

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

# 计算流体力学

*Computational Fluid Dynamics*

傅德薰 马延文 编著

高等教育出版社

5.2.1  
1.2 X

**研究生教学用书**

教育部研究生工作办公室推荐

# 计算流体力学

Computational Fluid Dynamics

高等教育出版社

## 内容提要

本书是为高等院校和科研单位研究生撰写的“计算流体力学”课程的教科书。全书共分九章。前五章讲述了计算流体力学中的基本概念和基本方法。包括流体动力学的诸方程和模型方程及其数学性质、数值解的理论依据、基本计算方法和数值解的行为分析等。计算方法包含有空间离散方法、代数方程和非定常方程(包括时间离散)的求解方法。这里涉及到的离散方法有有限差分方法、有限体积方法、有限元方法和谱方法。这些都是已经成熟和具有普适性的方法。书中描述了构造这些方法的基本思想,重点是有限差分方法。书中的后四章是针对各种物理问题讲述计算方法。这里包含低速不可压和高速可压缩流体运动数值模拟的计算方法和网格生成技术。着重阐述了针对不同物理问题的特征对计算方法精度的要求,及构造不同计算方法的基本思想,且给出了一些简单物理问题的数值模拟结果,以证实计算方法的有效性。

### 图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学/傅德薰,马延文编著. —北京:高等教育出版社, 2002.7

ISBN 7-04-011083-0

I. 计... II. ①傅...②马... III. 计算流体力学 - 高等学校 - 教材 IV. 035

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 031663 号

计算流体力学

傅德薰 马延文 编著

---

|      |                 |      |   |
|------|-----------------|------|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社         | 购书热线 | 010-64054588  |
| 社 址  | 北京市东城区沙滩后街 55 号 | 免费咨询 | 800-810-0598  |
| 邮政编码 | 100009          | 网 址  | <a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a> |
| 传 真  | 010-64014048    |      | <a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a> |

经 销 新华书店北京发行所  
印 刷 北京铭成印刷有限公司

|     |              |     |                   |
|-----|--------------|-----|-------------------|
| 开 本 | 787×960 1/16 | 版 次 | 2002 年 7 月第 1 版   |
| 印 张 | 14.25        | 印 次 | 2002 年 7 月第 1 次印刷 |
| 字 数 | 230 000      | 定 价 | 20.30 元           |

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

## 序

在19世纪，流体力学家曾努力寻找问题的解析解。20世纪上半叶，由于工程技术的需要，流体力学家又努力寻找问题的近似解。20世纪60年代后，由于计算机的迅速发展，使得寻找问题的数值解成为可能。从那时起，就逐步形成了计算流体力学这一新的学科。现在，计算流体力学不但已经成了解决工程技术问题的最有效的工具之一，而且也是流体力学基础研究中不可缺少的工具。因此，计算流体力学就不但是流体力学专业学生的必修课，而且也是很多其他专业学生应该学习的一门课程。

但是，目前无论是在国内还是国外，都很难买到一本好的计算流体力学的教科书。因此，教育部所属工程力学专业教学指导委员会就约请了本书作者专门来撰写这本书。

计算流体力学的发展非常迅速，而且由于流体力学问题的面非常之广，它要对付的问题也千变万化。所以要写好一本计算流体力学的书，首先选材就不容易。其次，能不能既把基本内容讲清楚，又能反映本学科的最新进展及发展方向更不容易。这些都要取决于作者的经验和水平。

本书的两位作者，是我国计算流体力学方面的著名学者。他们原先从事的是与航空航天技术有关的计算流体力学的工作，为我国航空航天技术的发展作出过重要的贡献。近年来，又从事与湍流的直接数值模拟有关的工作。而这两方面正是计算流体力学中发展最快和最困难的两个方向。两位作者不但从事具体的计算工作，而且对计算流体力学的基本理论和方法的发展，也有重要的贡献。特别是在一种重要格式，即紧致格式的发展上，他们可以说是代表了我国的最高水平，在国际上也有相当的影响。

如上所说，由于计算流体力学牵涉的面太广，一本书不可能包含一切而必须有所选择。我相信，两位作者的经验和水平将保证选材的合理性，也将保证能反应计算流体力学的最新进展和发展方向。特别是，两位作者曾经主编过“导弹与航天丛书”中的《计算空气动力学》一书，得到过很好的评价。

本书的内容既包含了适合流体力学专业本科生的内容，也包含了适

合于研究生的内容。这样安排是必要的，因为流体力学的研究生也可能，或更确切地说，往往来自其他专业。他们在本科生阶段的学习中，不一定学过计算流体力学。因此在研究生的学习过程中，必须从基本内容学起。本书不但可以用于学校的教学，对正在工作的工程技术人员和学校的教师，也将是一本很好的参考书。

周 恒

中科院院士

工程力学专业教学指导委员会(第二届)主任委员

2000年12月29日

# 前 言

本书是以中国科技大学研究生院流体力学专业和中国科学院力学研究所研究生班的“计算流体力学”讲义为基础，结合作者多年科学研究工作的实践，且参考了国内外一些计算流体力学的书籍，并吸收了国内外一些最新研究成果撰写而成。

随着计算技术的发展，计算流体力学自 20 世纪 60 年代中已形成一独立的学科分支，成为研究流体运动规律，解决很多工程实际问题的三大手段(理论、实验、计算)之一。近年来，随着高速巨型并行计算机的出现，计算方法不断创新，计算流体力学更有了日新月异的进展。它为流体力学的发展掀开了新的一页，成为当今最活跃的研究领域之一。

本书是为高等院校和科研单位研究生撰写的计算流体力学课程的教科书，可用于一般流体力学专业和工程力学专业的教材，也可作为本科高年级大学生和该学科研究工作者的参考书。特点是力求深入浅出地讲清楚计算流体力学的一些基本内容，着重阐明其基本概念、构造计算方法的基本思想及方法所依据的理论基础。强调计算流体力学的成果应主要体现在解决实际问题的能力上。目的是希望通过该课程的学习能了解计算流体力学的特点和研究问题的基本方法。完成课程的学习后，有能力阅读该学科的一些现有文献，且能将其基本方法应用于自己所关心的研究领域。

本书共分九章。前五章讲述了计算流体力学中的基本概念和基本方法。包括数值解的理论依据，基本计算方法和数值解的行为分析等。计算方法包含有在计算流体力学中更为成熟和更具有普适性的四种方法：有限差分法、有限体积法、有限元法和谱方法。第六章至第八章是针对各种物理问题讲述计算方法。第九章介绍了计算流体力学中的一重要技术——网格生成技术。应当指出，该书中所结合的物理问题重点是针对空气动力学中的问题来讲述方法。这一方面是因为该领域确实是计算流体力学应用最多和最活跃的领域；另一方面也是因为作者的工作领域所限。对于其他领域的应用，应适当增加内容。

书中的第四章至第七章由马延文编写；其他章节由傅德薰编写。全书由傅德薰和马延文共同定稿。

本书在编写过程中得到周恒院士和中科院力学研究所学位委员会多

位专家的热情指导和支持。原稿经周恒院士细心审阅，提出了很多宝贵意见，这是提高该书质量的关键。在此一并表示衷心感谢。

傅德薰 马延文  
2002年2月21日

# 目 录

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 主要符号表 .....                        | 1   |
| <b>第一章 引论</b> .....                | 1   |
| 1.1 计算流体力学及其特征 .....               | 1   |
| 1.2 计算流体力学的发展 .....                | 3   |
| 1.3 本书的目的和内容 .....                 | 5   |
| 参考文献 .....                         | 6   |
| <b>第二章 流体力学方程及模型方程</b> .....       | 7   |
| 2.1 流体力学基本方程 .....                 | 7   |
| 2.2 模型方程及其数学性质 .....               | 11  |
| 2.3 双曲型方程组的初边值问题 .....             | 17  |
| 2.4 Riemann 间断解 .....              | 27  |
| 参考文献 .....                         | 34  |
| <b>第三章 偏微分方程的数值解法</b> .....        | 35  |
| 3.1 有限差分方法 .....                   | 35  |
| 3.2 偏微分方程的全离散 .....                | 48  |
| 3.3 有限体积方法 .....                   | 54  |
| 3.4 有限元方法 .....                    | 57  |
| 3.5 谱方法 .....                      | 71  |
| 参考文献 .....                         | 78  |
| 习题 .....                           | 79  |
| <b>第四章 高精度有限差分法及数值解的行为分析</b> ..... | 81  |
| 4.1 模型方程及半离散化方程 .....              | 82  |
| 4.2 高精度差分逼近式 .....                 | 84  |
| 4.3 数值解的精度及分辨率分析 .....             | 91  |
| 4.4 数值解中的耗散效应与色散效应 .....           | 94  |
| 4.5 数值解的群速度 .....                  | 96  |
| 4.6 数值解行为的进一步分析 .....              | 100 |
| 4.7 时间离散的色散与耗散效应 .....             | 106 |
| 参考文献 .....                         | 108 |
| 习题 .....                           | 108 |
| <b>第五章 代数方程的求解</b> .....           | 110 |
| 5.1 Gauss 消去法 .....                | 110 |



|            |                                    |            |
|------------|------------------------------------|------------|
| 5.2        | 追赶法                                | 111        |
| 5.3        | 迭代法求解代数方程                          | 114        |
| 5.4        | 交替方向追赶法                            | 119        |
| 5.5        | 非线性方程的求解                           | 120        |
| 5.6        | 时间关系法及局部时间步长法                      | 121        |
| 5.7        | 多重网格技术                             | 124        |
|            | 参考文献                               | 126        |
|            | 习题                                 | 126        |
| <b>第六章</b> | <b>可压缩流体力学方程组的离散</b>               | <b>128</b> |
| 6.1        | 一维流体力学方程及 Jacobian 系数矩阵的分裂         | 128        |
| 6.2        | 一维 Euler 方程的离散                     | 133        |
| 6.3        | Godunov 间断分解法                      | 135        |
| 6.4        | Roe 格式与 Roe 分解                     | 137        |
| 6.5        | 多维问题的差分逼近                          | 141        |
| 6.6        | 粘性项的差分逼近                           | 146        |
|            | 参考文献                               | 148        |
|            | 习题                                 | 149        |
| <b>第七章</b> | <b>激波高分辨率差分格式</b>                  | <b>150</b> |
| 7.1        | 数值解中的非物理振荡                         | 150        |
| 7.2        | 一阶 TVD 格式                          | 157        |
| 7.3        | 二阶 TVD 格式                          | 159        |
| 7.4        | TVD 格式在流体力学方程中的应用                  | 163        |
| 7.5        | MUSCL 格式                           | 168        |
| 7.6        | 其他类型的激波高分辨率格式                      | 170        |
|            | 参考文献                               | 175        |
|            | 习题                                 | 176        |
| <b>第八章</b> | <b>不可压 Navier - Stokes 方程的差分逼近</b> | <b>178</b> |
| 8.1        | 控制方程                               | 178        |
| 8.2        | 求解定常 N - S 方程的人工压缩性方法              | 179        |
| 8.3        | 非定常原始变量 N - S 方程的求解                | 183        |
| 8.4        | 涡量 - 流函数法                          | 186        |
|            | 参考文献                               | 189        |
|            | 习题                                 | 189        |
| <b>第九章</b> | <b>网格技术</b>                        | <b>191</b> |
| 9.1        | 网格生成技术                             | 191        |
| 9.2        | 非结构网格                              | 199        |
| 9.3        | 基于非等距网格上的有限差分法                     | 203        |
|            | 参考文献                               | 205        |

---

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 习题 .....              | 205 |
| 专业名词索引 .....          | 206 |
| 外国人名译名对照表 .....       | 210 |
| <b>Synopsis</b> ..... | 211 |
| <b>Contents</b> ..... | 213 |
| 作者简介 .....            | 216 |

# 第一章 引 论

计算流体力学在 20 世纪 70 年代以来有了突飞猛进的发展,而且正在以更快的速度前进。推动这一发展的原因一方面是实际需求,另一方面是计算技术的飞速发展和高速巨型计算机的出现,使其发展成为一门独立的学科。计算流体力学是多领域的交叉学科。它所涉及的学科有流体力学、偏微分方程的数学理论、数值方法和计算机科学等。它的发展进一步促进了这些学科的发展。为了掌握该学科的基本内容,首先必须了解什么是计算流体力学,它的特征是什么。

## 1.1 计算流体力学及其特征

### 1.1.1 什么是计算流体力学

任何流体运动的动力学特性都是由质量守恒律、动量守恒律和能量守恒律所确定的。这些基本定律可由数学方程组(偏微分方程组或积分方程组)来描述,如欧拉方程(Euler 方程),纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes 方程,简称为 N-S 方程)等。利用数值方法通过计算机求解描述流体运动的数学方程,揭示流体运动的物理规律,研究定常流体运动的空间物理特性和非定常流体运动的时-空物理特征,这样的学科称为计算流体力学。

计算流体力学的兴起推动了流体力学研究工作的的发展。自从 1687 年牛顿定律公布以来,直到 20 世纪 50 年代初,研究流体力学的主要方法是两种:一是实验研究——以地面实验为研究手段;另一是理论分析方法——利用简化的流动模型假设,给出所研究问题的解析解或简化方程。理论工作者在研究流体运动基本规律的基础上,提出了各种简化流动模型,给出了一系列解析解和数值方法。这些研究成果推动了流体力学的发展,奠定了今天计算流体力学的基础。很多方法仍在目前解决实际应用中采用。然而,仅采用这些方法研究复杂非线性流体运动规律是不够的。它已不能满足 20 世纪 50 年代开始高速发展起来的近代科学技术的需求。

今天随着实际的需要,计算流体力学已发展成为流体动力学第三种

研究方法。它的兴起促进了实验研究和理论分析方法的发展。将实验研究与理论分析方法联系起来,为简化流动模型的建立提供了更多的依据,使很多简化方法得到了发展和完善。例如,目前在飞机工业中广泛应用的面元法就是一个很好的例子。然而,更重要的是计算流体力学采用它独有的新的研究方法——数值模拟方法——研究流体运动的物理特性。

### 1.1.2 计算流体力学的能力及限制

计算流体力学是采用数值方法直接求解描述流体运动基本规律的非线性数学方程组,通过数值模拟方法研究流体运动的规律。它不同于实验研究和理论分析方法。其特点主要有以下几点<sup>[1]</sup>:

#### 1. 扩大了研究范围

一些原来认为难以解决的问题,采用数值模拟方法可能得到解决。例如,研究汽车运动时,必须考虑相对于汽车运动的地面。这在实验中难以做到,但采用数值模拟方法求解  $N-S$  方程不难得到所需的数值解。又如超声速、高超声速钝体绕流、分离流、涡运动、真实气体效应、湍流直接数值模拟等问题都是原来认为难以求解的问题,今天通过数值模拟方法很多问题已得到解决。

#### 2. 能给出较完整的定量结果

若物理问题的数学提法(包括数学方程及其边界条件)正确,则数值模拟所能研究问题的流动参数(如雷诺数、流体性质、模型尺度、来流条件等)范围广泛。且能给出定常流动的空间流场和非定常流动的时-空流场的定量结果。这常常是实验研究和理论分析方法难以做到的。

#### 3. 数值解总是离散近似解

因为数值模拟的基本方法是通过离散方程逼近描述流体运动基本规律的数学方程及其边界条件。并需采用一定方法来求解这些离散方程。故即使所选择的数学方程是所研究物理问题的准确方程,由于在数值解中将引入误差,如离散误差,求解方法中的误差(迭代误差,舍入误差等),故所得到的数值解也是按一定精度逼近准确物理解的近似解。也就是说数值解总是离散的近似解。由于正确模拟不同的物理问题,所能允许的数值误差是不相同的,故一方面计算方法应当是针对不同的物理问题进行选择和构造;另一方面,必须认识数值解引入的误差。在本书中结合具体实例讲解了这些问题,讨论了数值方法的精度。

应当指出,要建立正确的数学方程,特别是对于复杂的流动问题,如燃烧、多相流、湍流等,还必须与实验研究和理论分析方法相结合。

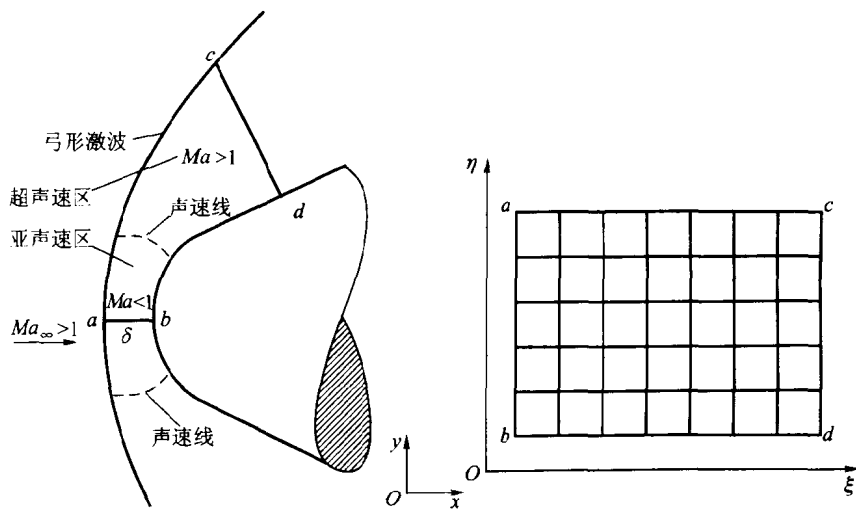
更重要的是计算流体力学中所求解的是非线性偏微分(积分)方程组,其数值方法的现有数学理论尚不够充分,严格的稳定性分析、误差估计和收敛性证明等理论工作的发展还跟不上数值模拟方法的进展。虽然关于广义解唯一存在性等问题的严格数学理论已取得了长足进展,但还不足以对一些复杂流动的求解问题给出明确的回答。所以,在计算流体力学中,一方面仍必须依靠对一些简单的、线性的、与原有问题有一定关系的数学方程进行严格的数学分析,依靠启发性的推理,分析非线性问题,给出数值解的理论依据;另一方面,依靠对线性和非线性数学方程的数值实验及数值解与地面试验值或他人典型算例的计算结果的比较和物理特性分析,验证计算结果,进一步改进计算方法。所以实验研究、理论分析和数值模拟方法是研究流体运动的三种基本方法,它们的发展是相互依赖相互促进的。

## 1.2 计算流体力学的发展

计算流体力学的发展与计算机技术的发展直接相关。这是因为采用数值方法可能模拟物理问题的复杂程度,解决问题的广度、深度和所能给出数值解的精度都与计算机的速度、内存和外围设备(如图像输出的能力)直接相关。一般来说,只有计算机的速度、内存和外围设备达到一新的水平时,才会有计算流体力学新阶段的出现。在文献<sup>[2]</sup>中 Chapman 将计算流体力学的发展进程分为四个阶段:1. 求解线性无粘流方程,如小扰动位势流方程;2. 求解非线性无粘流方程,如全位势流方程, Euler 方程;3. 求解雷诺平均 N-S 方程;4. 求解非定常全 N-S 方程。这就是按求解的数学方程逐步逼近非定常全 N-S 方程的过程,从易到难的过程。随着计算技术的提高,巨型计算机的出现,计算流体力学求解问题的深度和广度不断发展。它不但可用于研究一些物理问题的机理,解决实际流动中的各种问题,而且可用于发现新的物理现象,如, Kim 和 Moin 等人在槽道湍流的直接数值模拟中发现了倒马蹄涡,后来经实验研究所证实<sup>[3,4]</sup>。计算流体力学的研究领域也随着计算机速度和内存的增加而不断扩大。特别是大型并行计算机的问世使该学科的发展达到了一个新的阶段。近年来采用直接数值模拟和大涡模拟的方法,研究湍流所取得的成果足以使人们确信,采用数值模拟方法与实验研究相结合是突破多年来流体力学中的难题——湍流问题——的重要途径。

实际需求是促进该学科发展的关键。从 20 世纪 40 年代开始,随着

喷气式飞机、超声速导弹的出现，在气体动力学中提出了很多需要解决的问题。例如，飞行器以高超声速飞行时，为了防热需以钝头为前缘形状。故高超声速钝体绕流成为 20 世纪 50 年代末 60 年代初的重要气体动力学问题。该问题是难以用线性理论为基础的方法解决的。在图 1-1 中给出了钝体绕流的典型流场示意图。



(a) 钝体绕流示意图

(b) 计算平面网格

图 1-1 钝体绕流典型流场示意图

可以看出，在物面与头激波之间的流场包括有亚、跨、超声速不同性质的流动区域，是一个非线性激波问题。Liepman 和 Roshko 在 1957 年<sup>[5]</sup>中对该问题曾断言“目前，激波和脱体距离不可能有理论方法预测。”（这里，激波是指图 1-1 中的弓形头激波，脱体距离是指对称轴上头激波与物面驻点之间的距离）。而采用数值方法求解 Euler 方程和 N-S 方程，使该问题得以解决。随着计算流体力学的发展，今天已可以利用巨型计算机，采用合适的网格生成技术和有效的计算方法，求解三维 Euler 方程和三维 N-S 方程，给出各种飞行器（如航天飞机整机）的超声速、高超声速无粘和粘性绕流的复杂流场。

数值方法的理论研究促进了计算方法的发展。伴随着计算流体力学的发展，很多数学家研究了偏微分方程的数学理论。Hadamard, Courant 和 Friedrichs 等人研究了偏微分方程的基本特征、数学提法的适定性、物理波的传播特征和解的唯一性等问题，发展了双曲型偏微分方程理论。以后，Courant, Friedrichs 和 Lewy 等人发表了经典论文<sup>[6,7]</sup>，证明了

连续的椭圆型、抛物型和双曲型方程组解的存在性和唯一性定理。且针对线性方程组的初值问题，首先将偏微分方程离散化，证明了离散系统收敛到连续系统的条件。且利用代数方法确定了差分解的存在性。他们还讨论了双曲型方程的特征性质，给出了特征线方法和著名的稳定性条件——CFL (Courant, Friedrichs, Lewy) 条件。这些研究成果为数值方法奠定了理论基础。数值理论的研究促进了计算方法的发展，扩大了研究范围。

目前数值计算方法已成功地应用于数值模拟非定常多尺度的复杂流场，研究流动的失稳、拟序结构的形成及发展、流动的转换和湍流等<sup>[3,4,8-11]</sup>。

### 1.3 本书的目的和内容

随着计算技术和计算机科学的飞速进展，计算流体力学正以突飞猛进的速度向前发展，新的内容层出不穷。本书的目的不是全面介绍计算流体力学的现状，而是力求深入浅出地讲清楚一些基本内容。着重阐明计算流体力学中的一些基本概念，构造计算方法的基本思想及方法所依据的理论基础。并在一定程度上反映了计算流体力学中的最新成果。

本书的对象是高等院校和科研单位的研究生。也可作为该学科的教学和研究工作者的参考书。

本书的目的是使读者通过学习能了解这一学科的特点和研究问题的基本方法。完成该课程的学习后，有能力阅读该学科的一些现有文献资料，且能将其基本方法应用于自己所关心的研究领域。

全书共分九章。前五章讲述了计算流体力学中的基本概念和基本方法。包括流体动力学的诸方程和模型方程及其数学性质，数值解的理论依据和基本计算方法以及数值解的行为分析等。计算方法包含有空间离散方法、代数方程的求解方法和非定常方程(包括时间离散)的求解方法。这里涉及的离散方法有有限差分方法、有限体积方法、有限元方法和谱方法。虽然在离散方法中还有很多其他方法，如边界元方法、格子器方法等，但前四种方法是更为成熟和更具有普适性的方法。书中将描述构造这四种方法的基本思想，重点是有限差分方法。为了突出本课程的特点，书中所涉及的数值方法的理论(如 Lax 定理等)，都略去了数学证明过程，只给出了各种理论的结论。

书中的后四章是针对各种物理问题讲述计算方法。这里包含低速不可压和高速可压缩流体运动数值模拟的计算方法。着重阐述了针对不同

物理问题的特征对计算方法精度的要求, 及构造不同计算方法的基本思想, 且给出了一些简单物理问题的数值模拟结果, 以证实计算方法的有效性。在第九章简单介绍了网格生成技术。

## 参 考 文 献

- 1 傅德薰. 流体力学数值模拟. 北京: 国防工业出版社, 1993
- 2 Chapman D R. Trends and pacing items in computational aerodynamics. AIAA 79 - 129
- 3 Moin P, Kim J. The structure of the vorticity field in turbulent channel flow: Part 1, Analysis of instantaneous fields statistical correlations. J Fluid Mech, 1985, 155: 441 ~ 465
- 4 Kim J, Moin P. The structure of the vorticity field in turbulent channel flow: Part 2, Study of ensemble-averaged fields. J Fluid Mech, 1986, 162: 339 ~ 363
- 5 Liepmann HW, Roshko A. Elements of gasdynamics. New York: Wiley, 1957
- 6 Courant R, Friedrichs K O, Lewy H. On the partial difference equations of mathematical physics. IBM Journal, 1967 (11): 215 ~ 234
- 7 Richtmyer R D, Morton K W. Difference methods for initial-value problems. New York: Interscience, 1967
- 8 Kim J, Moin P, Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. J Fluid Mech, 1987, 177: 133 ~ 166
- 9 Fu Dexun, Ma Yanwen. A high order accurate difference scheme for complex flow fields. J Compt Physics, 1997, 134: 1 ~ 15
- 10 傅德薰, 马延文, 张林波. 可压混合层流动转捩到湍流的直接数值模拟. 中国科学(A辑), 2000, 30 (2): 161 ~ 168
- 11 Moser R D, Rogers M M. The three dimensional evolution of plane mixing layer: pairing and transition to turbulence. J Fluid Mech, 1993, 247: 275 ~ 320



## 第二章 流体力学方程及模型方程

描述流体运动基本规律，包括质量、动量和能量守恒律的数学方程组是计算流体力学研究问题的出发点。本章将认为读者已掌握了流体力学的基本知识。因此，这里将直接给出在计算流体力学中广泛应用的几种流体力学方程，其推导过程可参考文献<sup>[1-3]</sup>。为了描述不同物理问题的数学方程性质及其边界条件，本章通过模型方程简要介绍了流体力学基本方程的性质、定解条件及其边界处理等问题。目的是给出本书中所讨论问题的依据。

### 2.1 流体力学基本方程

#### 2.1.1 可压缩 Navier - Stokes 方程

流体力学的基本方程包括描述流体运动的质量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律方程，以及给出热力学关系式的状态方程。在直角坐标系  $Oxyz$  中，若不考虑外力，这些方程的量纲为一的守恒形式可写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3(\mathbf{U})}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}_3}{\partial z} \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + P) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(E + P) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_3(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho wv \\ w(E + P) \end{pmatrix}$$