全日制十年制学校初中课本

数学

SHUXUE

第四册

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

人民教育出版社

全日制十年制学校初中课本
(试 用 本)
数 学
第 四 册
中小学通用教材数学编写组编
*
人民教育出版社出版
北京出版社重印
北京市新华书店发行
北京印刷二厂印刷
*
1979年5月第1版 1980年1月第1次印刷
书号 K7012·0154 定价0.36元

目　　录

第五章　一元二次方程

一　一元二次方程

5.1　一元二次方程

我们来看下面的问题:

要剪一块面积是 150 平方厘米的长方形铁片，使它的长比宽多 5 厘米，应该怎样剪法?

要解决这个问题，只要求出铁片的长与宽．可以设宽是 x 厘米，那么长是 $x+5$ 厘米，根据题意，得

$$x(x+5)=150,$$

去括号，得

$$x^2+5x=150.$$

上面这个方程是一个整式方程，它只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2，这样的方程叫做**一元二次方程**.

上面的方程，经过移项，就化成下面的形式:

$$x^2+5x-150=0.$$

任何一个关于 x 的一元二次方程，经过整理，都可以化成下面的形式:

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0).$$

这种形式叫做一元二次方程的一般形式．其中 ax^2 叫

做二次项，a 叫做二次项系数；bx 叫做一次项，b 叫做一次项系数；c 叫做常数项．一次项系数 b 和常数项 c 可以是任何实数，二次项系数 a 是不等于零的实数．因为如果 a 是零，那么这样的方程就不是二次方程了．

例 把方程 $4x(x+3)=5(x-1)+8$ 化成一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项．

解： 去括号，得

$$4x^2+12x=5x-5+8.$$

移项，合并同类项，得

$$4x^2+7x-3=0.$$

所以，方程的二次项系数是 4，一次项系数是 7，常数项是 -3．

练 习

把下列方程先化成一元二次方程的一般形式，再写出它的二次项系数、一次项系数和常数项：

1. $3x^2=5x+2$.
2. $(x+3)(x-4)=-6$.
3. $3x(x-1)=2(x+2)-4$.
4. $(2x-1)(3x+2)=x^2+2$.
5. $(t+1)^2-2(t-1)^2=6t-5$.
6. $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})+(2y+1)^2=4y-5$.

5.2 一元二次方程的解法(一)——因式分解法

我们来研究方程

$$x^2-5x+6=0$$

的解法.

这个方程的左边可以分解成两个一次因式的积，就是

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

由此，原方程可变形为

$$(x-2)(x-3)=0.$$

要使$(x-2)(x-3)=0$，必须 $x-2=0$ 或$x-3=0$；反过来，只须 $x-2=0$ 或 $x-3=0$，就可得到

$$(x-2)(x-3)=0.$$

因此，要使

$$(x-2)(x-3)=0,$$

必须并且只须 $x-2=0$ 或 $x-3=0$，

即

$$x=2 \quad 或 \quad x=3.$$

所以方程 $x^2-5x+6=0$ 有且只有两个根，它们是

$$x_1=2, \quad x_2=3.^*$$

由此可见，如果一个一元二次方程的一边是零，而另一边能够分解成两个一次因式的积时，那么分别使

*通常用 x_1, x_2 表示未知数为 x 的一元二次方程的两个根.

每个因式等于零，得到两个一元一次方程，解这两个一元一次方程，就得到原一元二次方程的两个根. 这种解一元二次方程的方法叫做**因式分解法.**

例 1 解方程:

(1) $x^2+5x=0$; (2) $3y^2=2y$.

解: (1) $x(x+5)=0$.

$$x=0,\quad x+5=0.$$

$$\therefore \quad x_1=0,\quad x_2=-5.$$

(2) 移项, 得

$$3y^2-2y=0.$$

$$y(3y-2)=0.$$

$$y=0,\quad 3y-2=0.$$

$$\therefore \quad y_1=0,\quad y_2=\frac{2}{3}.$$

例 2 解方程:

(1) $x^2-3x-10=0$; (2) $(x+3)(x-1)=5$.

解: (1) $(x-5)(x+2)=0$.

$$x-5=0,\quad x+2=0.$$

$$\therefore \quad x_1=5,\quad x_2=-2.$$

(2) 原方程就是

$$x^2+2x-8=0.$$

解这个方程, 得

$$(x-2)(x+4)=0.$$

$$x-2=0, \quad x+4=0.$$

$$\therefore \quad x_1=2, \quad x_2=-4.$$

例3 解方程：

(1) $3x(x+2)=5(x+2)$； (2) $(3x+1)^2-4=0$。

解：(1) 原方程就是

$$3x(x+2)-5(x+2)=0.$$

方程的左边提取公因式，得

$$(x+2)(3x-5)=0.$$

$$x+2=0, \quad 3x-5=0.$$

$$\therefore \quad x_1=-2, \quad x_2=\frac{5}{3}.$$

(2) 把方程的左边分解因式，得

$$[(3x+1)+2][(3x+1)-2]=0,$$

即

$$(3x+3)(3x-1)=0.$$

$$3x+3=0, \quad 3x-1=0.$$

$$\therefore \quad x_1=-1, \quad x_2=\frac{1}{3}.$$

练　习

1. 说出下列方程的根：

(1) $x(x-2)=0$； (2) $(y+2)(y-3)=0$；

(3) $(3x+2)(2x-1)=0$； (4) $x^2=x$.

2. 下面的解法对不对？如果不对，应当怎样改正？

解方程：$(x-3)(x-5)=3$.

解：$(x-3)(x-5)=1\times 3$.

$x-3=1$, $\quad x-5=3$.

$\therefore \quad x_1=4$, $\quad x_2=8$.

3. 用因式分解法解下列方程：

(1) $5x^2+4x=0$; (2) $\sqrt{2}\,y^2=3y$;

(3) $x^2+7x+12=0$; (4) $x^2-10x+16=0$;

(5) $x^2+3x-10=0$; (6) $x^2-6x-40=0$;

(7) $t(t+3)=28$; (8) $(x+1)(x+3)=15$.

4. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(y-1)^2+2y(y-1)=0$; (2) $6(x+5)=x(x+5)$;

(3) $(2y-1)^2-9=0$; (4) $(3x+2)^2=4(x-3)^2$.

5.3 一元二次方程的解法(二)——配方法

我们先看下面的两个例子：

例 1 解方程 $x^2-25=0$.

这样的方程可以象第 5.2 节例 3 的第(2)题那样，用因式分解法来解. 也可以根据平方根的意义，用下面的方法来解.

解：移项，得

$$x^2=25.$$

由此可知，x 就是 25 的平方根，所以

$$x=\pm\sqrt{25}=\pm 5,$$

即

$$x_1=5,\ x_2=-5.$$

例 2　解方程　$(x-3)^2=2.$

解: $x-3$ 就是 2 的平方根. 所以

$$x-3=\pm\sqrt{2},$$

即

$$x-3=\sqrt{2},\ x-3=-\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad x_1=3+\sqrt{2},\ x_2=3-\sqrt{2}.$$

这就是说，如果一元二次方程的一边是一个含有未知数的式子的平方，另一边是一个大于零或等于零的常数，就可以用开平方的方法来解.

我们再看下面的两个例子:

例 3　解方程　$x^2-4x-3=0.$

这个方程可以化成例 2 的形式来解.

解: 把常数项移到方程的右边，得

$$x^2-4x=3.$$

在方程的两边各加上一次项系数一半的平方，使左边成为一个二项式的完全平方，右边仍是一个常数:

$$x^2+(-4x)+(-2)^2=3+(-2)^2,$$

$$(x-2)^2=7.$$

解这个方程，得

$$x-2=\pm\sqrt{7}.$$

$$\therefore\quad x=2\pm\sqrt{7},$$

即

$$x_1=2+\sqrt{7},\quad x_2=2-\sqrt{7}.$$

例 4 解方程 $2x^2+5x-1=0$.

这个方程的二次项系数不是 1，而是 2. 为了容易把方程的左边配成一个二项式的完全平方，所以先把方程的各项除以 2.

解：把方程的各项除以 2，得

$$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0.$$

把常数项移到方程的右边，得

$$x^2+\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}.$$

在方程的两边各加上一次项系数一半的平方，得

$$x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{33}{16}.$$

解这个方程，得

$$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{33}}{4},$$

$$\therefore\quad x=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{33}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4},$$

即

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{33}}{4},\quad x_2=\frac{-5-\sqrt{33}}{4}.$$

由此可知，解一元二次方程也可以先把方程的左边配成一个二项式的完全平方，如果右边是一个大于零或等于零的常数，就可以通过开平方来求出它的根。这种解一元二次方程的方法叫做**配方法**．如果左边配成平方后，右边是一个小于零的常数，那么这个方程没有实数根。

练　习

1. 用开平方的方法解下列方程：

(1) $4y^2=9$;　　(2) $16x^2-49=0$;

(3) $t^2-45=0$;　　(4) $(2x-3)^2=5$;

(5) $(x+1)^2-12=0$.

2. 配上适当的数，使下列等式成立：

(1) $x^2+6x+\quad=(x+\quad)^2$;

(2) $x^2-4x+\quad=(x-\quad)^2$;

(3) $x^2+3x+\quad=(x+\quad)^2$;

(4) $x^2-\frac{5}{2}x+\quad=(x-\quad)^2$;

(5) $x^2+px+\quad=(x+\quad)^2$;

(6) $x^2+\frac{b}{a}x+\quad=(x+\quad)^2$。

3. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2-6x+4=0$;

(2) $2t^2-7t-4=0$;

(3) $3x^2-1=6x$.

习 题 一

用因式分解法解下列方程(第 1~7 题):

1. (1) $\sqrt{3}x^2=\sqrt{2}x$;　　(2) $8x^2-\frac{1}{2}x=3x^2+\frac{1}{3}x$;

   (3) $\frac{1}{3}(y+3)^2=\frac{1}{2}(y+3)$;

   (4) $(\sqrt{5}-2)t^2=(\sqrt{5}+2)t$.

2. (1) $x^2+7x+6=0$;　　(2) $x^2-7x+6=0$;

   (3) $x^2+5x-6=0$;　　(4) $x^2-5x-6=0$.

3. (1) $x^2+12x+27=0$;　　(2) $y^2-17y+30=0$;

   (3) $x^2+10x-75=0$;　　(4) $y^2-7y-60=0$.

4. (1) $y(y-5)=300$;　　(2) $(x-1)(x+2)=70$;

   (3) $(x+4)(x-4)=6x$;　　(4) $(x+2)^2=9x$.

5. (1) $3y(y+2)=4(y+2)$;

   (2) $2(5x-1)^2-3(5x-1)=0$.

6. (1) $9(2x+3)^2-4(2x-5)^2=0$;

   (2) $\frac{1}{4}(y+1)^2=\frac{1}{9}(y-1)^2$.

7. (1) $(2y+1)^2+3(2y+1)+2=0$;

   (2) $(x+5)^2-2(x+5)=8$.

8. 用开平方的方法解下列方程:

   (1) $49x^2-81=0$;　　(2) $\frac{1}{4}y^2=0.01$;

   (3) $0.2x^2-\frac{3}{5}=0$;　　(4) $(x+3)(x-3)=9$;

(5) $(3x+1)^2=2$;　　　　(6) $(2t+3)^2-5=0$.

9. 用配方法解下列方程:

(1) $x^2+2x-99=0$;　　　　(2) $y^2+5y+2=0$;

(3) $3x^2-1=4x$;　　　　(4) $2x^2+\sqrt{2}x-30=0$.

10. 用因式分解法解下列关于 x 的方程:

(1) $x(x-a+1)=0$;　　　　(2) $(x+a)^2=(2x-b)^2$;

(3) $x^2+2ax-3a^2=0$.

11. 用配方法解关于 x 的方程: $x^2+px+q=0$.

5.4 一元二次方程的解法(三)——公式法

现在我们用配方法来解一般形式的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0).$$

用二次项的系数 a 除方程的各项, 得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

把常数项移到方程的右边, 得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

在方程的两边各加上一次项系数一半的平方, 得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

因为 $4a^2>0$，所以当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore\qquad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

由此得到一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$的求根公式：

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad(b^2-4ac\geqslant 0).}$$

在解一元二次方程时，我们先把方程化为一般形式，然后把各项的系数(包括常数项)代入这个公式，就可以求得方程的根．这种解一元二次方程的方法叫做**公式法**．

例 1 解方程 $2x^2+7x-4=0$.

解：这里 $a=2, b=7, c=-4$.

$$b^2-4ac=7^2-4\times 2\times(-4)=81.$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{2\times 2}=\frac{-7\pm 9}{4}.$$

$$\therefore\qquad x_1=\frac{-7+9}{4}=\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{-7-9}{4}=-4.$$

例 2 解方程 $x^2+2=2\sqrt{2}x$。

解: 移项，得

$$x^2-2\sqrt{2}x+2=0.$$

这里 $a=1$，$b=-2\sqrt{2}$，$c=2$。

$$b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times1\times2=0.$$

$$x=\frac{2\sqrt{2}\pm0}{2}=\sqrt{2}.$$

$\therefore$ $$x_1=x_2=\sqrt{2}.$$

注意 这个方程有两个相等的实数根。

例 3 解方程 $x^2+x-1=0$（结果精确到 0.001）。

解: 这里 $a=1, b=1, c=-1$.

$$b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5.$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

查表，得 $\sqrt{5}=2.236$，

$\therefore$ $$x_1=\frac{-1+2.236}{2}=0.618,$$

$$x_2=\frac{-1-2.236}{2}=-1.618.$$

例 4 解关于 x 的方程

$$x^2-a(3x-2a+b)-b^2=0.$$

解: 把原方程整理，得

$$x^2-3ax+(2a^2-ab-b^2)=0.$$

这里，x^2 的系数是 1，x 的系数是 $-3a$，常数项是 $2a^2-ab-b^2$，而

$$(-3a)^2-4(2a^2-ab-b^2)$$
$$=a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2.$$
$$x=\frac{3a\pm\sqrt{(a+2b)^2}}{2}=\frac{3a\pm(a+2b)}{2}.$$

$\therefore$
$$x_1=\frac{3a+a+2b}{2}=2a+b,$$
$$x_2=\frac{3a-a-2b}{2}=a-b.$$

练　习

1. 用公式法解下列方程：

(1) $2x^2+5x-3=0$;　　(2) $6x^2-13x-5=0$;

(3) $2y^2-4y-1=0$;　　(4) $t^2+2t=5$;

(5) $p(p-8)=16$;　　(6) $\frac{5}{2}y^2+2y=1$;

(7) $0.3x^2+x=0.8$;　　(8) $x^2+3=2\sqrt{3}x$.

2. 用公式法解下列方程，并求根的近似值（精确到 0.01）：

(1) $x^2+3x-5=0$;　　(2) $x^2-6x+4=0$.

3. 解下列关于 x 的方程：

(1) $2x^2-mx-m^2=0$;

(2) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$　$(ab\neq0)$.