全国十八所重点中学 编

帮你学

• 数理化 •

教学辅导与解题技巧

高中1年级第2学期

BANG NI XUE

海洋出版社

为便于读者阅读使用，《帮你学》丛书改为按年级和学期出版、每学年每学期出版一种，并分做两部分（即教学辅导与解题技巧；期末考试试题与题解）。

编　　者

帮你学·数理化

教学辅导与解题技巧

高中1年级第2学期

全国十八所重点中学编

海洋出版社出版（北京市复兴门外大街1号）

新华书店首都发行所发行　国防科工委印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/32　印张：8　字数：190千字

1989年2月第一版　1989年2月第一次印刷

ISBN 7-5027-0465-5/G·152

¥：2.90元

目 录

课 堂 辅 导

数 学

周期函数概念剖析

清华大学附中　邵光砚

周期函数定义：对于函数$y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数T，使得当x取定义域内的每一个值时，$f(x+T)=f(x)$都成立，那么函数$y=f(x)$叫做周期函数。不为零的常数T叫做这个函数的周期。如果在所有周期中存在一个最小正数，就把这个最小正数叫做最小正周期。

上述定义的核心是等式：

$$f(x+T)=f(x) \qquad (*)$$

要想深入理解周期函数概念，就必须围绕等式$(*)$明确下面几个问题。

1. 等式$(*)$对函数$f(x)$的定义域中的任意x值都成立，而不是对x的某些值成立

如：由$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}$，而得出$y=\cos x$是以$\pi$为周期的周期函数，显然是错误的。

又如：

$$函数f(x)=\begin{cases}2 & (当x\neq 0时),\\ 1 & (当x=0时),\end{cases}$$

取定任意一个确定的非零常数T，对于函数$f(x)$定义域

中除去0和$-T$外的任意x的值，等式$f(x+T)=f(x)$都成立。

但是当$x=0$时，$\because \quad f(0+T)=f(T)=2$，($\because T\neq 0$)

$$\text{而} \quad f(0)=1,$$

$$\therefore \quad f(0+T)\neq f(0)\text{。}$$

当$x=-T$时，$\because \quad f(-T+T)=f(0)=1$，

$$\text{而} \quad f(-T)=2, \quad (\because T\neq 0 \ \therefore -T\neq 0)$$

$$\therefore \quad f(-T+T)\neq f(-T)\text{。}$$

$\therefore$ $f(x)$不是周期函数。

2. 周期T是非零常数且不唯一

如果我们忽略了定义中$T\neq 0$的限制，就会得出所有的函数都是周期函数的荒谬的结论，这是因为：$f(x+0)=f(x)$对任意的x的值是恒成立的。

T是常数是指在等式（＊）中，当x取遍$f(x)$定义域中的一切值时，T是不变的。即：不能对定义域中的某些值x'，有$f(x'+T_1)=f(x')$成立；而对定义域中的另一些值x''，却有$f(x''+T_2)=f(x'')$成立。($T_1\neq T_2$)

如果对于函数$f(x)$存在一个非零常数T，对于定义域中的任意x的值等式(＊)都成立，则这样的T值必组成一个无限集。我们不难证明：若T是$f(x)$的周期，则$nT(n\in N)$都是$f(x)$的周期。这是因为：

$$\begin{aligned} f(x+nT) &= f\{[x+(n-1)T]+T\} \\ &= f[x+(n-1)T]=f\{[x+(n-2)T]+T\} \\ &= f[x+(n-2)T] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= f(x+2T)=f[(x+T)+T] \end{aligned}$$

$= f(x+T)$

$= f(x)$。

要证明一个函数$f(x)$是周期函数，只须找到一个非零常数T，使等式（*）对$f(x)$定义域中的任意x的值都成立即可。

例 求证：余弦函数$y=\cos x$是周期函数。

证明 对于任意$x\in R$，角x与角$x+2\pi$是终边相同的角，由余弦函数定义可得：$\cos(x+2\pi)=\cos x$。

又∵ $T=2\pi\neq 0$，为常数，

∴ $y=\cos x$是周期函数。

3. 周期函数$f(x)$不一定有最小正周期

周期函数的定义中指出："……如果在所有周期中存在最小正数，就把这个最小正数叫做最小正周期。"因此，周期函数不一定存在最小正周期。

例如 常函数$f(x)=c$（$x\in R$，c为常数），一切非零实数T都是它的周期，但在所有正周期中最小值是不存在的。所以常函数$f(x)=c$是没有最小正周期的周期函数。

又如，狄氏函数：$D(x)=\begin{cases}0 & (x\text{是无理数}),\\ 1 & (x\text{是有理数})。\end{cases}$

我们不难看出，它是一个以任意非零有理数为周期的周期函数，但却没有最小正周期。

若周期函数$f(x)$有最小正周期，则最小正周期的值是唯一的。三角函数就是典型的例子。今后在无其它说明的前提下，凡提到三角函数的周期均指其最小正周期。

例 求证余弦函数$y=\cos x$的最小正周期是2π。

证明 ∵ $\cos(x+2\pi)=\cos x$对任意$x\in R$均成立，

$\therefore\quad 2\pi$是$y=\cos x$的周期。

假设2π不是$y=\cos x$的最小正周期，则必存在一个常数a，有$0<a<2\pi$，使

$\cos(x+a)=\cos x$对任意$x\in R$都成立。

$\therefore$ 当$x=0$时，

$\cos(0+a)=\cos 0$也必成立。$\because\ \cos 0=1$，

上式化为：$\cos a=1$。

但$\because\ 0<a<2\pi$，$\therefore\ \cos a\neq 1$。这就与$\cos a=1$矛盾了。

$\therefore$ 假设中的正常数a是不存在的，

$\therefore\ 2\pi$是$y=\cos x$的最小正周期。

4. 在等式(*)中，非零常数T必须与自变量x相加，否则不能称其为周期

如由$\sin\left(\frac{1}{2}x+2\pi\right)=\sin\frac{1}{2}x$，而得出$y=\sin\frac{1}{2}x$是以$2\pi$为周期的周期函数是错误的。正确的推理过程如下：

$\because\quad \sin\left(\frac{1}{2}x+2\pi\right)=\sin\frac{1}{2}x$，

而 $\sin\left(\frac{1}{2}x+2\pi\right)=\sin\frac{1}{2}(x+4\pi)$，

$\therefore\quad \sin\frac{1}{2}(x+4\pi)=\sin\frac{1}{2}x$，←—此式才是等式

$f(x+T)=f(x)$。

$\therefore\quad y=\sin\frac{1}{2}x$是以$4\pi$为周期的周期函数。

又如：$\because\quad \mathrm{tg}\left(\frac{2}{5}x+\pi\right)=\mathrm{tg}\frac{2}{5}x$，

而 $\operatorname{tg}\left(\frac{2}{5}x+\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{2}{5}\left(x+\frac{5}{2}\pi\right)$,

$\therefore$ $\operatorname{tg}\frac{2}{5}\left(x+\frac{5}{2}\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{2}{5}x$,

$\therefore$ $y=\operatorname{tg}\frac{2}{5}x$是以$\frac{5}{2}\pi$为周期的周期函数。

5. 周期函数的定义域至少一端是无界

由等式$f(x+T)=f(x)$可知，当x是$f(x)$定义域中任意值时，$x+T$也必是$f(x)$定义域中的值。

当$T>0$时，周期函数$f(x)$定义域的右端无界；

当$T<0$时，周期函数$f(x)$定义域的左端无界；

当周期函数$f(x)$既有正周期也有负周期时，$f(x)$定义域的两端均无界。

必须注意："定义域至少一端无界"是$f(x)$为周期函数的必要但不充分条件。

如：$y=\sin x$，$x\in R$，是周期函数，

$y=\sin x$，$x\in[0,+\infty]$，是周期函数，

而 $y=\sin x$，$x\in[-2\pi, 4\pi]$，不是周期函数。

福州一中　林宗炘

从函数解析式的改变看图象变化

1．$y=f(x)$与$y=f(-x)$图象间的关系

从表达式容易看到，两函数当自变量取相反数值时，其函数值保持不变，故它们的图象一定关于y轴对称。因此，若知其一的图象，则必知另一个函数的图象。如从$y=x^3$的图象，易知$y=(-x)^3$的图象（如图1）。

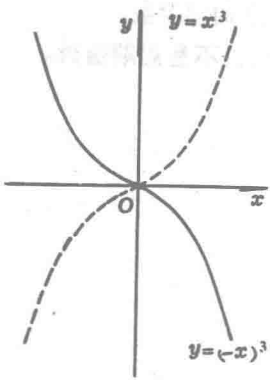


图1

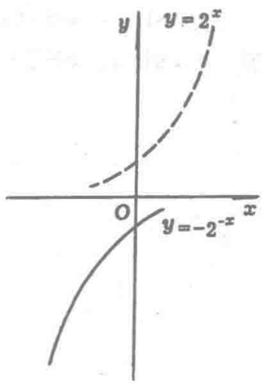


图2

2． $y=f(x)$与$y=-f(-x)$图象间的关系

从表达式容易看到，两函数当自变量取相反数值时，其函数值亦为相反的数值，故它们的图象一定关于原点成中心对称。如从$y=2^x$的图象，易知$y=-2^{-x}$的图象(如图2)。

3． $y=f(x)$与$y=-f(x)$图象间的关系

从表达式容易看到，两函数当自变量取相同数值时，其函数值为相反数值，故它们的图象一定关于x轴对称。如从$y=x^{\frac{1}{2}}$的图象，易知$y=-x^{\frac{1}{2}}$的图象（如图3）。

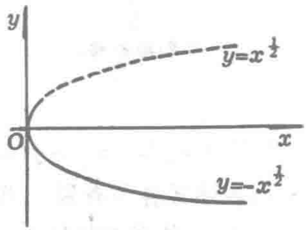


图3

4． $y=f(x)$与$y=f(x+a)$图象间的关系

(1)当$a>0$时，从表达式容易看到，当函数$y=f(x+a)$中的自变量x比$y=f(x)$中自变量x减少a时，其函数值不变，故$y=f(x+a)$的图象，可由$y=f(x)$的图象沿x轴向左平移（也可以不平移$y=f(x)$的图象，而把y轴向右平移）a个长度单位后得到。

(2)当$a<0$时，从表达式容易看到，当函数$y=f(x+a)$中的自变量x比$y=f(x)$中的自变量x增大$|a|$时，其函数值不变，故$y=f(x+a)$的图象可由$y=f(x)$的图象沿x轴向右平移（也可以不平移$y=f(x)$的图象，而把y轴向左平移）$|a|$个长度单位后得到。

如从$y=x^2$的图象，易得$y=(x+1)^2$的图 象(如图4)。

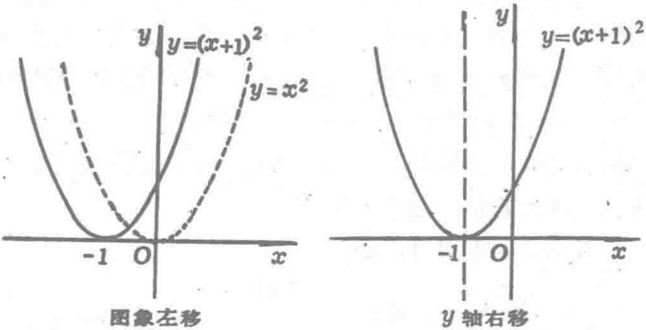


图4

5. $y=f(x)$与$y=f(x)+a$图象间的关系

从表达式容易看到，当两函数的自变量取相同数值时，$y=f(x)+a$的函数值比$y=f(x)$函数值大a，故$y=f(x)+a$的图象可由$y=f(x)$的图象沿y轴向上($a>0$时)或向下($a<0$时)平移[也可以不平移$y=f(x)$的图象，而把x轴向下($a>0$时)或向上($a<0$时)平移]$|a|$个长度单位后得到。如从$y=\lg x$的图象易得$y=\lg x-2$的图象(如图5)。

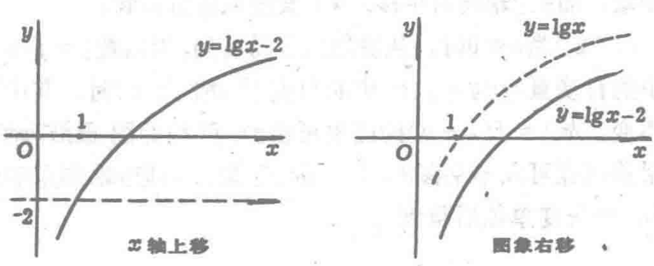


图5

6. $y=f(x)$与$y=|f(x)|$图象间的关系

从表达式容易看到，两函数当自变量取相同数值时，函数y的绝对值总是相同的，但$y=f(x)$的函数值可取任意的实数值，而$y=|f(x)|$的函数值只能是非负值，故$y=|f(x)|$的图象可由$y=f(x)$的图象在x轴下方部分，以x轴为对称轴，翻折到x轴上方部分所得的图形，加上$y=f(x)$图象在x轴上方部分（包括x轴）的图形所组成。如从$y=\lg x$的图象，易得$y=|\lg x|$的图象（如图6）。

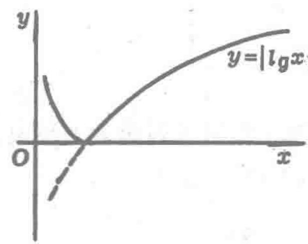


图6

7. $y=f(x)$与$y=f(|x|)$图象间的关系

从表达式易知，$y=f(|x|)$是偶函数，它的图象是关于y轴对称的，而$y=f(x)$图象则不一定具备以上性质。但两个函数当自变量取相同的非负数时，其函数值是相同的，故两函数图象在y轴右方部分是相同的。于是$y=f(|x|)$的图象，可把$y=f(x)$的图象先去掉在y轴左方部分，而在y轴右方部分（包括y轴）保持不动，加上y轴右方部分的图象以y轴为对称轴，翻折到y轴左方部分的图形所组成。如从$y=\log_{\frac{1}{2}}x$，易得$y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$的图象，从$y=2^x$易得$y=2^{|x|}$的图象（如图7）。

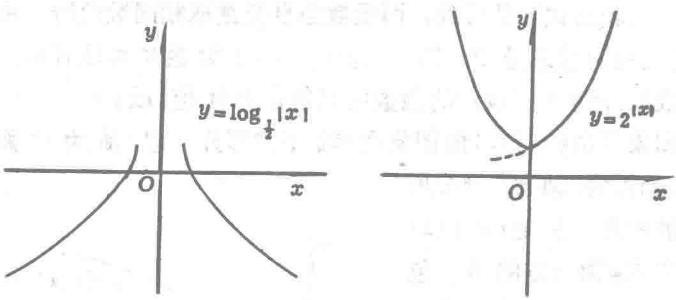


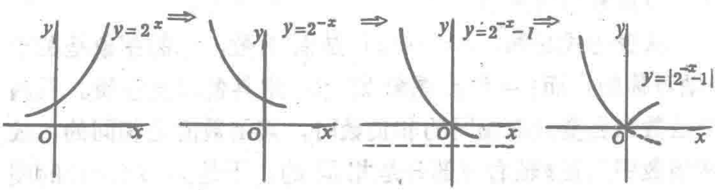
图7

例 作出下列函数的图象：

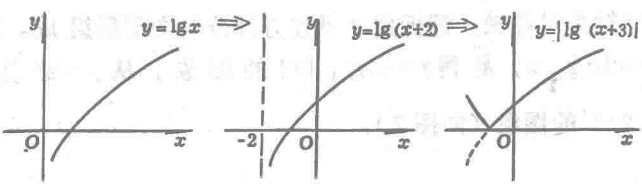
（1）$y=|2^{-x}-1|$；　　（2）$y=|\lg(x+2)|$；

（3）$y=-|x|^{\frac{1}{3}}$。

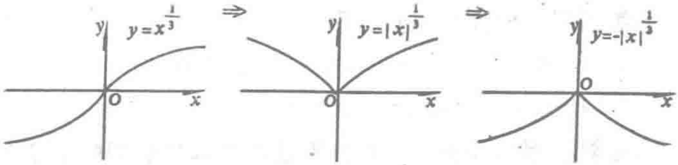
解（1）



（2）



（3）



北京师范大学二附中　陈俊辉

和积互化公式的应用

“和差化积”与“积化和差”，这两组三角函数式恒等变形的公式实际是一组公式的顺用和逆用，即从左往右，还是从右往左使用公式。它的用处是：（1）改变运算，实现和与积的互化；（2）改变函数式的次数，实现一次型与二次型的互化；（3）改变自变量，实现角的变形；（4）改变函数名称。

例1　化简$\dfrac{\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha+2\theta)+\sin(\alpha+3\theta)}{\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha+2\theta)+\cos(\alpha+3\theta)}$。

分析　公式型的函数式进行化简，总是想办法约去分子、分母中的公因式，并尽量在形式上化去分母。为此，必须将分子、分母化为连乘积。所以本题首先把“和”化为“积”。

解　原式$=\dfrac{\sin(\alpha+2\theta)(2\cos\theta+1)}{\cos(\alpha+2\theta)(2\cos\theta+1)}=\text{tg}(\alpha+2\theta)$。