随机过程

S

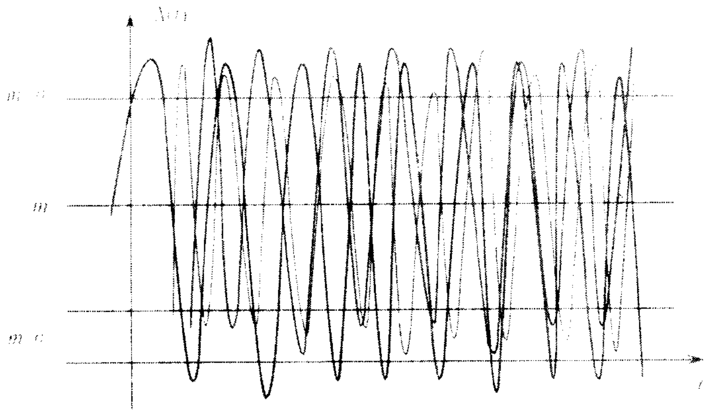
李裕奇 编著

SuiJiGuoCheng

国防工业出版社

随机过程

李裕奇　编著



国防工業出版社

·北京·

本书由西南交通大学教材出版基金资助出版

图书在版编目(CIP)数据

随机过程/李裕奇编著 .—北京:国防工业出版社,
2003.8
ISBN 7-118-03176-3

Ⅰ.随...　Ⅱ.李...　Ⅲ.随机过程　Ⅳ.0211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 049622 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码　100044)
北京奥隆印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 787×960　1/20　印张 18¼　349 千字
2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月北京第 1 次印刷
印数:1—4000 册　定价:22.00 元

内 容 简 介

本书是为高等院校非数学专业高年级学生和研究生编写的教材。内容包括概率论基础知识简介，随机过程的基本概念，随机过程的分布与数字特征，均方微积分，著名的泊松过程，平稳过程，马尔可夫过程等随机过程的基本理论与简单应用。

读者对象为高等院校计算机与通信、交通运输、工程、管理、经济、金融、物理与化学等专业的本科生、研究生与有关专业的技术人员。

读者只需具备概率论、微积分与线性代数知识，即可顺利阅读全书。

前　言

随机过程论是随机数学的一个重要分支，产生于 20 世纪初期，其研究对象虽然与概率论一样是随机现象，但区别在于它主要研究的是随“时间”变化的“动态”的、“整体”的随机现象的统计规律性。事实上，在实际生活中有许多随机现象，通常用一个或有限多个随机变量去描述就可以了，这就是概率论知识；而还有另外一类随机现象，仅用一个或有限多个随机变量去描述则不能完全揭示这些随机现象的全部统计规律性。因为在研究这些现象时，必须考虑其随时间进程发展变化的过程，不得不利用无穷多个随机变量去加以描述，而具有某种属性的无穷多个随机变量的集合就构成一个随机过程，因此，随机过程的诞生和发展，也就是顺应历史客观的需要。近 40 年来，随着物理学、生物学、自动控制，无线电通信及管理科学等方面的需求与发展，使随机过程逐步形成为一门独立的分支学科，在自然科学、工程技术及社会科学中得到日益广泛地应用和蓬勃地发展。

由于随机过程研究的是一族随机变量的统计规律性，一些基本研究方法借助于概率论方法，因此，学习随机过程，需要概率论的基础知识，因而在本书的第 1 章中，简要介绍了概率论的基本理论与方法，更多的概率论知识，可参阅参考文献[9]。

本书读者对象为高等院校计算机与通信、交通运输、工程技术、管理、经济、金融、物理与化学等专业的本科生、研究生及有关专业的技术人员。因此，本书较为系统地介绍了随机过程的基本概念、基本思想、基本原理与基本方法，内容包括随机过程的基本概念，分布与数字特征，均方极限、均方连续性、均方微分与均方积分，泊松过程，平稳过程的概念、遍历性与谱密度，马尔可夫过程概念、马尔可夫链、转移概率的遍历性与平稳分布知识等等。深入浅出的概念讲解，简明易懂的示例说明，条理清晰的逻辑推理，形象生动的图形显示，适时合理的习题安排，相信能使读者更加容易地掌握随机过程的基本理论与简单应用方法。

读者只需具备概率论、微积分与线性代数知识，即可顺利阅读全书。

本书承蒙西南交通大学教材出版基金资助出版，编者在此表示衷心的感

谢。

本书的出版得益于国防工业出版社、西南交通大学数学系的鼎力支持与帮助，也得益于数学系陈滋利教授，四川师范大学莫智文教授，概率统计教研室与统计咨询中心全体同仁的热情参与和支持，编者谨此一并表示由衷的感谢。

由于编者水平有限，书中难免会有疏漏与不妥之处，敬请同行与读者批评指正。

编　者

2003年1月于成都

目　录

第 1 章　概率论基础

概率论是研究随机现象的统计规律性的一门随机数学学科、是一门构造随机数学模型的基础理论，也是学习随机过程的基础。因此本章首先简要地介绍概率论的基本理论知识，作为学习随机过程理论的基础知识。

1.1　随机事件与概率

一、随机试验、随机事件与概率定义

一般来说，概率论中的试验是指对自然的观察或为某种目的进行的科学实验。如果此试验能在相同条件下重复进行；且每次试验的可能结果不止一个，事先明确试验所有可能结果；而每一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。这样的试验就是概率论的研究对象——随机试验。

随机试验的全部可能结果的集合称为样本空间，记作 S。随机试验的每一个可能结果，即组成样本空间的元素称为样本点，又称基本事件，记作 e。

故样本空间 S 可记作　$S=\{e\}$

而样本空间 S 的子集，即部分样本点的集合称为随机事件。通常用大写字母 A、B、C 等表示。若事件中至少一样本点发生时，称这一事件发生或出现。

由于样本空间 S 包括试验的全部的样本点、即每次试验每次都发生，故又称 S 为必然事件。而事件 ϕ 不包括任何样本点，即每次试验每次都不发生，故称为不可能事件。

由于随机事件是样本点的集合，因此事件间的关系与集合论中集合之间的关系是一致的。例如包含关系：若事件 A 发生导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，或事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$；$A\cup B=\{e|e\in A\text{或}e\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的和事件：当且仅当事件 A，B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生；$A\cap B=\{e|e\in A\text{且}e\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的积事件：即当且仅当事件 A，B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 才发生，可简记为 AB；$A-B=\{e|e\in A\text{且}e\notin B\}$称为事件 A 与事件 B 的差事件，当且仅当事件 A 发生，事件 B 不发生时，事件 $A-B$ 发生；

若$AB=\phi$，则称事件A与事件B互不相容，或称为互斥事件，即指事件A与事件B不能同时发生；若$AB=\phi$，且$A\cup B=S$，则称事件A与事件B互为逆事件，A的逆事件常记为$\overline{A}$等等。事件之间的运算规律与集合之间的运算规律也是一致的，亦具有下述规律：

交换律：$A\cup B=B\cup A \quad A\cap B=B\cap A$

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律：$A\cap(B\cup C)=AB\cup AC \quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad \overline{\cup A_i}=\cap\overline{A_i}$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \quad \overline{\cap A_i}=\cup\overline{A_i}$

定义 1.1.1 设E为随机试验，S为其样本空间，对于E的每一事件A，赋予一实数$P(A)$，若集函数$P(\cdot)$满足以下性质：

1° 非负性：$\forall A\subset S$，$P(A)\geqslant 0$

2° 规范性：$P(S)=1$

3° 可列可加性：若$A_1,A_2,\cdots$为两两互不相容事件列，即

$\forall i\neq j, A_iA_j=\phi$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称$P(A)$为随机事件A的概率。

概率具有以下几个简单性质：

1° 不可能事件发生的概率为零，即$P(\phi)=0$

2°（有限可加性）若事件$A_1,\cdots,A_n$两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

3° 若$A\subset B$，则$P(A)\leqslant P(B)$且$P(B-A)=P(B)-P(A)$

4° $\forall A\subset S$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

5° 对任意事件A，有$P(A)+P(\overline{A})=1$

6° 对任意事件A与B，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

且$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

二、古典概型概率计算方法

若随机试验的样本空间中的元素个数只有有限个，可记为$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，

且每个基本事件 e_i 出现的可能性相等，$i=1,2,\cdots,n$，即

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})=\frac{1}{n}$$

则称此试验为古典概型。对于任意一个随机事件 $A\subset S$，古典概型事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件总数}} \tag{1.1.1}$$

［例 1.1.1］　从 1, 2,…, 10 共 10 个数中任取一数，设每个数以 $\frac{1}{10}$ 的概率被取中，取后放回，先后取出 7 个数中，求下列事件的概率：

（1）A_1={7 个数全不相同}　　（2）A_2={不含 10 和 1}

（3）A_3={10 恰好出现 2 次}　　（4）A_4={10 至少出现 2 次}

解：$P(A_1)=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4}{10^7}=\dfrac{189}{3125}\approx0.06048$

$$P(A_2)=\frac{8^7}{10^7}=0.2097$$

$$P(A_3)=\frac{C_7^2 9^5}{10^7}=0.1240$$

$$P(A_4)=\sum_{k=2}^{7}\frac{C_7^k 9^{7-k}}{10^7}=1-P(\overline{A}_4)=1-\frac{9^7+C_7^1 9^6}{10^7}=0.1497$$

［例 1.1.2］　从三个相异数字中，重复抽取两次，所得结果不计次序，试问抽到两个不同数字组成的组合（A）的概率是多少？

解：$P(A)=\dfrac{C_3^2}{C_{3+2-1}^2}=\dfrac{3}{C_4^2}=\dfrac{3}{2\times3}=\dfrac{1}{2}$

［例 1.1.3］　在 10 个数字中 0, 1, 2, …, 9 中不重复地任取 4 个，能排成一个四位偶数的概率是多少？

解：$P(A)=\dfrac{A_9^3+4\times8\times A_8^2}{A_{10}^4}=0.4556$

因为从 10 个数字中不重复任取 4 个的取法是总数为 A_{10}^4，而 0 在个位的 4 位数共有 A_9^3 种取法，而个位为 2, 4, 6, 8，是首位不为 0 的取法数为 $4\times8\times A_8^2$ 种。

［例 1.1.4］　从 0, 1, 2, …, 9 等 10 个数字中任意选出 3 个不同数字，试求

下列事件的概率：

(1) $A_1=\{3$ 个数字中不含 0 和 $5\}$

(2) $A_2=\{3$ 个数字中不含 0 和 $5\}$

解：所取 3 个数不计序，属不重复的组合问题，基本事件总数为 $n=C_{10}^3$。

(1) $P(A_1)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$

(2) $P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\dfrac{C_8^1}{C_{10}^3}=1-\dfrac{1}{15}=\dfrac{14}{15}$

或利用概率加法公式得

$$P(A_2)=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}+\frac{C_9^3}{C_{10}^3}-\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}$$

三、条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式

定义 1.1.2 设 A, B 为两事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.1.2}$$

为在事件 A 发生条件下 B 事件发生的条件概率。

既然 $P(B\mid A)$ 谓之条件概率，则 $P(B\mid A)$ 必须满足概率的 3 条公理：

1° 非负性：$\forall B\subset S \quad P(B\mid A)\geqslant 0$

2° 规范性：$P(S\mid A)=1$

3° 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\middle| A\right)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i|A)$$

因此，概率的所有性质对条件概率依然成立。

将条件概率公式移项即得所谓的乘法公式：

设 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A) \tag{1.1.3}$$

［例 1.1.5］ 设 A, B 为两事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B\mid\overline{A})=0.4$，试求：

(1) $P(\overline{A}B)$

(2) $P(AB)$

(3) $P(A\cup B)$

解：(1) $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=(1-0.5)\times0.4=0.2$

(2) $P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.6-0.2=0.4$

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$

将乘法公式推广可得下述形式：

设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

特别地，当 n=2 即上述乘法公式，当 n=3 时，为

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_2)P(A_3\mid A_1A_2)\qquad P(A_1A_2)>0$$

利用乘法公式与互斥事件的概率加法公式可得著名的全概率公式：

定理 1.1.1 设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，若 B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个完备事件组（或称为 S 的一个划分），即满足条件：

1° $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容，即 $B_iB_j=\phi$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$

2° $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$，且有 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)\tag{1.1.4}$$

式(1.1.4)即称为全概率公式。

证：$P(A)=P(AS)=P(A\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=P(\bigcup_{i=1}^{n}(B_iA))$

当$i\neq j$时,$(B_iA)(B_jA)=A(B_iB_j)A=A\phi A=\phi$，故 $B_1A,B_2A,\cdots,B_nA$ 两两互不相容，由概率性质知

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_iA)$$

再用乘法公式，即得式（1.1.4）。

利用全概率公式与条件概率公式可得贝叶斯公式，即逆概公式。

定理 1.1.2 设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个完备事件组，即 S 的一个划分，且 $P(A)>0,P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}\quad i=1,2,\cdots,n\tag{1.1.5}$$

式（1.1.5）是 18 世纪英国哲学家 Thomas Bayes 首先总结出来的，所以称为贝叶斯公式。

证：$P(B_i \mid A)=\dfrac{P(B_iA)}{P(A)}=\dfrac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A \mid B_j)}$

可以这样说，$P(B_1),P(B_2),\cdots,P(B_n)$ 是人们对 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 发生可能性大小的经验认识，当发生新信息（知道 A）之后人们对 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 又有了新的认识，即 $P(B_1 \mid A),P(B_2 \mid A),\cdots,P(B_n \mid A)$，贝叶斯公式正是描述了这种认识的变化过程。

四、事件的独立性

定义 1.1.3 设 A,B 是两事件，如果具有等式

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.1.6}$$

则称 A,B 为相互独立事件。

由两事件相互独立性定义可以推知，若 4 对事件 A 与 B，$\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对是相互独立的事件，则另外各对也是相互独立的事件。实际上，若事件 A 与 B 相互独立，则其逆事件之间亦是相互独立的，这个概念可推广到多个事件情况中。

［例 1.1.6］ 设事件 A 与 B 相互独立，已知 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，试求 $P(\overline{B} \mid A)$。

解：
$$\begin{aligned}0.7=P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)=\\&P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\\&0.4+P(B)-0.4P(B)=\\&0.4+0.6P(B)\end{aligned}$$

解得

$$P(B)=0.3/0.6=\frac{1}{2}=0.5$$

又由事件 A 与 B 相互独立，故事件 A 与 $\overline{B}$ 也相互独立，所以有

$$P(\overline{B} \mid A)=P(\overline{B})=1-P(B)=0.5$$

容易将此概念推广到多个事件间的相互独立性：

定义 1.1.4 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，如果对于任意 $k\,(1\leqslant k\leqslant n)$个事件，若$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k},1\leqslant i_j\leqslant n, j=1,\ 2,\ \cdots,k$，均有

$$P(A_{i_1}\cdot A_{i_2}\cdot\cdots\cdot A_{i_k})=P(A_{i_1})(A_{i_2})\cdots(A_{i_k}) \tag{1.1.7}$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相互独立的事件。

在式（1.1.7）中包含了 $C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - n - 1$ 个等式，故在实际中按定义 1.1.4 来判断 n 个事件的独立性较为困难，通常是按试验与事件的实际意义来判断事件间的相互独立性。

1.2 随机变量及其分布

随机变量的引入是人类对随机事件统计规律认识的一大飞跃，随机变量及其分布理论的建立，使概率论真正成为一门数学学科。对于随机过程的讨论，也重在讨论随机过程的分布特征性质，因此随机变量不仅是概率论的基础，也成为随机过程论的基础。

一、随机变量及其分布函数

定义 1.2.1 设 E 为随机试验，其样本空间 $S=\{e\}$，若对于每一个 $e \in S$，均有一个实数 $X(e)$ 与之对应，这样一个定义在样本空间 S 上的单值实函数

$$X = X(e)$$

称为随机变量，其值域 $R_X \subset (-\infty, +\infty)$。

在样本空间上建立随机变量之后，就可用随机变量取值的集合来表示随机事件。实际上，随机事件为部分样本点的集合，而在样本空间上定义一随机变量之后，每一样本点对应随机变量的一个取值，部分样本点的集合，即为随机变量部分取值的集合，即随机变量的部分取值的集合为随机事件。

一般地，若 X 为 $S=\{e\}$ 上随机变量，$L \subset (-\infty, +\infty)$ 为实数集合，则

$$\{X \in L\} \triangleq \{e \mid X(e) \in L\}$$

表示一随机事件，这样，讨论样本点与随机事件的概率就转化为讨论随机变量 X 的可能取值与取值集合的概率。

进一步为达到建立数与数之间的映射，故引入分布函数概念：

定义 1.2.2 设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数

$$F(x) = P(X \leqslant x) \tag{1.2.1}$$

称为 X 的分布函数。

容易推出，随机变量的分布函数具有以下重要性质：

1° $F(x)$ 是一个不减函数，即 $\forall x_1 \leqslant x_2, F(x_1) \leqslant F(x_2)$

2° $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$， $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

3° $F(x)$ 是右连续函数，即 $F(x+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F(x+\varepsilon)=F(x)$

4° $\forall x_1\leqslant x_2, P(x_1<x\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)$

可以证明：若定义在实数空间 R 上的函数 $F(x)$满足性质 1° ~ 性质 3° ，则它必为某随机变量的分布函数。

从上述随机变量的分布函数的性质可以看出，随机变量的分布函数能够完整地描述随机变量的统计规律性。

[例 1.2.1] 如下 4 个函数，哪个可作为随机变量 X 的分布函数？

(1) $F(x)=\begin{cases}0 & x<-2\\ \dfrac{1}{2} & -2\leqslant x<0\\ 2 & x\geqslant 0\end{cases}$ (2) $F(x)=\begin{cases}0 & x\geqslant 0\\ \sin x & -2\leqslant x<0\\ 1 & x\geqslant \pi\end{cases}$

(3) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin x & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & x\geqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ (4) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x+\dfrac{1}{2} & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ 1 & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$

解：(1) 因为 $x\geqslant 0$ 时 $F(x)=2>1$ 故 $F(x)$ 不是分布函数；

(2) 当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$F(x)=\sin x$ 单调下降，不满足性质 1，故此 $F(x)$ 亦不是分布函数。

(3) $\forall x\leqslant 0$, $F(x)=0$, $\forall 0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $F(x)=\sin x$ 单调上升；当 $x\geqslant\dfrac{\pi}{2}$, $F(x)=1$，且 $F(x)$ 为连续函数，满足性质 1°~性质 3°，故此 $F(x)$ 是分布函数。

(4) $\forall x<0$, $F(x)=0, \forall 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}$, $F(x)=x+\dfrac{1}{2}$ 为单调上升函数；当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}, F(x)=1$，满足性质 1°~性质 3°，故此 $F(x)$ 是分布函数。

二、离散型随机变量

定义 1.2.3 若随机变量 X 的可能取值仅有有限个或至多为可列多个，则称此

随机变量为离散型随机变量。

即 X 的可能取值记可为 x_k， $k=1,2,3,\cdots$，且 X 取每个可能值 x_k 均具有一定的概率，这由离散型随机变量的概率分布（概率函数）来说明：

定义 1.2.4 设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 x_k，且 X 取值为 x_k 的概率，即事件 $\{X=x_k\}$ 的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k \qquad k=1,2,\cdots \tag{1.2.2}$$

若 p_k 满足条件：

$$1° \quad p_k \geqslant 0 \quad k=1,2,\cdots \tag{1.2.3}$$

$$2° \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k=1 \quad k=1,2,\cdots \tag{1.2.4}$$

则称式（1.2.2）为 X 的概率分布（概率函数）或分布律（列）。一般地，概率分布有 3 种表示方式：

(1) 分析表达式：

$$p_k=P\{X=x_k\} \qquad p_k \geqslant 0, \ \sum p_k=1$$

(2) 表格式或矩阵表达式

X	x_1	x_2	…	x_k	…
p_k	p_1	p_2	…	p_k	…

或

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

(3) 图形表达式

例如，某个随机变量的概率分布为

X	0	1	2	3	4	5
p_k	0.3277	0.4096	0.2048	0.0512	0.0064	0.0003

可用图形表示如下（见图 1.1）：

若 X 的概率分布为 $p_k=P(X=x_k), k=1,2,\cdots$, 则由分布函数定义可知，离散型随机变量的分布函数为

$$F(x)=\sum_{x_k \leqslant x} P\{X=x_k\}=\sum_{x_k \leqslant x} p_k \tag{1.2.5}$$