第二册

欧维义 主编

高等数学

（修订版）

吉林大学出版社

高 等 数 学

（修 订 版）

第二册

欧维义 陈维钧 赵为礼 王 毅 王树岩 编

吉 林 大 学 出 版 社

高 等 数 学

（修订版）

第二册

欧维义　陈维钧　赵为礼　王　毅　王树岩　编

责任编辑、责任校对：赵洪波　　封面设计：孙　群

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行
（长春市解放大路 125 号）　　长春市东方印刷厂印刷

开本：850 ×1168 毫米　1/32　　2000 年 9 月第 3 版
印张：10.875　　2000 年 9 月第 1 次印刷
字数：278 千字　　印数：18951—23950 册

ISBN 7-5601-2419-4/O·263　　定价：16.00 元

第一版　序

《高等数学》一书共四册. 第一册讲一元微积分和空间解析几何；第二册讲多元微积分和场的数学描写方法；第三册讲级数和常微分方程；第四册讲线性代数.

本教材在课程结构上，我们加强了那些有较深远影响的基本概念、理论和方法(如极限概念、中值定理、泰勒公式、微元法、场的数学描写方法和级数理论等等).

在应用方面，我们注重物理、力学对数学的渗透，并尽可能地使学生获得应用方面的信息.

在培养能力方面，关键是培养学生有效地使用数学工具. 为达到这个目的，重要的途径是解题. 多解题才能培养学生的运算能力、抽象思维能力和解决实际问题的能力. 为此，在本教材各节之后，多数都配备了 A、B、C 三类习题. 一般说，A 类题是理解和消化所学内容的基本题；B 类题是体现课程要求的中档题；C 类题则是培养学生思维能力、综合能力和技巧的选作题.

总之，本教材在加强基础、培养能力方面都做了一些新的探索. 希望在同样的教学时间内，获得更好的教学效果.

在编写教材的过程中，得到我们的老师江泽坚教授、李荣华教授、吴智泉教授的指导和帮助；得到赵为礼、王毅、潘吉勋、宋玉琦等同志的帮助. 在此，谨向他们致以谢意.

由于编者水平所限，错误和不妥之处，敬请读者指正和批评.

编　者

1986 年 4 月于吉林大学

第二版　序

本书是欧维义、陈维钧、金德俊编写的高等数学第二册的修改本. 这次修改主要是依据该书自 1986 年出版使用以来的教学实践和学生的学习实际，在对内容和习题做认真修改的同时，还对内容和习题做了较大的精简.

在酝酿和修改这本教材的过程中，多次召开了主讲过该课程的教师座谈会，王俊禹、高玉环、张慎学、夏中勇、尹景学、马富明、李勇、吕显瑞、李辉来等同志参加了会议. 他(她)们对原教材存在的问题，教材的修改都提出了很多具体意见和建议. 对修改好教材起了重要的作用. 在此谨向他们的帮助致以谢意.

本书的解析几何篇由赵为礼修改，多元微分学篇由欧维义修改，重积分和曲线积分由王树岩修改，曲面积分、广义积分和带参变量积分由王毅修改，最后由陈维钧、欧维义对全部书稿作统一校定. 原编者金德俊已于 1983 年调离吉林大学，没有参加这次修改.

编　　者

1991 年 8 月于吉林大学

第三版 序

本套书于1986年正式出版，在1994年再版时对内容和习题做了部分修改和精简．近几年又不断收集了使用者对本书的意见和建议．在今年5月初，出版社特邀了多位使用本书的主讲教师座谈，进一步听取大家对再版的具体修改意见．由于时间很紧，这次再版也只能做些修改工作，旨在满足本校及兄弟院校教学之急需．

本套书修订后的内容安排：第一册讲一元微积分；第二册讲空间解析几何和多元微积分；第三册讲场论、无穷级数和常微分方程；第四册已独立成书，书名为线性代数．书中各节配有习题，一般分为A、B两类：A类为基本题，B类为中、高档题．

当今，教学改革正在深入发展，呼唤出版一些具有创新思路的新教材，以适应新世纪培养人才的要求．一本好教材如同一件宝物，可藏之名山，也能传之久远．本书几经修订出版诚望能抛砖引玉．

最后，要感谢在这次修订中提出宝贵意见并参加工作的胡成栋教授、尹景学教授、姜诗章教授、姜杰教授和袁洪君教授等．特别要感谢吉林大学出版社的副总编卢喜观先生对本书再版的关心和支持．

编　　者

2000年8月于长春

目　录

第一篇　空间解析几何

第二篇 多元微分学

第三篇 多元积分学

第四篇　广义积分和含参变量积分

第一篇　空间解析几何

空间解析几何和平面解析几何一样，是用代数的方法研究几何问题．它的基本课题是“图形的方程，方程的图形”，也就是讨论各种空间图形几何关系的代数表达、计算和判别等等．

本篇内容包括：矢量代数(第一章)、平面和直线(第二章)、曲面和曲线(第三章)．

第一章　矢量代数

矢量代数是用代数方法研究矢量．本章的主要内容是以建立矢量的坐标表达式为基础，讨论从物理、力学模型中抽象出来的矢量的数量积、矢量积、混合积的坐标表达式、运算性质及其几何意义，并据此讨论矢量间的几何关系．

本章的重点是矢量的坐标表达式、方向余弦与方向数；矢量的“三个积”的几何意义及其坐标表达式．

§1　空间直角坐标

1.1　空间直角坐标系

为了确定空间点的位置，我们将平面直角坐标系的概念推

广到空间的情形. 在空间内选定三条交于一点 O 而又两两互相垂直的**数轴**(规定好原点、单位长度和正向的直线) Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴. 按照右手螺旋的顺序，就构成一个空间直角坐标系*. 通常，Ox 轴表示前后轴，Oy 轴表示左右轴，Oz 轴表示上下轴，总称为坐标轴. 其中任意两个轴所确定的平面叫做坐标平面，分别记作 Oxy 平面，Oyz 平面，Ozx 平面. 三个坐标平面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦限.

1.2　空间点的坐标

取定了空间直角坐标系以后，就可以用"有序数组"来表示空间中的点. 设 M 为空间一点(图 1.1)，过 M 作三个平面分别平行于坐标平面，顺次交三个坐标轴于 P，Q，R，如果它们在三个坐标轴上的坐标依次为 x，y，z，那么 M 点就唯一地确定一有序数组 x，y，z，称为点 M 的坐标，其中 x 叫做横坐标，y 叫做纵坐标，z 叫做竖坐标，记做 $M(x, y, z)$. 反之，任给一有序数组 x，y，z，那么也可以确定唯一的一点 M'，使其坐标恰好为 (x, y, z)**. 这样空间的点和有序数组 (x, y, z) 便建立了一一对应的关系，有序数

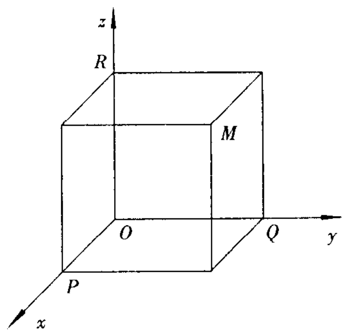

图 1.1

---

* 使右手的拇指、食指相互垂直，那么当拇指同 Ox 轴同向、食指同 Oy 轴同向时，则中指和 Oz 轴同向.

** M 点可以这样确定: 过 Ox 轴横标为 x 的点 P 作平行于 Oy 轴的直线 l_1；过 Oy 轴纵标为 y 的点 Q 作平行于 Ox 轴的直线 l_2，过直线 l_1，l_2 的交点，作垂直于 Oxy 平面的直线 l_3. 则其上竖标为 z 的点，就是我们要找的点 M'.

组(x, y, z)就成了空间的点的同义语.

在点的坐标概念的基础上，人们通常按照下面的顺序，把(x, y, z)空间用坐标平面分成的八个部分，依次取名为第一、第二、……、第八卦限：

由 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 所界定的范围，称为第一卦限；
由 $x<0$，$y>0$，$z>0$ 所界定的范围，称为第二卦限；
由 $x<0$，$y<0$，$z>0$ 所界定的范围，称为第三卦限；
由 $x>0$，$y<0$，$z>0$ 所界定的范围，称为第四卦限；
由 $x>0$，$y>0$，$z<0$ 所界定的范围，称为第五卦限；
由 $x<0$，$y>0$，$z<0$ 所界定的范围，称为第六卦限；
由 $x<0$，$y<0$，$z<0$ 所界定的范围，称为第七卦限；
由 $x>0$，$y<0$，$z<0$ 所界定的范围，称为第八卦限.

1.3 坐标的平移

为了讨论问题的方便，与平面坐标系平移变换概念相类似地，我们也来讨论空间坐标系的平移变换. 所谓平移，就是只移动坐标系的原点，不改变坐标轴的方向和长度单位.

设有坐标系 $Oxyz$ 和新坐标系 $O'x'y'z'$，$Ox \parallel O'x'$，$Oy \parallel O'y'$，$Oz \parallel O'z'$；新坐标系的原点 O' 在旧坐标系的坐标为(a, b, c)；点 M 在旧坐标系和新坐标系的坐标分别为(x, y, z)，(x', y', z').

如图 1.2 所示，因为

$$NM = NN' + N'M = N_0O' + N'M$$

所以 $z = z' + c$. 同理

$$x = x' + a$$

$$y = y' + b$$

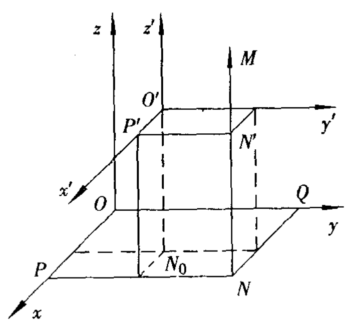

图 1.2

于是有以下坐标平移公

式：

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \\ z' = z - c \end{cases} \tag{1.1}$$

这就是说，在坐标平移下，一点在新坐标系的坐标等于该点和新坐标系的原点在旧坐标系下的相应的坐标之差.

1.4 两点间的距离

设有一点 $M(x, y, z)$，从图 1.3 容易看出

$$\begin{aligned} |OM|^2 &= ON^2 + NM^2 \\ &= OP^2 + PN^2 + NM^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

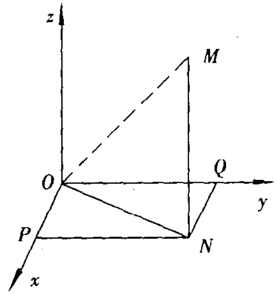

图 1.3

于是空间任一点 $M(x, y, z)$ 到原点的距离为

$$\begin{aligned} d &= |OM| \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

为了计算任意两点 $M(x_1, y_1, z_1)$与 $N(x_2, y_2, z_2)$之间的距离，我们把 $M(x_1, y_1, z_1)$取为新坐标系的原点，作坐标平移，那么由坐标变换公式(1.1)，有

$$x' = x_2 - x_1, \quad y' = y_2 - y_1, \quad z' = z_2 - z_1$$

其中(x', y', z')为点 N 在新坐标系下的坐标.

根据公式(1.2)知，N 点到新坐标系的原点(即 M 点)的距离：

$$\begin{aligned} d &= |MN| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

例 1.1 求证以 $M_1(4, 3, 1)$，$M_2(7, 1, 2)$，$M_3(5, 2, 3)$为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证 因为

$$|M_1M_2|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14$$

$$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6$$

$$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6$$

所以，$|M_2M_3|^2 = |M_3M_1|^2$，即三角形 $M_1M_2M_3$ 是一个等腰三角形.

例 1.2 在 Oz 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

解 因所求之点在 Oz 轴上，所以可设该点为 $M(0, 0, z)$，依题意

$$|MA| = |MB|$$

即

$$\sqrt{4^2 + 1^2 + (z-7)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (z+2)^2}$$

两边平方，解得 $z = \frac{14}{9}$. 于是所求的点为 $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$.

习　题

(A)

1. 写出下列各点坐标的一般形式：

1) M 点在 Oxy 坐标平面上；

2) M 点在 Oyz 坐标平面上；

3) M 点在 Ozx 坐标平面上；

4) M 点在 Ox 轴上；

5) M 点在 Oy 轴上；

6) M 点在 Oz 轴上.

2. 指出下列各点所在的轴及所在的坐标平面：

1) $M_1(4, 0, 0)$；

2) $M_2(0, -7, 0)$；