数学解题天才

多解全攻略

新课标

高中解析几何

开拓思路
创新解法
凝聚精华
提升能力

GAOZHONG JIEXI JIHE DUOJIE QUANGONGLUE

陈矿初 编著

广西教育出版社

数学解题天才

多解全攻略

GAOZHONG JIEXI JIHE DUOJIE QUANGONGLUE

新课标

高中解析几何

陈矿初 编著

广西教育出版社

数学解题天才

高中解析几何多解全攻略

陈矿初　编著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路8号

邮政编码:530022　电话:5850219

本社网址　http://www.gep.com.cn

读者电子信箱　master@gep.com.cn

全国新华书店经销　南宁市彩印厂印刷

*

开本 890×1240　1/32　9.50 印张　260 千字

2003 年 1 月第 4 版第 5 次印刷

印数:24 001—34 000 册

ISBN 7-5435-2665-4/G·2049　定价:14.50 元

前言

高中解析几何是应用坐标思想，确定平面上点的位置，然后利用代数、三角等多种知识去研究几何图形的性质的一门综合性较强的学科.

为了培养准确迅速的运算能力，加强逻辑思维能力，提高分析问题和解决问题的能力，一方面要演算一定数量的题目；另一方面要善于思索、归纳总结、摸清规律，才能收到预期效果. 同时提倡一题多解，而一题多解对思路分析、探索规律、多角度"追踪"、巩固知识、提高技能是一种不可忽视的方法和技巧. 因此，本人从长期的教学实践中，精选一批有代表性，并具有多解性的典型范例，编成本书奉献给广大读者，并在每单元后面附有适当练习，供大家训练之用. 愿此书能成为中学教师、广大中学生和自学青年的良师益友.

最后，希望读者在阅读时，先独立思考，然后再与书中的解法认真比较，仔细研究，琢磨出最佳解法. 通过探索规律，提高解题能力.

陈矿初

一、直线

1. 已知△ABC的顶点分别为$A(0,0)$,$B(4,8)$,$C(6,-4)$,若AB上的点M分$\overline{AB}$成$3:1$,而点P在AC上,且使△AMP的面积恰好是△ABC面积的一半,求点P的坐标.

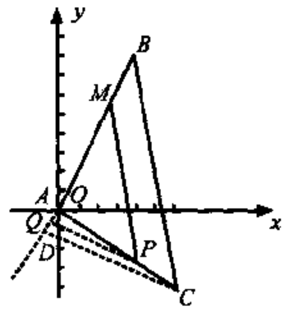

图1

攻略1 依题设应用定比分点坐标公式可求得点M的坐标,再由$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AMP}$可导出$|AB|\cdot|AC|=2|AM|\cdot|AP|$,从而求出$|AP|$之长,找到定比$\lambda=\dfrac{AP}{PC}$即可求之.

解法1 $\because$ 点M分$\overline{AB}$成$3:1$,即$\dfrac{AM}{MB}=3$,

根据定比分点坐标公式,得

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{0+3\cdot 4}{1+3}=3, \\ y_M=\dfrac{0+3\cdot 8}{1+3}=6. \end{cases}$$ 即$M(3,6)$.

由题设$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AMP}$,即$\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin A=2\cdot\dfrac{1}{2}|AM|\cdot|AP|\cdot\sin A$,得 $|AB|\cdot|AC|=2|AM|\cdot|AP|$.

根据两点间距离公式,得 $|AB|=4\sqrt{5}$, $|AC|=2\sqrt{13}$, $|AM|=3\sqrt{5}$,

$\therefore$ $|AP|=\dfrac{|AB|\cdot|AC|}{2|AM|}=\dfrac{4}{3}\sqrt{13}$,

$|PC|=|AC|-|AP|=\frac{2}{3}\sqrt{13}$.

而 $\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{PC}$同向，∴ $\lambda=\frac{AP}{PC}=\frac{|AP|}{|PC|}=2$.

故根据定比分点坐标公式，得

$$\begin{cases} x_P=\dfrac{0+2\cdot 6}{1+2}=4, \\ y_P=\dfrac{0+2\cdot(-4)}{1+2}=-\dfrac{3}{8}. \end{cases} \quad \text{即} \quad P(4,-\frac{8}{3}).$$

攻略 2 利用面积比$\frac{S_{\angle AMP}}{S_{\angle ABC}}=\frac{1}{2}$转换为线段比$\frac{|AP|}{|AC|}$，然后应用比例的性质导出 $\lambda=\frac{AP}{PC}$进行求之.

解法 2 设 $\lambda=\frac{AP}{PC}$，则由合比定理，得

$$\frac{\lambda}{\lambda+1}=\frac{AP}{AP+PC}=\frac{AP}{AC}.$$

$$\because \quad \frac{S_{\triangle AMP}}{S_{\angle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}|AM|\cdot|AP|\cdot\sin A}{\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin A}=\frac{|AM|}{|AB|}\cdot\frac{|AP|}{|AC|}=\frac{1}{2},$$

又 $\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{3}{1}$， ∴ $\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{|AM|}{|AM|+|MB|}=\frac{3}{4}$，

∴ $\frac{|AP|}{|AC|}=\frac{2}{3}$.

而 $\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AC}$同向， ∴ $\frac{AP}{AC}=\frac{2}{3}$，即 $\frac{\lambda}{\lambda+1}=\frac{2}{3}$，$\lambda=2$.

$$\text{故} \begin{cases} x_P=\dfrac{0+2\cdot 6}{1+2}=4, \\ y_P=\dfrac{0+2\cdot(-4)}{1+2}=-\dfrac{3}{8}. \end{cases} \quad \text{即 } P(4,-\frac{8}{3}).$$

攻略 3 过 C、P 向 BA 的延长线作垂线 CD、PQ，由 $\triangle AMP$ 与 $\triangle ABC$ 的面积关系导出 $\frac{|CD|}{|PQ|}$ 的比值，再应用相似三角形的性质转化为 $\frac{|AP|}{|AC|}$，从而进一步求之.

解法 3 过 C、P 分别作 BA 的延长线的垂线 CD、PQ，垂足为 D、Q(如图 1 所示).

$\because$ $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AMP}$，即

$\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=2\cdot\frac{1}{2}|AM|\cdot|PQ|$.

又 $|AB|:|AM|=4:3$， 即 $|AB|=\frac{3}{4}|AM|$，

$\therefore$ $\frac{|CD|}{|PQ|}=\frac{3}{2}$.

而 $\triangle ACD\backsim\triangle APQ$，$\therefore$ $\frac{|AP|}{|AC|}=\frac{|PQ|}{|CD|}=\frac{2}{3}$.

又 $\overline{AP}$ 与 $\overline{AC}$ 同向， $\therefore$ $\frac{AP}{AC}=\frac{2}{3}$.

由分比定理，得 $\lambda=\frac{AP}{PC}=\frac{AP}{AC-AP}=2$，

故 $\begin{cases} x_P=\frac{0+2\cdot 6}{1+2}=4, \\ y_P=\frac{0+2\cdot(-4)}{1+2}=-\frac{3}{8}. \end{cases}$ 即 $P(4,-\frac{8}{3})$.

点评 本题的三种解法是从不同视角导出定比 $\lambda=\frac{AP}{PC}$ 的值，从而获得解之. 比例性质的应用可简化运算，平面几何知识在解题中应用广泛，值得注意.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的平分线所在直线方程为 $l:2x+y-1$

$=0$，顶点 $B(1,2)$、$C(-1,-1)$，求顶点 A 的坐标.

攻略1　通过$\angle A$ 的平分线所在的直线方程及 BC 边的直线方程即可求得交点 D 的坐标，再利用三角形内角平分线的性质：$\left|\frac{BD}{CD}\right|=\left|\frac{AB}{AC}\right|$及两点间距离公式建立方程求出点 A 坐标.

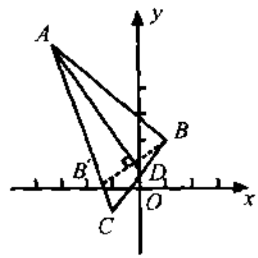

图2

解法1　设点 A 的坐标为$(x,1-2x)$. 由两点式，得 BC 所在的直线方程为

$$\frac{y+1}{2+1}=\frac{x+1}{1+1}，\text{即}\quad 3x-2y+1=0.$$

联立$\begin{cases}3x-2y+1=0,\\2x+y-1=0.\end{cases}$　解得交点 D 的坐标为$\left(\frac{1}{7},\frac{5}{7}\right)$.

而 $\left|\frac{AB}{AC}\right|=\left|\frac{BD}{CD}\right|$，

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{(x-1)^2+(1-2x-2)^2}}{\sqrt{(x+1)^2+(1-2x+1)^2}}=\frac{\sqrt{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2+\left(2-\frac{5}{7}\right)^2}}{\sqrt{\left(-1-\frac{1}{7}\right)^2+\left(-1-\frac{5}{7}\right)^2}}.$$

解方程，得 $x=-\frac{13}{5}$（$x=\frac{1}{7}$，不合，舍去）.

故所求顶点 A 的坐标为$\left(-\frac{13}{5},\frac{31}{5}\right)$.

攻略2　引进参变量 $\lambda=\frac{BD}{DC}$，利用定比分点坐标公式表出点 D 坐标，代入$\angle A$ 平分线 l 的方程求得 λ 的值，再利用内角平分线定理建立方程而求之.

解法2　设 $\lambda=\frac{BD}{DC}$，则由定比分点坐标公式，得

点 D 的坐标为 $\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda},\frac{2-\lambda}{1+\lambda}\right)$.

$\because$ 点 D 在直线 $l:2x+y-1=0$ 上，

$\therefore$ $2\cdot\frac{1-\lambda}{1+\lambda}+\frac{2-\lambda}{1+\lambda}-1=0$.

解方程，得 $\lambda=\frac{3}{4}$，即 $\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{3}{4}$.

而 $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|BD|}{|DC|}$，$\therefore$ $\frac{\sqrt{(x-1)^2+(1-2x-2)^2}}{\sqrt{(x+1)^2+(1-2x+1)^2}}=\frac{3}{4}$，

解得点 A 坐标为 $\left(-\frac{13}{5},\frac{31}{5}\right)$.

攻略 3　因直线 l 是 $\angle A$ 的平分线，所以从 AB 边到 l 与从 l 到 AC 边的所成角相等，则可利用两条直线相交所成角公式，建立方程而解之.

解法 3　设顶点 A 的坐标为 $(x,1-2x)$. 则

$$k_{AB}=\frac{1+2x}{1-x},\quad k_{AC}=\frac{2-2x}{x+1}.$$

而直线 l 是 $\angle A$ 的平分线，其斜率为 $k_l=-2$.

$\therefore$ 根据两条直线所成角公式，得

$$\frac{-2-\frac{1+2x}{1-x}}{1+(-2)\cdot\frac{1+2x}{1-x}}=\frac{\frac{2-2x}{x+1}-(-2)}{1+(-2)\cdot\frac{2-2x}{x+1}},$$

即 $\frac{3}{5x+1}=\frac{4}{5x-3}$，解方程，得 $x=-\frac{13}{5}$.

故所求顶点 A 的坐标为 $\left(-\frac{13}{5},\frac{31}{5}\right)$.

攻略 4　因直线 l 是 $\angle A$ 的内角平分线，那么顶点 B 关于直线 l 的对称点 B' 必在直线 AC 上，因此求出对称点 B' 的坐标后，即可写出直线 AC 方程而解之.

解法 4 设点 B 关于直线 l 的对称点 B' 的坐标为 (x',y'). 则

$$\begin{cases}\dfrac{y'-2}{x'-1}\cdot(-2)=-1,\\ 2\cdot\dfrac{x'+1}{2}+\dfrac{y'+2}{2}-1=0.\end{cases}$$ 解得点 B' 坐标为 $\left(-\frac{7}{5},\frac{4}{5}\right)$.

∵ l 为 $\angle A$ 的角平分线,则点 B' 必在直线 AC 上(如图 2 所示).

∴ AC 所在直线方程为 $\dfrac{y+1}{\frac{4}{5}+1}=\dfrac{x+1}{-\frac{7}{5}+1}$,即 $9x+2y+11=0$.

联立 $\begin{cases}2x+y-1=0,\\ 9x+2y+11=0.\end{cases}$

解得所求顶点 A 的坐标为 $\left(-\frac{13}{5},\frac{31}{5}\right)$.

简评 本题所列的四种解法,其关键所在是如何灵活应用三角形内角平分线各种性质,建立方程而解之,尤其以解法 4 应用其对称性,建立方程求之较为简捷.

方程的解题思想在解析几何中是一种常用的数学思想方法,值得注意.

3. 在平面直角坐标系中,在 y 轴的正半轴(坐标原点除外)上给定两个点 A、B. 试在 x 轴的正半轴(坐标原点除外)上求点 C,使 $\angle ACB$ 取得最大值. (1986 年全国高考试题)

攻略 1 依题意设定好 A、B、C 三点的坐标,利用夹角公式构造出目标函数 $\tan\angle ACB$,然后应用均值不等式及函数单调性即可解之.

解法 1 如图 3 所示,设 A、B 两点坐标分别为 $(0,a)$、

$(0,b)$，$(a>b>0)$.

又设点 C 的坐标为 $(x,0)(x>0)$，$\angle ACB=\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$.

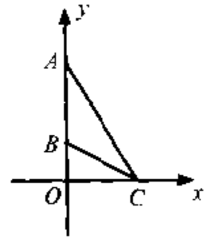

图 3

则直线 AC 的斜率为 $k_1=-\frac{a}{x}$，直线 BC 的斜率为 $k_2=-\frac{b}{x}$.

$$\text{于是}\quad \tan\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{-\frac{b}{x}+\frac{a}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}}\right|=\left|\frac{(a-b)x}{x^2+ab}\right|,$$

$\because\quad x>0,\quad a>b>0,$

$$\therefore\quad \tan\alpha=\frac{(a-b)x}{x^2+ab}=\frac{a-b}{x+\frac{ab}{x}}\leqslant\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

当且仅当 $x=\frac{ab}{x}$，即 $x=\sqrt{ab}$ 时，$\tan\alpha$ 有最大值 $\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

而在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内，$\tan\alpha$ 是增函数.

故当 $x=\sqrt{ab}$，即点 C 坐标为 $(\sqrt{ab},0)$ 时，$\angle ACB$ 取最大值是：$\arctan\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

攻略 2 按解法 1 导出目标函数 $\tan\alpha$ 后，也可利用判别式 $\Delta\geqslant 0$ 求出 $\tan\alpha$ 的最大值而解之.

解法 2 仿解法 1，得函数

$$y=\tan\alpha=\frac{(a-b)x}{x^2+ab}\quad (x>0,a>b>0),$$

即 $yx^2-(a-b)x+aby=0$ （其中 $y>0$）.

$\because\quad x$ 为实数，

$\therefore\quad \Delta=(a-b)^2-4aby^2\geqslant 0$，即 $y^2\leqslant\frac{(a-b)^2}{4ab}$，

$\therefore \quad 0<y\leqslant\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$，即 $\quad 0<\tan\alpha\leqslant\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

当 $y=\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$时，$x=\dfrac{a-b}{2y}=\sqrt{ab}\in(0,+\infty)$.

而 $\tan\alpha$ 在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内是增函数，

故当 $x=\sqrt{ab}$，即点 C 的坐标为$(\sqrt{ab},0)$时，$\angle ACB$ 取最大值是：$\arctan\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

攻略 3 本题还可通过三角形的面积关系：$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOC}-S_{\triangle BOC}$导出目标函数 $\sin\alpha$，再应用均值不等式及 $\sin\alpha$ 的单调性解之.

解法 3 如图 3 所示，设 $A(0,a)$，$B(0,b)$，$C(x,0)$$(x>0,a>b>0)$，$\angle ACB=\alpha(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$.

$$\because \quad S_{\angle ABC}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BC|\cdot\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2}\cdot\sqrt{x^2+b^2}\cdot\sin\alpha,$$

$$S_{\angle AOC}=\frac{1}{2}ax,\ S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}bx,$$

$$\therefore \quad S_{\angle ABC}=S_{\triangle AOC}-S_{\triangle BOC},$$

$$\therefore \frac{1}{2}\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}(ax-bx),$$

$$\therefore \quad \sin\alpha=\frac{(a-b)x}{\sqrt{x^4+(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}}$$

$$=\frac{a-b}{\sqrt{x^2+\dfrac{a^2b^2}{x^2}+a^2+b^2}}\leqslant\frac{a-b}{\sqrt{2ab+a^2+b^2}}=\frac{a-b}{a+b}.$$

当且仅当 $x^2=\dfrac{a^2b^2}{x^2}$，即 $x=\sqrt{ab}$时，$\sin\alpha$ 有最大值 $\dfrac{a-b}{a+b}$.

而 $\sin\alpha$ 在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内是增函数，

故当点 C 的坐标为($\sqrt{ab}$,0)时,$\angle ACB$ 有最大值 $\arcsin\dfrac{a-b}{a+b}$.

攻略 4 依据“一条直线与圆相切,切点对圆上两个定点的张角是这切线上任一点对这两个定点的张角的最大值”这一命题*,过点 A,B 作圆与 x 轴相切,切点 C 即为所求.

解法 4 过点 A、B 作圆 D 与 x 轴相切,切点为C. 则切点C对A、B的张角最大.

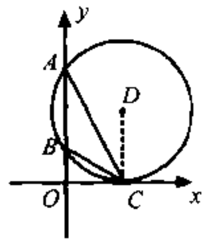

图 5

设点 A、B 的坐标分别为$(0,a)$、$(0,b)$$(a>b>0)$,圆 D 的圆心 D 的坐标为$\left(x_0,\dfrac{a+b}{2}\right)$,半径 $r=\sqrt{{x_0}^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2}$.

∴ 圆 D 方程为$(x-x_0)^2+\left(y-\dfrac{a+b}{2}\right)^2={x_0}^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$,①

将 $y=0$ 代入①,得

$(x-x_0)^2+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2={x_0}^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$,即 $x^2-2x_0x+ab=0$.

∵ x 轴与圆 D 相切,

∴ $\triangle=4{x_0}^2-4ab=0$,即 $x_0=\sqrt{ab}$(切点 C 在 x 轴正半轴上).

故当点 C 为($\sqrt{ab}$,0)时,$\angle ACB$ 最大.

---

* 命题的证明:如图 4 所示

在切线 l 上任取一点 P,连 PA 交⊙O 于 D,连 PB、BD,只须证明$\angle ACB>\angle APB$.

∵ $\angle ADB=\angle ACB$,

又 $\angle ADB=\angle APB+\angle PBD$

∴ $\angle ACB>\angle APB$.

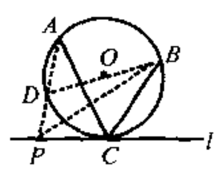

图 4

附注：本解法 4 中，也可以利用圆心 D 到 x 轴的距离等于半径，即 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$ 而解之.

这是一道几何和代数综合试题，它考查了直线、函数的基本知识和性质以及求函数最值的方法. 解法 1～3 是设定好变量，建立起目标函数，然后分别应用均值不等式及判别式求其函数的最大值的常见方法，而解法 4 则巧妙地应用了平面几何中圆的有关性质进行求解，方法简捷. 本题可演变为一道应用题：一张图画挂在墙上，它的下边缘在观察者眼睛上方 a 米，而上边缘在眼睛上方 b 米. 问观察者应离墙多远，才能使视角最大.

4. 过点 $P(0,1)$ 作直线 l，使它被两条已知直线 l_1：$2x+y-8=0$ 和 l_2：$x-3y+10=0$ 所截得的线段被点 P 所平分. 求直线 l 的方程.

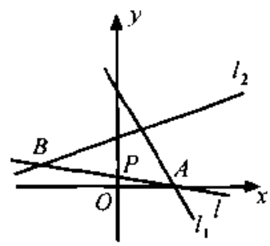

图 6

攻略 1　引进直线 l 的斜率 k 为参数，写出直线 l 的方程，分别与 l_1、l_2 的方程联立，求交点 A、B 的坐标，再用中点坐标公式求参数 k 的值，即可求出 l 的方程.

解法 1　设直线 l 的方程为 $y=kx+1$.

联立 $\begin{cases} y=kx+1, \\ 2x+y-8=0. \end{cases}$ 解得交点 $A\left(\frac{7}{k+2},\frac{8k-2}{k+2}\right)$.

联立 $\begin{cases} y=kx+1, \\ x-3y+10=0. \end{cases}$ 解得交点 $B\left(\frac{7}{3k-1},\frac{10k-1}{3k-1}\right)$.

而 $P(0,1)$ 为 AB 之中点，

$\therefore$　$\frac{1}{2}\left(\frac{7}{k+2}+\frac{7}{3k-1}\right)=0$，　解得　$k=-\frac{1}{4}$.

故所求直线 l 的方程为 $x+4y-4=0$.

攻略 2 若引进直线 l 与 l_1 的交点 A 的坐标 (x_1,y_1) 为参数，通过中点坐标公式表示出 l 与 l_2 的交点 B 的坐标，然后分别代入 l_1、l_2 方程，建立方程组进行求解.

解法 2 设直线 l 与已知直线 l_1、l_2 的交点分别为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.

$\because$ $P(0,1)$ 是 AB 的中点，

$\therefore$ $\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=0,\\[2mm] \dfrac{y_1+y_2}{2}=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2=-x_1,\\ y_2=2-y_1.\end{cases}$ 代入 l_2 的方程，得

$(-x_1)-3(2-y_1)+10=0$. 即 $x_1-3y_1-4=0$.

联立 $\begin{cases}x_1-3y_1-4=0,\\ 2x_1+y_1-8=0.\end{cases}$ 解得 $A(4,0)$.

故所求的直线 l 的方程为 $\dfrac{y-0}{1-0}=\dfrac{x-4}{1-4}$，即 $x+4y-4=0$.

攻略 3 可巧妙地应用 l_1 及 l_2 的二次式与所设 l 方程联立，然后利用韦达定理及中点坐标公式求得 l 的斜率而解之.

解法 3 设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，代入 l_1 和 l_2 的二次式 $(x-3y+10)(2x+y-8)=0$，得

$$(-3k^2-5k+2)x^2+(28k+7)x+49=0.$$

又设交点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 由韦达定理，得

$$x_1+x_2=\frac{-(28k+7)}{-3k^2-5k+2}.$$

而 $P(0,1)$ 是 AB 之中点，

$\therefore$ $x_1+x_2=0$， 即 $28k+7=0$， $k=-\dfrac{1}{4}$.

故所求的直线 l 的方程为 $x+4y-4=0$.

攻略 4 本题还可以借助于直线参数方程，利用其参数 t

的几何意义导出所求直线 l 的斜率而解之.

解法 4 设所求的直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=t\cos\theta, \\ y=1+t\sin\theta. \end{cases} \quad (t\text{ 为参数})$$

代入 l_1 的方程,得 $2t_1\cos\theta+1+t_1\sin\theta-8=0$,

即 $t_1=\dfrac{7}{2\cos\theta+\sin\theta}$;

代入 l_2 的方程,得 $t_2\cos\theta-3-3t_2\sin\theta+10=0$,

即 $t_2=\dfrac{-7}{\cos\theta-3\sin\theta}$.

$\because\ t_1=-t_2$, $\quad\therefore\ \dfrac{7}{2\cos\theta+\sin\theta}=\dfrac{7}{\cos\theta-3\sin\theta}$.

解得 $\tan\theta=-\dfrac{1}{4}$

故所求的直线 l 的方程为 $y-1=-\dfrac{1}{4}(x-0)$,即 $x+4y-4=0$.

简评 本题所介绍的解法是解析几何中求直线方程的四种典型方法.解法 1 是引进斜率 k 为参数建立直线方程,利用待定系数法求解,它是常规之法,运算量大;解法 2 则引进交点坐标 (x_1,y_1) 为参数,依题意建立方程组求解,可减少运算量;解法 3 巧妙地应用两直线方程的二次式及韦达定理,简化运算,值得关注;而解法 4 用的是参数法,方法简捷.

5. 已知点 $A(1,1)$、$B(2,2)$、$C(3,-1)$是一个平行四边形的三个顶点,求第四个顶点的坐标.

攻略 1 根据平行四边形的定义,若以 AC 为对角线,则 $AD_1 /\!/ BC$,$CD_1 /\!/ BA$.应用平行条件及点斜式写出 AD_1 及 CD_1

的直线方程,然后联立求解.

解法 1 　如图 7,若以 AC 为对角线,则 $AD_1 /\!/ BC$,$CD_1 /\!/ BA$.

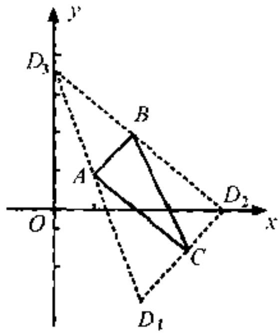

图 7

$\therefore\quad k_{AD_1}=k_{BC}=\dfrac{2+1}{2-3}=-3$;

$k_{CD_1}=k_{BA}=\dfrac{2-1}{2-1}=1$.

$\therefore$ 直线 AD_1 的方程是 $y-1=-3(x-1)$,

即 $3x+y-4=0$,①

直线 CD_1 的方程是 $y+1=x-3$,

即 $x-y-4=0$. ②

联立方程①、②解得 $D_1(2,-2)$.

若分别以 BC、AB 为对角线,同理可得 $D_2(4,0)$,$D_3(0,4)$.

故 $D_1(2,-2)$、$D_2(4,0)$,$D_3(0,4)$ 均为所求的第四个顶点的坐标.

攻略 2 　如图 7 可知 $AB \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \dfrac{1}{2}D_1D_2$,$BC \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \dfrac{1}{2}D_3D_1$,$CA \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \dfrac{1}{2}D_2D_3$,所以 A、B、C 分别是 D_1D_3、D_2D_3、D_1D_2 的中点,则可应用中点坐标公式布列方程组进行求解.

解法 2 　设过△ABC 的三个顶点分别作对边的平行线,且交于 $D_1(x_1,y_1)$、$D_2(x_2,y_2)$、$D_3(x_3,y_3)$,如图 7 所示.

则 A、B、C 分别为 D_1D_3、D_2D_3、D_1D_2 的中点.

由中点坐标公式,得