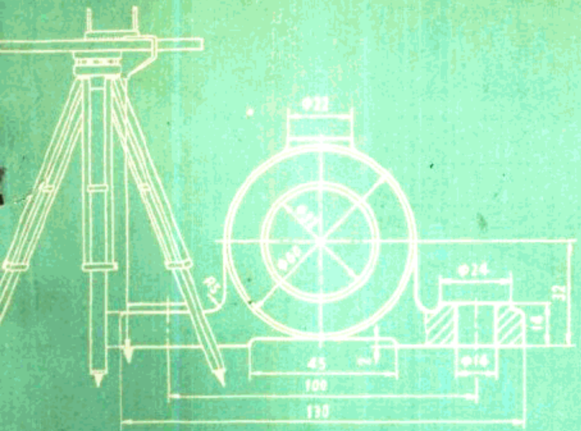


北京市中学试用课本

数学

SHUXUE

第二册

下册

北京市中学课本

数　学

第二册

下册

北京市教育局教材编写组编

*

北京人民出版社出版

北京市新华书店发行

北京印刷一厂印刷

*

1972 年 1 月第 1 版　1977 年 6 月第 5 版

1977 年 6 月第 1 次印刷

书号：K7071·51　定价：0.28 元

毛 主 席 语 录

我们的教育方针,应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展,成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

学生也是这样,以学为主,兼学别样,即不但学文,也要学工、学农、学军,也要批判资产阶级。学制要缩短,教育要革命,资产阶级知识分子统治我们学校的现象,再也不能继续下去了。

目　　录

第九章　相似三角形和测量

第十章　解直角三角形

第十一章 一次方程组

第九章　相似三角形和测量

一　相似三角形

在上一章里，我们研究了图形的全等．在工农业和日常生活中，还经常会遇到许多形状相同而大小不等的图形．例如，放大或缩小了的照片和原来的照片（图 9-1）；根据不同比例尺画出来的同一零件的平面图等，都是形状相同而大小不等的图形．象这样一些形状相同的图形，通常说它们是相似形．

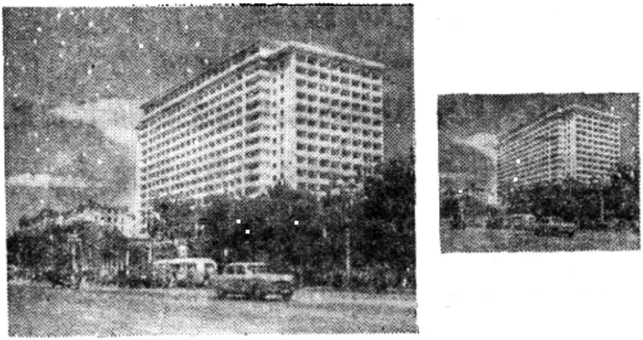


图　9-1

在农业学大寨运动中，广大贫下中农重新安排山河，需要测绘地区平面图，在表示一定范围的地面情况时，一般按比例缩小后绘制；在建造房屋、制造飞机、

轮船等大型工程中，又常常需要根据图纸来放大样. 由此可见，相似形的应用是很广泛的.

为了研究图形的相似问题，我们先学习和它有密切联系的成比例的线段.

1. 成比例的线段

(1) 两条线段的比

用同样的长度单位去量两条线段所得的量数的比，叫做这两条线段的比.

例 1 两地间的实际距离是 250 米，画在图上的距离是 5 厘米，求图上的距离和实际距离的比.

解: 如果以“米”作为共同的长度单位，那么，图距和实距的量数分别是 0.05 和 250.

∴ 图距:实距 $=0.05:250=1:5000$.

图上距离与实际距离的比，叫做这幅图的比例尺. 例 1 中图形的比例尺为 $1:5000$，也可以写作$\frac{1}{5000}$.

想一想: 上例中，如果以“厘米”，或以“毫米”作为共同长度单位，那么，对所得的比有没有影响？为什么？

例 2 图 9-2 所示零件中，a、b、c、d、e 的实长分别为

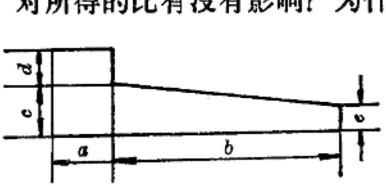


图 9-2

$45mm$、$170mm$、$37.5mm$、$25mm$、$20mm$，按 $1:5$ 的比例尺画图时，这几条线段各应画多长？

解：$\because$ 比例尺为 $1:5$，

即 $\dfrac{\text{图距}}{\text{实距}}=\dfrac{1}{5}$.

则 图距 $=$ 实距 $\times\dfrac{1}{5}$.

$\therefore\quad a=45\times\dfrac{1}{5}=9(mm)$。

同样，线段 b、c、d、e 各应画成 $34mm$、$7.5mm$、$5mm$、$4mm$.

练 习

1. 线段 a 和 b 的长度如下，求 a 和 b 的比.

   (1) $a=8cm$,　　$b=12cm$;

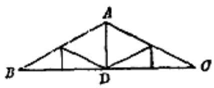
   (2) $a=3.2mm$, $b=2.4mm$;

   (3) $a=1.05m$, $b=35cm$.

2. 两地间的实际距离是 1200 米，画在图上的距离是 60 厘米，那么，这幅图的比例尺是多少？

3. 利用地图上的比例尺，从地图上分别求出北京到韶山、北京到延安之间的距离.

4. 人字形屋架如图，BC 长 $8m$，AD 是 BC 的 $\frac{1}{4}$. 按 $1:200$ 的比例尺画图时，BC、AD 各应画多长？



(第 4 题)

（2）成比例的线段

在四条线段中，如果两条线段的比等于另外两条线段的比，那么，这四条线段叫做成比例的线段，或者说它们是成比例的.

例 3　在图 9-1 中，分别用 a 和 b 表示这两张照片的长，分别用 c 和 d 表示它们的宽，量得 $a=60mm$，$b=30mm$，$c=48mm$，$d=24mm$，那么，a、b、c、d 是不是成比例的线段？

解： 由 $a=60mm$，$b=30mm$，$c=48mm$，$d=24mm$，得

$$\frac{a}{b}=\frac{60}{30}=2;\quad \frac{c}{d}=\frac{48}{24}=2.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

即 a、b、c、d 四条线段成比例.

根据线段的比的定义，两条线段的比和由线段组成的比例，分别具有两个数的比和由数组成的比例的性质，这就是说，我们以前学过的关于数的比和比例的一切性质，完全适用于线段的比和线段的比例.

在计算和证明的过程中，我们经常要用到比例的基本性质：

如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$；反过来，如果 $ad=bc$，

那么以 a、d 为外项(或内项), 以 b、c 为内项(或外项)就可以组成比例.

(这里的字母都代表不等于零的实数)

例 4 在下列两式中, 求 $a:b$.

(1) $3a=5b$; (2) $\frac{a}{7}=\frac{b}{3}$.

解: (1) $\because \quad 3a=5b,$

$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ (比例的基本性质).

(2) $\because \quad \frac{a}{7}=\frac{b}{3},$

$\therefore \quad 3a=7b,$

$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{7}{3}.$

我们还常用到有关比的下述性质:

等比定理 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$, 那么

$$\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots.$$

证明: 设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots=k$, 那么

$$a=bk, \quad c=dk, \quad e=fk, \quad \cdots\cdots.$$

把上面各等式的左右两边分别相加, 得

$$a+c+e+\cdots\cdots=(b+d+f+\cdots\cdots)k,$$

$$\therefore \quad \frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}=k,$$

即 $$\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots.$$

练　习

1. 线段 a、b、c、d 的长度分别为

(1) $2cm$, $1.5cm$, $5.25cm$, $7cm$;

(2) $5m$, $\frac{2}{3}m$, $\frac{3}{2}m$, $\frac{1}{5}m$.

问它们是不是成比例的线段？如果是，写出 a, b, c, d 间的一个比例式.

2. 在线段 a、b、c、d 中，已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

(1) 如果 $a=7cm$, $b=4cm$, $c=11cm$，求 d 的长;

(2) 如果 $a=0.5cm$, $b=2cm$, $d=8cm$, 求 c 的长;

(3) 如果 $a:b=5:3$, $c=1\frac{2}{3}$寸，求 d 的长.

3. 从下列二式中，求 $x:y$.

(1) $3:x=2:y$; (2) $3y=4x$.

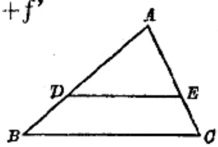
4. (1) 已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{5}{7}$, 求 $\frac{a+c+e}{b+d+f}$;

(2) 已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$, 求 $\frac{x+y+z}{z}$.

5. 如图，已知

$AD:AB=DE:BC=AE:AC=2:3$,

又$\triangle ADE$的周长是 $54mm$. 求$\triangle ABC$ 的周长.



(第 5 题)

2. 相似多边形

图 9-3 中的两个五边形，它们的大小不同，但形状一样．用量角器和刻度尺度量它们的角和边以后，可以发现：

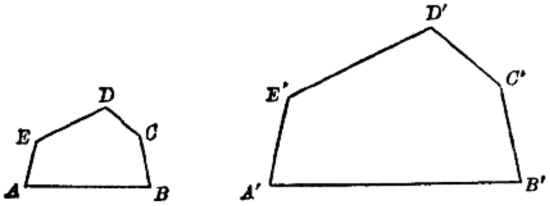


图 9-3

（1）$\angle A=\angle A'$，　$\angle B=\angle B'$，　$\angle C=\angle C'$，$\angle D=\angle D'$，　$\angle E=\angle E'$；

（2）$AB=\frac{1}{2}A'B'$，$BC=\frac{1}{2}B'C'$，$CD=\frac{1}{2}C'D'$，$DE=\frac{1}{2}D'E'$，$EA=\frac{1}{2}E'A'$，

即　$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}=\frac{1}{2}.$$

一般地，两个边数相同的多边形，如果各角对应相等，对应边成比例，那么，这两个多边形就叫做相似多边形．其中，对应相等的角是对应角，两组对应角所夹的边是对应边．我们用符号“∽”来表示相似，读做“相似于”，图 9-3 中的两个五边形相似，可以写成：

五边形 $ABCDE \backsim$ 五边形 $A'B'C'D'E'$.

两个相似多边形对应边的比，叫做这两个多边形的相似比(或相似系数). 图 9-3 中,

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\cdots=\frac{AE}{A'E'}=\frac{1}{2},$$

因此五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 的相似比是$\frac{1}{2}$. 很明显, 如果两个相似多边形的相似比等于1, 那么这两个多边形全等.

例 1 证明任意两个正方形都相似.

已知: 正方形$ABCD$和正方形$A'B'C'D'$(图9-4).

求证: 正方形 $ABCD \backsim$ 正方形 $A'B'C'D'$.

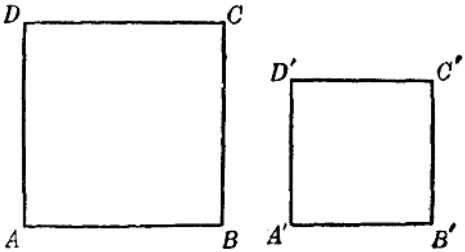


图 9-4

证明: 在正方形 $ABCD$ 和正方形 $A'B'C'D'$ 中,

$\because$ $\angle A=90^\circ$, $\angle A'=90^\circ$,

$\therefore$ $\angle A=\angle A'$.

同理 $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$.

又　　$AB = BC = CD = DA$,

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'A',$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}.$$

∴　正方形 $ABCD \backsim$ 正方形 $A'B'C'D'$（相似多边形定义）.

因为三角形是多边形的一种，所以相似多边形的定义也完全适用于相似三角形.也就是说，如果两个三角形的各角对应相等，对应边成比例，那么这两个三角形就是相似三角形.

由于三角形的每一个角所对的边只有一条，所以相似三角形的对应边可以通过一组对应角来确定，即在两个相似三角形中，一组对应角所对的边就是对应边.

例2　如图 9-5，已知：$\triangle DBE \backsim \triangle ABC$，$\angle BDE = \angle A$, $BE = 18mm$, $EC = 9mm$.

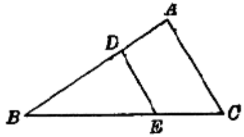


图　9-5

(1)写出它们的对应角和对应边；

(2)求出它们的相似比.

解：(1)　∵　$\triangle DBE \backsim \triangle ABC$,

又　$\angle BDE = \angle A$, $\angle B = \angle B$,

∴　$\angle DEB = \angle ACB$.

即这两个相似三角形的对应角分别是：

$\angle BDE$ 和 $\angle A$；$\angle DBE$ 和 $\angle B$；$\angle DEB$ 和 $\angle C$.

它们的对应边分别是：BE 和 BC；DE 和 AC；DB 和 AB.

(2) $\because BE = 18mm, EC = 9mm,$

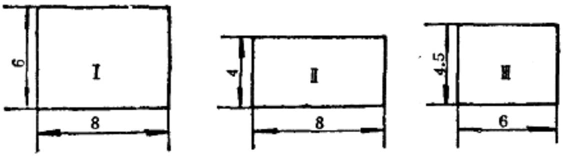
$\therefore BC = BE + EC = 27mm.$

因此 $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{18}{27} = \dfrac{2}{3}.$

即 $\triangle DBE$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $\dfrac{2}{3}$.

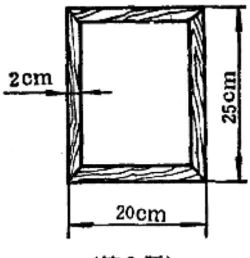
练　习

1. (口答)下面三个矩形中，有哪两个是相似的？相似系数是多少？



(第 1 题)

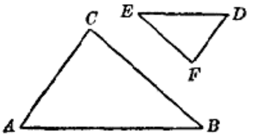
2. 一个矩形镜框，它的四边都一样宽，尺寸如图．问它的里外边缘所构成的两个矩形是不是相似？为什么？.



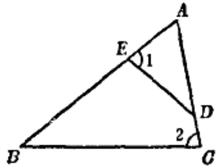
(第 2 题)

3. 证明：锐角等于 $60°$ 的两个菱形是相似的.

4. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似，$\angle A$ 和 $\angle D$、$\angle C$ 和 $\angle F$ 分别是对应角. 指出它们所有的对应边.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 相似，$\angle 1=\angle 2$. 指出它们所有的对应角和对应边.

6. 在两个相似三角形中，一个三角形三边的长分别是 $40mm$、$50mm$ 和 $60mm$，另一个三角形最短边的长是 $30mm$. 求其余两边的长.

在绘图、测量和计算等工作中，经常要用到相似三角形，相似三角形也是解决相似多边形问题的基础. 下面，我们着重来研究有关相似三角形的知识.

3. 相似三角形的判定

应用相似三角形解决问题，先要会判定具有什么条件时两个三角形相似. 除根据定义来判定外，人们还总结推导出了一些更简便的判定方法. 我们先看下面的例子：

工人师傅在把一个三角形工件按比例缩小时，常

用下面的方法来划线：如图 9-6，先把 AB 边按比例缩小为 AB'；然后过 B' 画 BC 边的平行线交 AC 于 C'，那么 $\triangle AB'C'$就是按比例缩小了的三角形. 要弄清这是什么道理，就需要进一步研究平行线的性质.

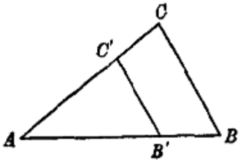


图 9-6

在上一章里，我们学习了平行截割定理，即角的两边被一组平行线所截，如果在角的一边上截出相等的线段，那么在角的另一边上也截出相等的线段. 我们由截割相等的线段，可以进一步认识截割成比例线段的规律. 如图 9-7，已知 $DE \parallel BC$，D 点把AB分成 AD、DB 两段，且$\frac{AD}{DB}=\frac{4}{3}$. 我们把 AD 分为四等份，DB 分为三等份，也就是把 AB 分为七等份，经过各分点分别画与 BC 平行的直线(图中虚线)，那么这一组平行线也必定将 AC 分为七等份，其中 AE 被分为四等份，EC 被分为三等份，也就是说 $\frac{AE}{EC}=\frac{4}{3}$，因此，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

从图 9-7 中，还可以得到：

$\because \quad \frac{AD}{AB}=\frac{4}{7}$，$\frac{AE}{AC}=\frac{4}{7}$，

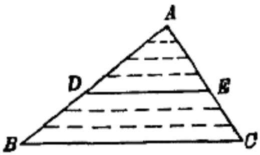


图 9-7