



全国十八所重点中学 编

帮你学

● 数理化 ●

教学辅导与解题技巧

◆ 高中1 年级第2 学期 ◆

BANG NI XUE

海洋出版社

为便于读者阅读使用,《帮你学》丛书改为按
年级和学期出版、每学年每学期出版一种,并分
做两部分(即教学辅导与解题技巧;期末考试试题
与题解)。

编 者

帮你学·数理化

教学辅导与解题技巧

高中1年级第2学期

全国十八所重点中学编

海洋出版社出版(北京市复兴门外大街1号)

新华书店首都发行所发行 国防科工委印刷厂印刷

开本: 787×1092毫米1/32 印张: 8 字数: 190千字

1989年2月第一版 1989年2月第一次印刷

ISBN 7-5027-0465-5/G·152

¥: 2.90 元

目 录

高中 1 年级第 2 学期

课 堂 辅 导

数 学

教学辅导	周期函数概念剖析.....邵光砚 (1)
	从函数解析式的改变看图象
	变化.....林宗圻 (6)
	和积互化公式的应用.....陈俊辉 (11)
	两个平面平行的性质与判定
	沈小青 马敏然 (16)
	怎样证明两个平面互相垂直
	唐清成 (21)
	多面体的截面.....王性复 (24)
	多面体的侧面积.....袁文彰 (30)
	旋转体的截面和侧面积.....张格民 (35)
	二面角.....王剑青 (39)
解题技巧	浅谈指数方程、对数方程的
	解法.....纪向胜 (43)
	两角和差三角函数的解题技
	巧.....王揖江 (46)
	二倍角公式及其应用.....徐望根 (51)

应用半角三角函数公式应注意

的几个问题……………丁志福 (57)

三角函数式的恒等证明

——典型例题剖析……………杨玉琴 (63)

异面直线两点间距离公式的

应用……………胡炯涛 (70)

谈谈点到直线、点到平面距

离的求法……………贺元泰 (76)

体积公式应用举例……………周国镇 (80)

课堂练习

两角和与差的三角函数练

习……………北京八中 (86)

三角函数练习题

……………中国人民大学附中 (97)

直线和平面练习……………杭州学军中学 (104)

多面体和旋转体练习

……………北京师范大学附中 (109)

物 理

教学辅导

机械能学习辅导……………陈运方 (119)

漫谈功的概念……………千 捷 (124)

谈谈动能定理与功能原理……………李小飞 (127)

动量与动能……………袁伦德 (132)

冲量和动量……………迟永昌 (137)

动量定理和动量守恒定理的

应用……………蒋国垣 (140)

简谐振动的回复力……………缪秉成 (145)

	振动图象和波的图象·····沈路平 (149)
	振动和波·····刘加林 (152)
解题技巧	浅谈变力功的计算·····舒明宙 (159)
	动量守恒定律与机械能守恒定律
	在解力学题中的应用·····林应基 (163)
	趣味物理题解析·····全伟 (166)
课堂练习	机械能练习·····北京景山学校 (169)
	动量练习·····福州三中 (174)
	机械能、动量、机械振动和
	机械波练习·····南京师范大学附中 (179)

化 学

教学辅导	碱金属知识小结·····江美琪 (189)
	化学中不可混淆的两组概念
	·····王美文 (192)
	怎样认识物质性质和物质结
	构的关系·····朱青华 (194)
	元素周期律和元素周期表·····康慈 (198)
	键的极性与分子的极性·····芮琴华 (205)
解题技巧	混和物计算题的解法·····徐伟念 (209)
	混和物百分比浓度的计算·····徐芳芝 (213)
	元素周期表和元素周期律的
	应用·····杨光禄 (217)
	键型、晶型及半径的判断·····王文彩 (221)
课堂练习	碱金属练习·····天津南开中学 (225)

原子结构及元素周期律练习

.....北京师范大学附中 (230)

化学键及分子结构练习

.....中国人民大学附中 (237)

化学综合练习.....北京大学附中 (244)

化学实验综合练习

.....上海师范大学附中 (253)



数学 · 教学辅导

周期函数概念剖析

清华大学附中 邵光砚

周期函数定义：对于函数 $y=f(x)$ ，如果存在一个不为零的常数 T ，使得当 x 取定义域内的每一个值时， $f(x+T)=f(x)$ 都成立，那么函数 $y=f(x)$ 叫做周期函数。不为零的常数 T 叫做这个函数的周期。如果在所有周期中存在一个最小正数，就把这个最小正数叫做最小正周期。

上述定义的核心是等式：

$$f(x+T)=f(x) \quad (*)$$

要想深入理解周期函数概念，就必须围绕等式 $(*)$ 明确下面几个问题。

1. 等式 $(*)$ 对函数 $f(x)$ 的定义域中的任意 x 值都成立，而不是对 x 的某些值成立

如：由 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}$ ，而得出 $y=\cos x$ 是以 π 为周期的周期函数，显然是错误的。

又如：

$$\text{函数 } f(x) = \begin{cases} 2 & (\text{当 } x \neq 0 \text{ 时}), \\ 1 & (\text{当 } x = 0 \text{ 时}), \end{cases}$$

取定任意一个确定的非零常数 T ，对于函数 $f(x)$ 定义域

中除去0和 $-T$ 外的任意 x 的值, 等式 $f(x+T)=f(x)$ 都成立。

但是当 $x=0$ 时, $\because f(0+T)=f(T)=2, (\because T \neq 0)$

而 $f(0)=1,$

$\therefore f(0+T) \neq f(0)。$

当 $x=-T$ 时, $\because f(-T+T)=f(0)=1,$

而 $f(-T)=2, (\because T \neq 0 \therefore -T \neq 0)$

$\therefore f(-T+T) \neq f(-T)。$

$\therefore f(x)$ 不是周期函数。

2. 周期 T 是非零常数且不唯一

如果我们忽略了定义中 $T \neq 0$ 的限制, 就会得出所有的函数都是周期函数的荒谬的结论, 这是因为: $f(x+0)=f(x)$ 对任意的 x 的值是恒成立的。

T 是常数是指在等式(*)中, 当 x 取遍 $f(x)$ 定义域中的一切值时, T 是不变的。即: 不能对定义域中的某些值 x' , 有 $f(x'+T_1)=f(x')$ 成立, 而对定义域中的另一些值 x'' , 却有 $f(x''+T_2)=f(x'')$ 成立。 $(T_1 \neq T_2)$

如果对于函数 $f(x)$ 存在一个非零常数 T , 对于定义域中的任意 x 的值等式(*)都成立, 则这样的 T 值必组成一个无限集。我们不难证明: 若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 $nT (n \in N)$ 都是 $f(x)$ 的周期。这是因为:

$$\begin{aligned} f(x+nT) &= f([x+(n-1)T]+T) \\ &= f[x+(n-1)T] = f([x+(n-2)T]+T) \\ &= f[x+(n-2)T] \\ &\dots\dots\dots \\ &= f(x+2T) = f[(x+T)+T] \end{aligned}$$

$$= f(x+T)$$

$$= f(x)。$$

要证明一个函数 $f(x)$ 是周期函数，只须找到一个非零常数 T ，使等式 $(*)$ 对 $f(x)$ 定义域中的任意 x 的值都成立即可。

例 求证：余弦函数 $y = \cos x$ 是周期函数。

证明 对于任意 $x \in R$ ，角 x 与角 $x + 2\pi$ 是终边相同的角，由余弦函数定义可得： $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ 。

又 $\because T = 2\pi \neq 0$ ，为常数，

$\therefore y = \cos x$ 是周期函数。

3. 周期函数 $f(x)$ 不一定有最小正周期

周期函数的定义中指出：“……如果在所有周期中存在最小正数，就把这个最小正数叫做最小正周期。”因此，周期函数不一定存在最小正周期。

例如 常函数 $f(x) = c$ ($x \in R$, c 为常数)，一切非零实数 T 都是它的周期，但在所有正周期中最小值是不存在的。所以常函数 $f(x) = c$ 是没有最小正周期的周期函数。

又如，狄氏函数：
$$D(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ 是无理数}), \\ 1 & (x \text{ 是有理数}). \end{cases}$$

我们不难看出，它是一个以任意非零有理数为周期的周期函数，但却没有最小正周期。

若周期函数 $f(x)$ 有最小正周期，则最小正周期的值是唯一的。三角函数就是典型的例子。今后在无其它说明的前提下，凡提到三角函数的周期均指其最小正周期。

例 求证余弦函数 $y = \cos x$ 的最小正周期是 2π 。

证明 $\because \cos(x + 2\pi) = \cos x$ 对任意 $x \in R$ 均成立，

$\therefore 2\pi$ 是 $y = \cos x$ 的周期。

假设 2π 不是 $y = \cos x$ 的最小正周期，则必存在一个常数 a ，有 $0 < a < 2\pi$ ，使

$\cos(x+a) = \cos x$ 对任意 $x \in R$ 都成立。

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时，

$\cos(0+a) = \cos 0$ 也必成立。 $\because \cos 0 = 1$ ，

上式化为： $\cos a = 1$ 。

但 $\because 0 < a < 2\pi$ ， $\therefore \cos a \neq 1$ 。这就与 $\cos a = 1$ 矛盾了。

$\therefore$ 假设中的正常数 a 是不存在的，

$\therefore 2\pi$ 是 $y = \cos x$ 的最小正周期。

4. 在等式(*)中，非零常数 T 必须与自变量 x 相加，否则不能称其为周期

如由 $\sin\left(\frac{1}{2}x + 2\pi\right) = \sin \frac{1}{2}x$ ，而得出 $y = \sin \frac{1}{2}x$ 是以 2π 为周期的周期函数是错误的。正确的推理过程如下：

$$\because \sin\left(\frac{1}{2}x + 2\pi\right) = \sin \frac{1}{2}x,$$

$$\text{而 } \sin\left(\frac{1}{2}x + 2\pi\right) = \sin \frac{1}{2}(x + 4\pi),$$

$$\therefore \sin \frac{1}{2}(x + 4\pi) = \sin \frac{1}{2}x, \leftarrow \text{此式才是等式}$$

$$f(x+T) = f(x)。$$

$\therefore y = \sin \frac{1}{2}x$ 是以 4π 为周期的周期函数。

$$\text{又如：} \because \operatorname{tg}\left(\frac{2}{5}x + \pi\right) = \operatorname{tg} \frac{2}{5}x,$$

$$\text{而 } \operatorname{tg}\left(\frac{2}{5}x + \pi\right) = \operatorname{tg}\frac{2}{5}\left(x + \frac{5}{2}\pi\right),$$

$$\therefore \operatorname{tg}\frac{2}{5}\left(x + \frac{5}{2}\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{2}{5}x,$$

$$\therefore y = \operatorname{tg}\frac{2}{5}x \text{ 是以 } \frac{5}{2}\pi \text{ 为周期的周期函数。}$$

5. 周期函数的定义域至少一端是无界

由等式 $f(x+T) = f(x)$ 可知, 当 x 是 $f(x)$ 定义域中任意值时, $x+T$ 也必是 $f(x)$ 定义域中的值。

当 $T > 0$ 时, 周期函数 $f(x)$ 定义域的右端无界;

当 $T < 0$ 时, 周期函数 $f(x)$ 定义域的左端无界;

当周期函数 $f(x)$ 既有正周期也有负周期时, $f(x)$ 定义域的两端均无界。

必须注意: “定义域至少一端无界” 是 $f(x)$ 为周期函数的必要但不充分条件。

如: $y = \sin x, x \in R$, 是周期函数,

$y = \sin x, x \in [0, +\infty]$, 是周期函数,

而 $y = \sin x, x \in [-2\pi, 4\pi]$, 不是周期函数。



从函数解析式的改变 看图象变化

1. $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 图象间的关系

从表达式容易看到, 两函数当自变量取相反数值时, 其函数值保持不变, 故它们的图象一定关于 y 轴对称。因此, 若知其一的图象, 则必知另一个函数的图象。如从 $y = x^3$ 的图象, 易知 $y = (-x)^3$ 的图象(如图1)。

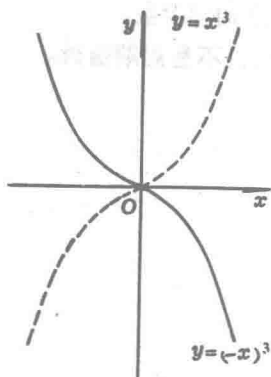


图 1

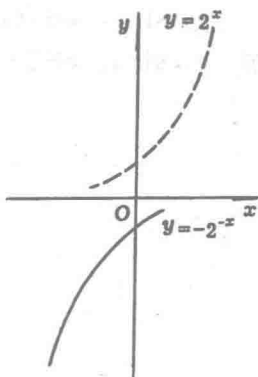


图 2

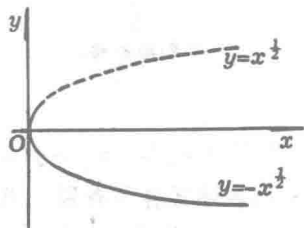
2. $y = f(x)$ 与 $y = -f(-x)$ 图象间的关系

从表达式容易看到, 两函数当自变量取相反数值时, 其函数值亦为相反的数值, 故它们的图象一定关于原点成中心对称。如从 $y = 2^x$ 的图象, 易知 $y = -2^{-x}$ 的图象(如图2)。

3. $y = f(x)$ 与 $y = -f(x)$ 图象间的关系

从表达式容易看到, 两函数当自变量取相同数值时, 其函数值为相反数值, 故它们的图象一定关于 x 轴对称。如从

$y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象, 易知 $y = -x^{\frac{1}{2}}$ 的图象(如图3)。



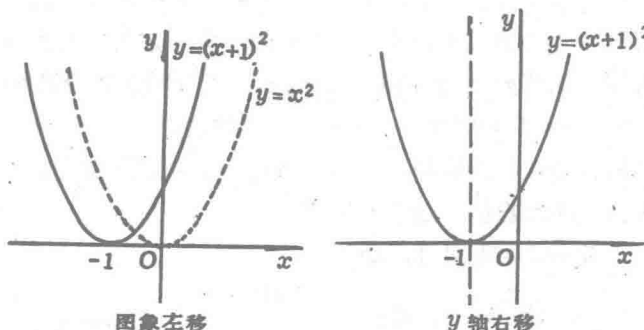
4. $y = f(x)$ 与 $y = f(x + a)$ 图象间的关系

(1) 当 $a > 0$ 时, 从表达式容易看到, 当函数 $y = f(x + a)$ 中的自变量 x 比 $y = f(x)$ 中的自变量 x 减少 a 时, 其函数值不变, 故 $y = f(x + a)$ 的图象, 可由 $y = f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 (也可以不平移 $y = f(x)$ 的图象, 而把 y 轴向右平移) a 个长度单位后得到。

图3

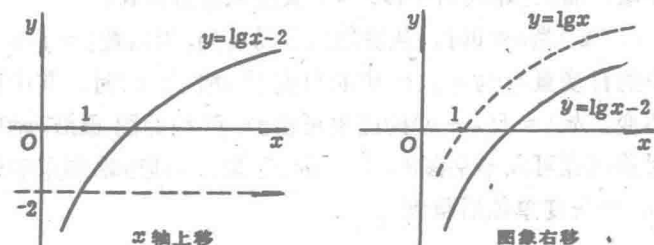
(2) 当 $a < 0$ 时, 从表达式容易看到, 当函数 $y = f(x + a)$ 中的自变量 x 比 $y = f(x)$ 中的自变量 x 增大 $|a|$ 时, 其函数值不变, 故 $y = f(x + a)$ 的图象可由 $y = f(x)$ 的图象沿 x 轴向右平移 (也可以不平移 $y = f(x)$ 的图象, 而把 y 轴向左平移) $|a|$ 个长度单位后得到。

如从 $y = x^2$ 的图象，易得 $y = (x+1)^2$ 的图象(如图4)。



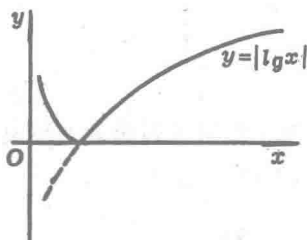
5. $y = f(x)$ 与 $y = f(x) + a$ 图象间的关系

从表达式容易看到，当两函数的自变量取相同数值时， $y = f(x) + a$ 的函数值比 $y = f(x)$ 函数值大 a ，故 $y = f(x) + a$ 的图象可由 $y = f(x)$ 的图象沿 y 轴向上($a > 0$ 时)或向下($a < 0$ 时)平移[也可以不平移 $y = f(x)$ 的图象，而把 x 轴向下($a > 0$ 时)或向上($a < 0$ 时)平移] $|a|$ 个长度单位后得到。如从 $y = \lg x$ 的图象易得 $y = \lg x - 2$ 的图象(如图5)。



6. $y=f(x)$ 与 $y=|f(x)|$ 图象间的关系

从表达式容易看到, 两函数当自变量取相同数值时, 函数 y 的绝对值总是相同的, 但 $y=f(x)$ 的函数值可取任意的实数值, 而 $y=|f(x)|$ 的函数值只能是非负值, 故 $y=|f(x)|$ 的图象可由 $y=f(x)$ 的图象在 x 轴下方部分, 以 x 轴为对称轴, 翻折到 x 轴上方部分所得的图形, 加上 $y=f(x)$ 图象在 x 轴上方部分 (包括 x 轴) 的图形所组成。如从 $y=\lg x$ 的图象, 易得 $y=|\lg x|$ 的图象 (如图6)。



7. $y=f(x)$ 与 $y=f(|x|)$ 图象间的关系

图6

从表达式易知, $y=f(|x|)$ 是偶函数, 它的图象是关于 y 轴对称的, 而 $y=f(x)$ 图象则不一定具备以上性质。但两个函数当自变量取相同的非负数时, 其函数值是相同的, 故两函数图象在 y 轴右方部分是相同的。于是 $y=f(|x|)$ 的图象, 可把 $y=f(x)$ 的图象先去掉在 y 轴左方部分, 而在 y 轴右方部分 (包括 y 轴) 保持不动, 加上 y 轴右方部分的图象以 y 轴为对称轴, 翻折到 y 轴左方部分的图形所组成。如从 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, 易得 $y=\log_{\frac{1}{2}} |x|$ 的图象, 从 $y=2^x$ 易得 $y=2^{|x|}$ 的图象 (如图7)。

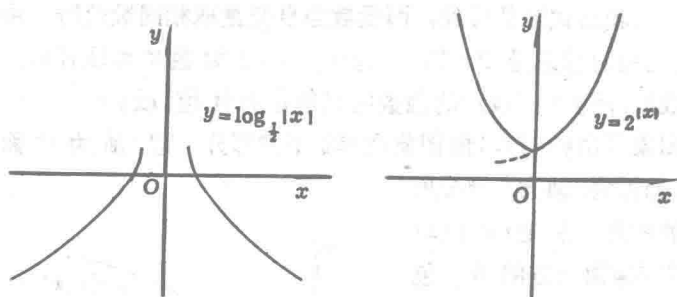


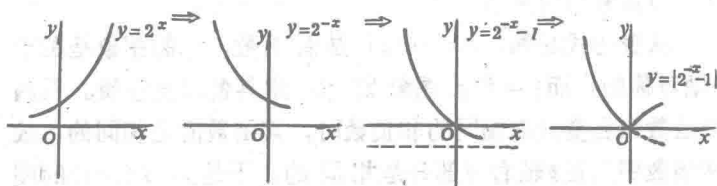
图 7

例 作出下列函数的图象:

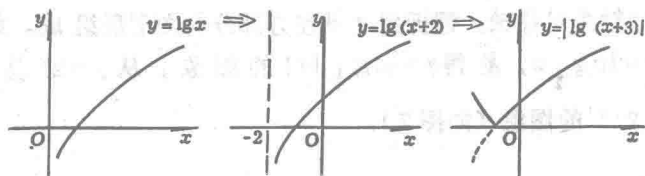
(1) $y = |2^{-x} - 1|$; (2) $y = |\lg(x+2)|$;

(3) $y = -|x|^{\frac{1}{3}}$.

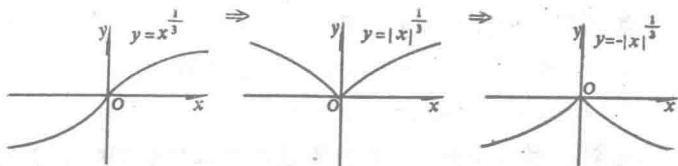
解(1)



(2)



(3)



北京师范大学二附中 陈俊辉

和积互化公式的应用

“和差化积”与“积化和差”，这两组三角函数式恒等变形的公式实际是一组公式的顺用和逆用，即从左往右，还是从右往左使用公式。它的用处是：(1)改变运算，实现和与积的互化；(2)改变函数式的次数，实现一次型与二次型的互化；(3)改变自变量，实现角的变形；(4)改变函数名称。

例1 化简 $\frac{\sin(\alpha + \theta) + \sin(\alpha + 2\theta) + \sin(\alpha + 3\theta)}{\cos(\alpha + \theta) + \cos(\alpha + 2\theta) + \cos(\alpha + 3\theta)}$ 。

分析 公式型的函数式进行化简，总是想办法约去分子、分母中的公因式，并尽量在形式上化去分母。为此，必须将分子、分母化为连乘积。所以本题首先把“和”化为“积”。

解 原式 = $\frac{\sin(\alpha + 2\theta)(2\cos\theta + 1)}{\cos(\alpha + 2\theta)(2\cos\theta + 1)} = \operatorname{tg}(\alpha + 2\theta)$ 。