續進行, 直至左指示盤上得出全部乘數的數字

为止(本例为 7635.24)。此时,右指示盘上的数字即为所求的乘积(本例为 264,830,177.66904);

(7) 当许多数连乘时,首先仿上述方法求出前两数的积,然后将右指示盘上的数字撥在撥数杆上,并使左、右指示盘归零。再将第三个乘数作为乘数,用上法进行计算,直至乘完最后一个乘数的全部数字为止。此时,右指示盘上的数字即为所求的最后乘积。

4. 除法的计算程序 例如, $538.7768 \div 14.367$ (残余 0.0143)

(1) 确定各数的小数点位置。本例中,将对数盘的定位针放在“8—9”间的位置;左指示盘的定位针放于“8—9”间的位置;右指示盘的定位针放在“16—17”间的位置;

(2) 对准小数位置,在撥数杆上撥出被除数(本例为 538.7768);

(3) 将指示箭头指向左指示盘的个位上(本例为“9”的位置),正摇摇柄一整周,将被除数移至右指示盘上;

(4) 使对数盘和左指示盘归零;

(5) 将乘除机鈕撥至“÷”的方向;

(6) 对准小数点位置,在撥数杆上撥出除数(本例为 14.367);如被除数的第一位数字大于除数的第一位数字,则用移动机鈕使除数的第一位数字对准被除数的第一位数字;如被除数的第一位数字小于除数的第一位数字,则用移动机鈕使除数的第一位数字对准被除数的第二位数字(由左向右数);

(7) 倒摇摇柄直到鈴响后再正摇摇柄一正周止;

(8) 将滑架向左移动一位,仿(7)继续进行直到要求的商数的位数为止;此时,左指示盘上出现的数字即为所求的商(本例为 14.367,右指盘上残余 0.0143);

5. 开平方方法的计算程序 例如, $\sqrt{676} = 26$

(1) 仿除法,将被开方数移到右指示盘上;

(2) 把乘除机鈕撥至“÷”的方向;

(3) 将被开方数分节，从小数点起向左向右分，每两数为一节；

(4) 在撥数杆上对正被开方数最左面一节的个位数撥“1”，倒搖搖柄一整周；之后，撥数杆每增加“2”，倒搖搖柄一整周，直到鈴响再正搖搖柄一整周为止；

(5) 在撥数杆上的个位数減“1”，并在右面一位上撥“1”；

(6) 将滑架向左移动一位，并倒搖搖柄一整周；

(7) 仿(4)，撥数杆上的个位数每增加“2”，倒搖搖柄一整周，直到鈴响再正搖搖柄一整周为止（本例为26，右指示盘亦为零）；以下仿上面的方法进行，到求得要求的結果为止；

(8) 平方根的小数点位置，由視察法直接确定。

6. 乘积的代数和的計算程序 例如

$$1.34 \times 27.2 + 5.673 \times 12.5 - 387.27 \times 0.2689 = 324.242$$

(1) 将乘除机鈕撥至“×”的方向；

(2) 以乘数和被乘数中小数位数最多的两个数为准，仿乘法，分別在撥数杆和左、右指示盘上确定定位針的位置（本例順次定在“3—4”；“4—5”及“7—8”之間）；应当注意：当定位針的位置撥定后，除每一因数都必須依定位針为准外，在求得最后結果之前，定位針的位置不得再有任何变动，否則就无法求得正确的結果；

(3) 除下面两点外，全部运算均与乘法相同；

(i) 两数的乘积为負时，将乘除机鈕撥至“÷”的方向，类似乘法运算，唯要倒搖搖柄，并不顧及鈴响；

(ii) 在未求得最后結果之前，右指示盘上的数字不能消去；

(4) 如最后結果为負时，仿減法的情况处理。

7. 具有同一除数的多个除法的計算程序 例如

$$3145 \div 256 = 12.28515625,$$

$$2145 \div 256 = 8.37890625,$$

$$3849 \div 256 = 15.03515625.$$

(1) 仿一般除法求除数的倒数，为了减少凑整误差的影响，倒数的有效数字应多取1—2位数。本例为

$$\frac{1}{256} = 0.00390625.$$

- (2) 将所得的倒数视为被乘数，撥在撥数杆上；
- (3) 左、右指示盘同时归零；
- (4) 按乘法顺序求除数的倒数与各被除数的乘积，即得各个商数。

三、使用手搖计算机应注意的事项：

1. 領到计算机后，首先檢視各机件是否完整、洁淨，运转是否灵活；其次按下法检查其运算的正确性，即由左至右在撥数杆上撥出数字 123456789，正轉搖柄 9 次，右指示盘上应出現 1111111101；再正轉搖柄 9 次，应得 2222222202；如再倒搖搖柄 18 次，則右指示盘应全部为零。否則，即說明计算机有毛病，經修理后才能使用。

2. 计算机必須放平、放实、不能一个脚騰空。轉动搖柄时，不能用力过猛，应用手腕适宜自在的回轉。遇有搖不动的情况，应立即停止使用，檢查毛病或送往修理，切莫用力搖动。

3. 对自己使用的计算机，应切实爱护，每周加油一次。

4. 計算过程中，严禁两种动作同时操作。

5. 搖柄必需轉动一周后，才能变换方向。不得在中途反方向搖动。

6. 休息时或計算完毕后，应全部归零，使各部件处于正常位置，并盖上防尘罩。

7. 计算机属于精密仪器之一，切忌受潮；应放在干燥、安全的場所。

第二章 大地位置計算

§2-1 地球橢圓體

就整个形状而言，地球的体形与旋轉橢圓體很相近。因此，实际工作中通常以地球橢圓體作为大地計算的基础。

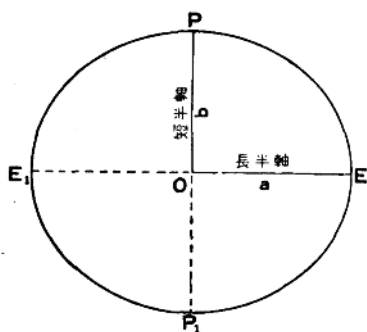


图 2-1

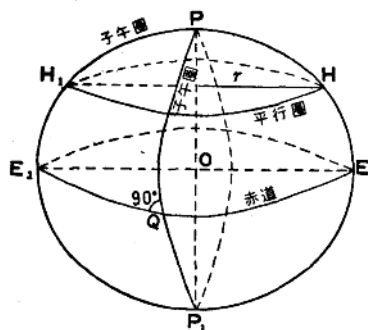


图 2-2

如图 2-1 橢圓 PEP_1E_1 表示地球橢圓體以 PP_1 为軸旋轉而成的一个有規則的閉合几何体。 PP_1 称为短軸，它的两端称为两极， P 端为北极， P_1 端为南极。設 O 为短軸的中点，則 OP 称为短半軸，以 b 表示之。 OE 称为长半軸，以 a 表示。过短軸中点 O 且与短軸垂直的平面，称为赤道面。赤道平面与橢圓體面的截綫 EQE_1 (如图 2-2)，称为赤道。显然，赤道为一圆周，它的半径就是长半軸 a 。

橢圓體的扁率

$$\alpha = \frac{a-b}{a}$$

橢圓體的第一偏心率

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$