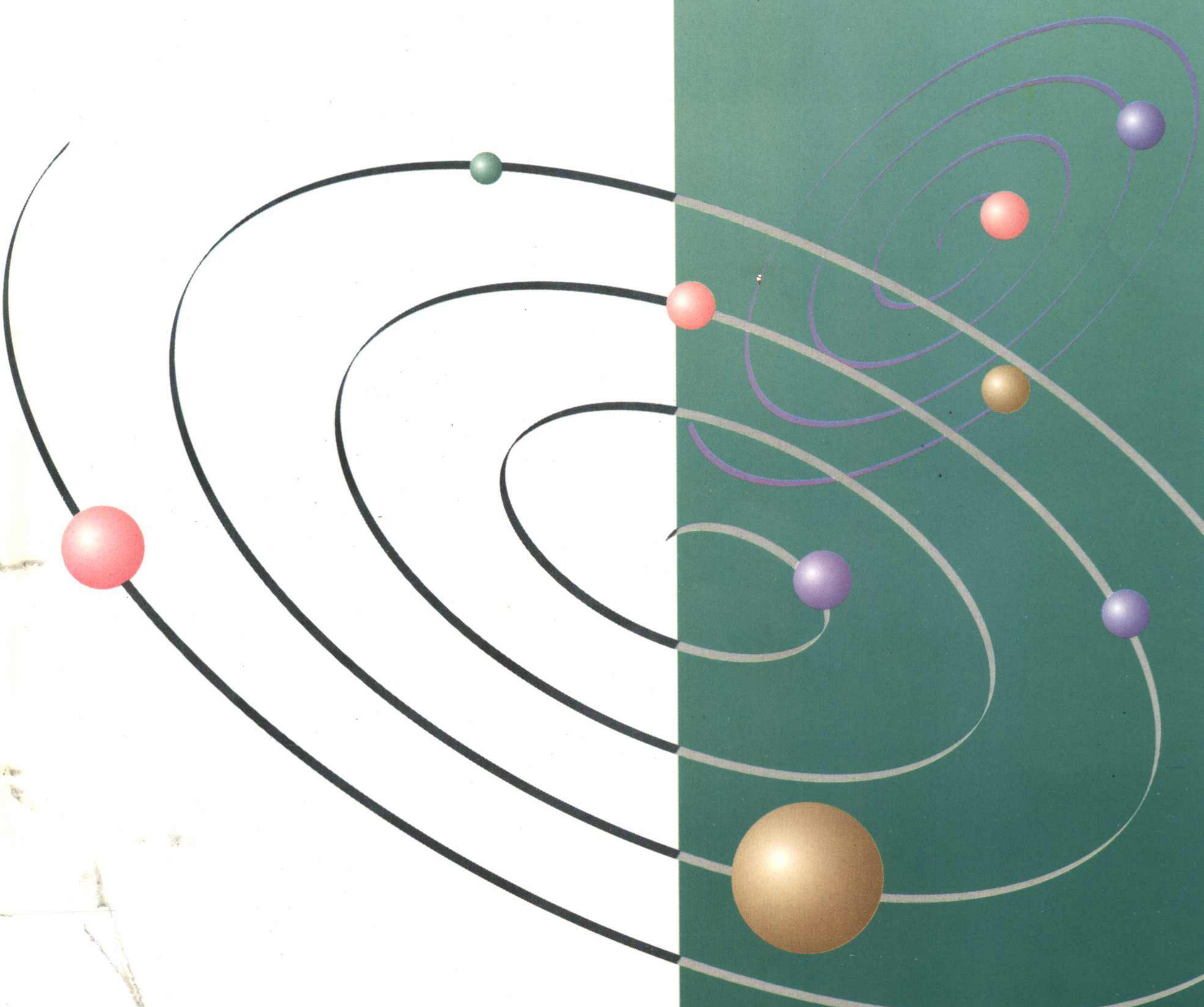
周建伟 编著

高等几何

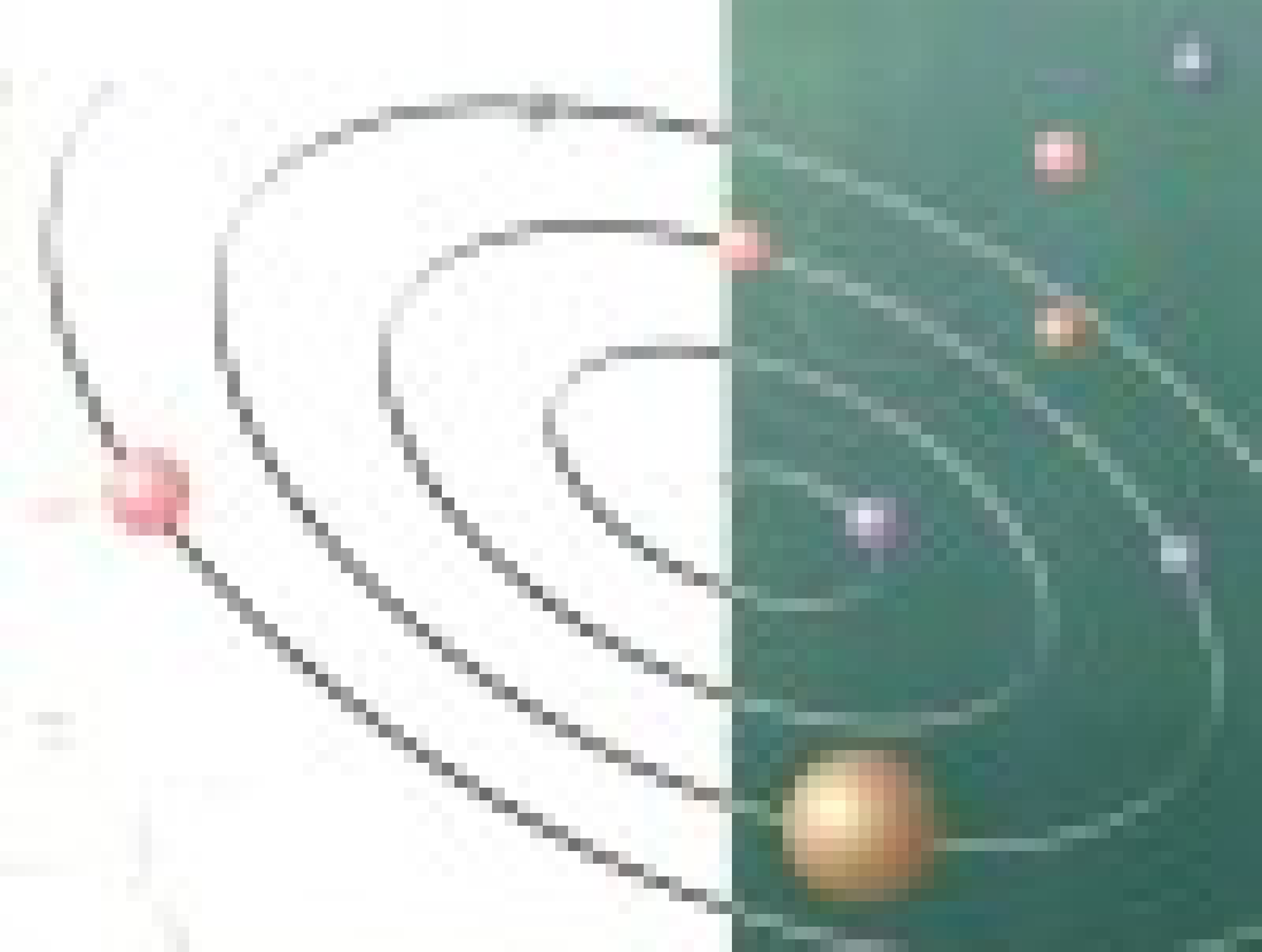
GAODENG JIHE



苏 州 大 学 出 版 社

高等几何

GAODENG JIHE



高等几何

周建伟　编著

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等几何/周建伟编著. —苏州：苏州大学出版社，2000.7

ISBN 7-81037-661-6

Ⅰ.高… Ⅱ.周… Ⅲ.高等几何-高等学校-教材 Ⅳ.O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 21844 号

高等几何

周建伟 编著

责任编辑 管兆宁

苏州大学出版社出版发行

（地址：苏州市十梓街 1 号 邮编：215006）

丹阳人民印刷厂印装

（地址：丹阳新民中路 邮编：212300）

开本 787×1092 1/16 印张 11.875 字数 293 千

2000 年 7 月第 1 版 2000 年 7 月第 1 次印刷

印数 1-3500 册

ISBN 7-81037-661-6/O·29(课) 定价：18.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换

苏州大学出版社发行科 电话：0512—5236943

前　言

几何是研究空间形式的重要的数学分支，而高等几何是介绍射影、欧氏、双曲、椭圆等几何及它们的相互关系的学科．这本书以Klein的变换群观点为指导思想，以一些重要定理为主线，介绍了平面射影几何的基本知识，努力展示射影、仿射、欧氏、双曲、椭圆等多种几何的丰富内容和内在联系．本书可供高等师范院校数学系作为教材，也可用作自学．

本书在教学内容的选取和编排上作了一些努力，对一些命题给出了新的、简捷的证明，力求做到叙述正确、条理分明．通过双曲与椭圆几何的学习可以对古典几何有一个全面的了解，也能接触一些近代数学思想(如覆盖空间、Gauss-Bonnet公式等)，这对提高学生学习兴趣、培养数学修养及对今后的学习都有好处．

本书采用综合法与解析法并重的写法，主要概念的定义与讨论尽可能采用几何方法进行，以帮助学生建立空间直观，能很好地理解这些概念．写作时也注意解题技巧以及利用作图帮助解题，以增强能力的培养．书中选编了较多的例题和习题，其中一部分与中学平面几何有关，以突出射影几何对中学几何的指导作用．这些习题也是本书的重要组成部分，它们对于巩固与加深对内容的理解是很有必要的．

阅读本书应该具有解析几何及线性代数方面的知识，如果学过一些群论则更好，第五章在介绍双曲弧长与面积时要用到一些简单的微积分知识．

苏州大学数学系对本书的编写给予了大力支持，梅向明教授审阅了教材并提出了很好的修改意见．在此，特向他们表示衷心感谢．

作者相信，本书的出版对于高等几何的教学改革与建设是有益的．

限于本人的水平和经验，书中不当之处在所难免，恳请读者指正．

周建伟

2000年1月于苏州

目　　录

第一章　射影平面

本书研究实射影几何及其相关的几何.射影平面有几种等价的定义方法,这里采用在普通欧氏平面上添加无穷远点以及无穷远直线,将平面扩充为拓广平面,以拓广平面为模型来定义射影平面.采用这种定义的好处是较为直观,并且这一构造直接给出了将射影几何结论运用于欧氏几何的方法.在§1.1中,我们将讨论拓广平面上点与直线的齐次坐标表示,利用这一表示可以得到射影平面上点与直线的解析表示.这种解析表示也可用来定义射影平面.本章还将介绍射影平面的一些基本也是十分重要的概念,如射影坐标、对偶原理、交比等.

§1.1　拓广欧氏平面

我们以ξ,η等希腊字母表示直线,用大写英文字母A,B,C等表示点.如果A,B表示不同的两点,用AB表示过A,B的直线.两直线ξ与η的交点用$\xi\times\eta$表示,$P\in\xi$表示点P在直线ξ上.在这一节通过改造欧氏平面,得到射影平面的一个模型.

1.1.1　中心射影

先讨论两条共面直线之间的中心射影.

定义 1.1.1　设ξ,η是共面的两直线,O是两直线外一点.对于直线ξ上任一点A,设A'是直线OA与η的交点,则由$A\to A'$定义的直线ξ上点与η上点的对应叫**中心射影**,O是**射影中心**.

按照定义,中心射影的逆对应也是中心射影.如图1-1-1所示,如果ξ与η平行,那么中心射影是一一到上的映射.而如图1-1-2,如果直线ξ与η相交,那么交点D是中心射影的不变点.这时直线ξ上存在一点P使得直线OP与η平行,根据中心射影的定义,ξ上这样的点P没有象;另一方面,直线η上也有一点Q,OQ与ξ平行,Q不是ξ上任一点的象.P与Q都叫做中心射影的**影消点**.出现这一情形的原因是欧氏空间中平行的直线不相交.因此,如果ξ与η相交,那么ξ与η之间的中心射影不是通常意义下的映射.

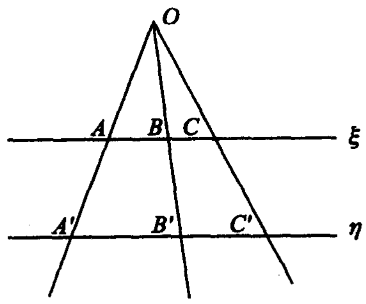


图 1-1-1

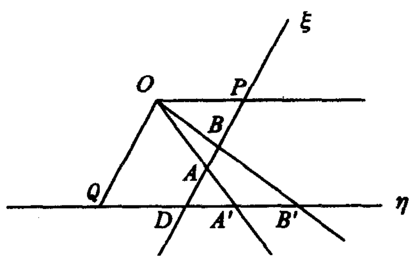


图 1-1-2

下面讨论平面之间的中心射影.

定义 1.1.2　设π与π'是欧氏空间中两个不同的平面,点O不在π上也不在π'上,对于平

面 π 上任一点 A，如果直线 OA 交 π' 于 A'，则记为 $A'=\varphi(A)$. 这样定义的平面 π 与 π' 之间的对应 $\varphi: \pi \to \pi'$ 叫中心射影，O 是射影中心.

与直线之间的中心射影一样，平面中心射影的逆对应也是中心射影. 如图 1-1-3，如果平面 π 与 π' 平行，那么对于平面 π 上每一点都有 π' 上的点作为它的象. 不难知道，这时中心射影 $\varphi: \pi \to \pi'$ 是一个既单且满的映射，以后简称这样的映射是一一的. 中心射影 φ 把平面 π 上的直线变成 π' 上的直线，相交直线变成相交直线，平行直线变为平行直线. 限制 φ 于平面 π 上某一条固定直线就得到直线之间的中心射影.

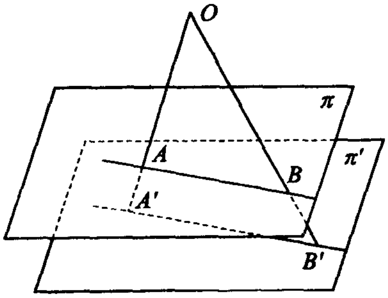


图 1-1-3

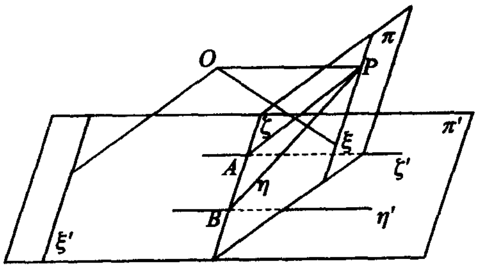


图 1-1-4

如果平面 π 与 π' 相交，那么两平面的交线上每一点在中心射影下是不变的. 如图 1-1-4 所示，一般地 φ 仍把平面 π 上直线变为 π' 上直线，把相交直线变为相交直线. 但也有例外情况，在图 1-1-4 中，设 ξ 是平面 π 上直线，使得过射影中心 O 与直线 ξ 的平面与 π' 平行，这时直线 ξ 上任一点在中心射影下没有象. 这样的直线 ξ 叫做**影消线**. 同样平面 π' 上也有直线 ξ'，过 ξ' 上任一点与 O 的连线平行于 π. 易见 ξ' 上任一点都不是中心射影的象，ξ' 也叫平面 π' 上的影消线. 因此，在 π 与 π' 相交时，中心影射不是通常意义下的映射，原因与直线之间中心射影类似：平行平面、平行直线都不相交.

尽管中心射影有些缺憾，它还是有一些有趣的性质. 下面举一些例子.

例 1 平行直线在中心射影下可以变成相交直线.

证 如图 1-1-5，设 O 是相交平面 π 与 π' 外一点，$ABCD$ 是平面 π 上平行四边形，其一边 AD 在两平面交线上，四边形 $AB'C'D$ 是平行四边形 $ABCD$ 在以 O 为中心的中心射影下的象. 如果 $AB'C'D$ 也是平行四边形，则线段 AD，BC，$B'C'$ 互相平行且相等，这样 $BCC'B'$ 也是平行四边形，这与 BB'，CC' 交于 O 矛盾. 所以，必有 AD 与 $B'C'$ 相交或 AB' 与 DC' 相交. 这就证明了中心射影下平行直线可变成相交直线. 进一步讨论可以证明 AD 与 $B'C'$ 平行，而 AB' 与 DC' 相交.

下面证明在图 1-1-4 中平面 π 上过影消线 ξ 上点的直线在中心射影下变成平行线. 设 P 是 ξ 上一点，ζ, η 是平面 π 上过 P 的直线，它们分别交 π 与 π' 的交线于 A, B. 设 ζ 与 η 在中心射影下的象是 ζ', η'. 从中心射影作法知道，直线 ζ', η' 分别与 OP 平行，因此 ζ' 与 η' 平行.

例 2 中心射影可以把一个平面上的圆变成另一个平面上的双曲线、椭圆或者抛物线.

如图 1-1-6，设 Γ 是平面 π 上的圆，点 O 是平面 π 外一点. 过 O 与 Γ 上所有点的连线构成以 O 为顶点的一个椭圆锥面. 椭圆锥面与平面相交可以得到椭圆，也可以得到双曲线或者抛物线. 例如，不过锥面顶点而平行于锥面的某一条母线的平面与锥面相交得抛物线，变动此平面可得到双曲线或椭圆.

例 2 的严格证明可采用空间直角坐标，这时椭圆锥面是二次曲面，它与平面相交得二次曲

线. 而非退化的二次曲线只能是椭圆、抛物线、双曲线之一.

容易看出,在平面之间的中心射影下,两点之间的距离,两直线的夹角一般都是要改变的. 所以中心射影下等边三角形或直角三角形的象一般不再是等边三角形或直角三角形. 由前面讨论知道,三角形在中心射影下的象甚至可以不是三角形. 例如,三角形的一个顶点在影消线上.

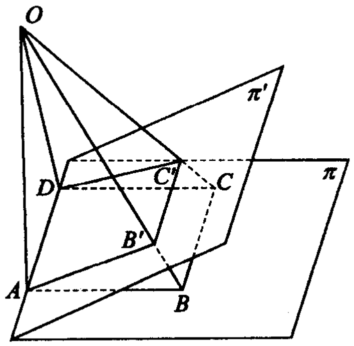


图 1-1-5

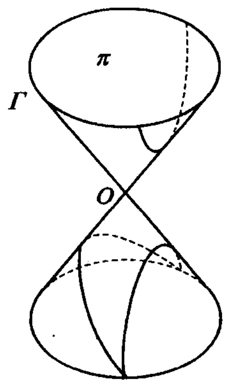


图 1-1-6

如果把点之间的距离,直线之间的夹角等叫做图形的度量性质,那么我们可以说,中心射影不保持图形的度量性质.

1.1.2 拓广欧氏平面

上面定义的直线与直线,平面与平面之间的中心射影一般不是一一对应的,并且有些点甚至没有确定的象. 出现这种情况的原因是平行直线不相交. 下面改造欧氏直线与平面,使得在改造以后的直线与平面上中心射影可以自然地扩充为一一对应的映射.

我们约定,对于每一条直线加上一个点,称为直线上的**无穷远点**;普通直线加上无穷远点以后称为**拓广直线**. 添加的无穷远点把直线的左右两端连接起来,所以拓广直线可看成圆一样的封闭图形,如图 1-1-7. 实际上可以按照图 1-1-8 的方式建立拓广直线与圆之间的一一对应. 如图 1-1-8,设圆 S^1 与直线 ξ 相切于点 A,点 B 是 A 的对径点(即 AB 是圆的直径). 建立圆与拓广直线的中心射影,圆上点 P' 与 B 的连线与 ξ 的交点 P 就是 P' 在此中心射影下的象,B 是射影中心. 当 Q' 在圆 S^1 上离 B 越来越近时,Q' 的象 Q 在直线 ξ 上离 A 越来越远,自然地我们可以定义圆 S^1 上点 B 的象是直线 ξ 上的无穷远点. 这样的中心射影建立了圆与拓广直线的一一对应, 这样的对应是连续的. 因此圆可以看成是拓广直线的一个直观模型. 拓广直线与普通

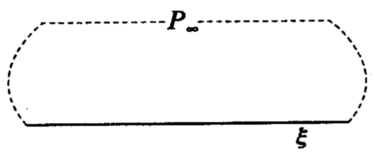


图 1-1-7

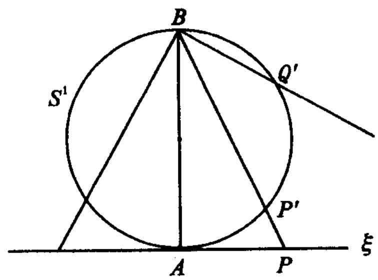


图 1-1-8

直线是不同的：拓广直线上一点不能把拓广直线分成不连通的两段；而拓广直线上的两点把它分成两段，其中一段包含无穷远点，另一段就是原来直线上的线段.

普通欧氏平面加上平面上所有直线的无穷远点后称为**拓广欧氏平面**，也简称为**拓广平面**. 这样，拓广欧氏平面上的点由两部分组成，一部分是原来平面上的点，称为普通点，另一种是添加的无穷远点. 上面定义的拓广直线也是拓广平面上的直线. 关于添加的无穷远点以及它们与原有的普通点之间的关系，我们约定：

(i) 拓广平面上任意两条拓广直线，如果作为普通直线平行，那么此两拓广直线上的无穷远点相同，否则不同；

(ii) 拓广平面上所有的无穷远点构成一条直线，它上面没有普通点，这条直线称为**无穷远直线**.

从这些约定可以得出：普通平面上两条直线平行的充要条件是它们的拓广直线在拓广平面上交于无穷远点；一组平行直线相交于同一个无穷远点. 这样，拓广平面上的直线也有两种：一种是添加无穷远点以后的拓广直线，此种直线上除一点外都是普通点；另一种是无穷远直线，这样的直线在拓广平面上只有一条.

下面的定理 1.1.1 与 1.1.2 给出了拓广欧氏平面上点与直线之间关系的重要性质.

定理 1.1.1 拓广平面上任两点决定一条直线.

证 拓广平面上两点有三种情况：(1) 两个普通点；(2) 两个无穷远点；(3) 一个普通点，另一个是无穷远点. 前两种情况易证. 下面设 A 是普通点，P_∞是无穷远点. 由于无穷远点是在普通直线上添加的，不妨设 P_∞是拓广直线 ξ 上的无穷远点. 如果点 A 在 ξ 上，则 ξ 就是过 A 与 P_∞的拓广直线. 如果 A 不在 ξ 上，作过 A 关于 ξ 的平行线 η，由上面约定(i)，P_∞也是 η 上的无穷远点，因此 η 决定的拓广直线(仍记为 η)就是过 A 与 P_∞的直线. 由于过 A 关于 ξ 平行的直线只有一条，过 A 与 P_∞的拓广直线是唯一的.

定理 1.1.2 拓广平面上任两直线交于一点.

证 拓广平面上的两条直线有两种情况：(1) 两条拓广直线；(2) 一条拓广直线，另一条无穷远直线. 如果 ξ,η 是两条拓广直线，若它们交于无穷远点，则 ξ,η 作为普通直线平行；如果 ξ,η 作为普通直线不平行，则交于一个普通点；如果 ξ 与 η 交于两点，则它们重合. 而一条拓广直线与无穷远直线交于此拓广直线上的无穷远点. 因此拓广平面上任意两条直线交于一点.

利用拓广平面的这些性质，容易把前面定义的中心射影扩充成为它们各自决定的拓广直线与拓广平面之间的一一映射. 以平面为例，如图 1-1-3，如果平面 π 与 π' 平行，平面 π 内直线 AB 在中心射影下的象是平面 π' 内与 AB 平行的直线 $A'B'$，补充定义以 O 为中心的中心射影把直线 AB 上无穷远点变成 $A'B'$ 上无穷远点. 这一无穷远点是共面直线 AB，$A'B'$ 各自生成的拓广直线上的交点. 这样，如果仍以 π,π' 表示 π 与 π' 的拓广平面，那么中心射影成为拓广平面 π 与 π' 之间的映射，它把 π 上拓广直线变为 π' 上拓广直线，把 π 上的无穷远直线变成 π' 上无穷远直线.

在图 1-1-4 情况中，仍以 π,π' 表示平面 π 与 π' 决定的拓广平面. 设 P 是平面 π 上影消线上的点，ζ 是 π 上过 P 的直线，ζ' 是中心射影下 ζ 的象. 由于 ζ' 与 OP 平行，它们生成的拓广直线交于无穷远点，自然地定义 ζ' 上的无穷远点作为 P 的象. 我们在前面已经证明，平面 π 上过 P 的直线(除了影消线 ξ)在中心射影下的象是平行线，这样定义的 P 的象与过 P 的直线的选取无关. 由于 P 是 ξ 上任一点，影消线 ξ 在中心射影下的象是拓广平面 π' 的无穷远直线. 类似地定义拓广平面 π 上的无穷远直线的象，这些象构成影消线 ξ'. 这样中心射影 φ 扩充成为拓广平

面 π 与 π' 之间的映射：对于拓广平面 π 上任一点，它与射影中心 O 的连线与 π' 的交点就是 π 上点的象. 易见扩充后，φ 是拓广平面 π 与 π' 之间的一一映射，φ 把共线点变成共线点，相交直线的交点变成象直线的交点. 扩充后的 φ 仍旧叫做拓广平面 π 与 π' 之间的中心射影.

拓广平面是射影平面的一个模型，所以中心射影也可以看成射影平面之间的一种映射，它是一种特殊的直射(定义见§2.3). 类似地，拓广直线是射影直线的一个模型，拓广直线之间的中心射影对应于射影平面上直线之间的透视(定义见§2.1).

在普通平面上，一条直线可以把它分成不连通的两部分，但是在拓广平面上一条拓广直线不能把它分成不连通的两部分. 如图 1-1-9，ξ 是一条直线，A,B 是 ξ 两侧的点. 过 A,B 的直线上包含无穷远点的连接 A,B 的线段与直线 ξ 不相交(两直线只有一个交点，连接 A,B 的由普通点组成的线段与 ξ 相交). 因此，在 ξ 两侧的点 A,B 可以用不与 ξ 相交的线段连接. 这说明直线 ξ 不能把拓广平面分成不连通的两部分. 同样不难知道，图 1-1-10 中两拓广直线 ξ,η 将拓广平面所分区域中，标记为 Ⅰ，Ⅱ 的两部分分别是连通的. 可以证明，Ⅰ，Ⅱ 两部分是互不连通的(证明可利用§1.2 中射影平面的半球面模型).

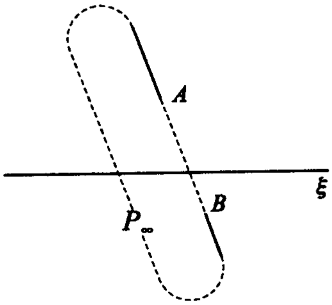


图 1-1-9

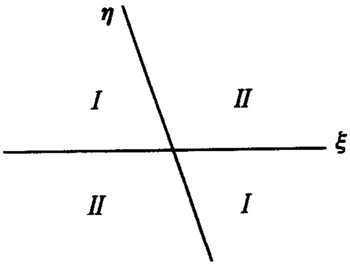


图 1-1-10

由于中心射影保持拓广平面上点和直线的结合关系，即它把共线点变成共线点，相交直线变成相交直线，交点变成交点. 利用这一性质可以解决一些欧氏几何的问题. 不难知道，适当安排两平面的位置，适当选取射影中心，可以使一平面上任意取定的直线在中心射影下成为影消线，在中心射影下它的象成为无穷远直线，而过影消线上点的直线成为一组平行线.

例 3 设过点 S 的三直线分别交直线 ξ 与 η 于 $A,B,C;A',B',C'$. O 是直线 ξ 与 η 的交点. 试证：四点 $O,P=AB'\times A'B,Q=AC'\times A'C,R=BC'\times BC'$ 共线.

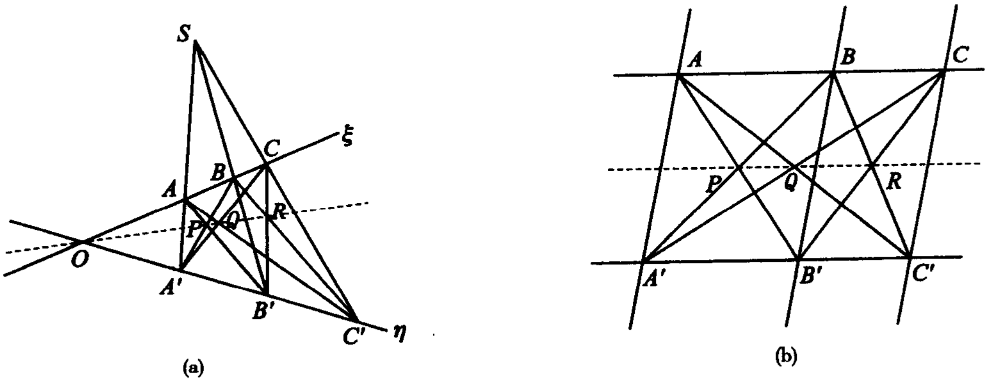


图 1-1-11

证 把图 1-1-11 中图形看成拓广平面上的图形，作中心射影，使直线 OS 成为无穷远直

线，各点在中心射影后的记号不变. 经过中心射影，ξ,η 成为平行线，直线 AA',BB',CC' 也互相平行. 这样 P,Q,R 成为三个平行四边形对角线的交点，所以 P,Q,R 共线，且所在直线与 ξ，η 平行，即 P,Q,R 与 ξ,η 上的无穷远点共线. 由于中心射影保持共线关系，因此中心射影前的四点 O,P,Q,R 也共线.

1.1.3 齐次坐标

下面给出拓广平面的解析模型.

取定普通平面上直角坐标系，点的坐标用数组 (x,y) 表示，其中 x,y 可取一切实数. 所有的数组 (x,y) 所成的集合与平面上的点是一一对应的，为了表示无穷远点，我们引进齐次坐标.

定义 1.1.3 如果点 P 的直角坐标是 (x,y)，那么称 (x_1,x_2,x_3) 是 P 的**齐次坐标**，其中 x_1，x_2,x_3 满足 $x=\dfrac{x_1}{x_3}$，$y=\dfrac{x_2}{x_3}$，$x_3\neq 0$.

从定义知道，三数组 $(3,5,2)$ 与 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},1\right)$ 是同一点 $P\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$ 的齐次坐标，如果 $\lambda\neq 0$，则 $(3\lambda,5\lambda,2\lambda)$ 也都是 P 的齐次坐标. 坐标原点 $O(0,0)$ 的齐次坐标可以是 $(0,0,\rho)(\rho\neq 0)$ 中任意一个. 由定义，同一点的不同的齐次坐标的分量相差一个非零常数因子，三数组 (x_1,x_2,x_3) 与 $\lambda(x_1,x_2,x_3)=(\lambda x_1,\lambda_2 x_2,\lambda x_3)$ 表示同一个点 $\left(\dfrac{x_1}{x_3},\dfrac{x_2}{x_3}\right)$，$x_3\neq 0$，$\lambda\neq 0$. 这样，欧氏平面上一点 (x,y) 的齐次坐标是成比例的一类三数组 $\{(\rho x,\rho y,\rho)\mid\rho\in\mathbf{R},\rho\neq 0\}$ 中的任何一个. 反过来，如果 (x_1,x_2,x_3) 中的 $x_3\neq 0$，那么它是以 $x=\dfrac{x_1}{x_3}$，$y=\dfrac{x_2}{x_3}$ 为坐标的点的齐次坐标.

设 ξ：$\xi_1 x+\xi_2 y+\xi_3=0$ 是直线的直角坐标方程，ξ_1,ξ_2 不全为 0. 以 $x=\dfrac{x_1}{x_3}$，$y=\dfrac{x_2}{x_3}$ 代入得直线 ξ 的齐次坐标方程：

$$\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0,$$

这是 x_1,x_2,x_3 的一次齐次方程. 设

$$\eta:\ \eta_1 x_1+\eta_2 x_2+\eta_3 x_3=0$$

是另一条直线的齐次坐标方程. 由于 ξ,η 是相异的两直线，ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 η_1,η_2,η_3 不能成比例. 下面计算 ξ 与 η 的交点.

(1) 如果 ξ 与 η 不平行，则 $\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}\neq 0$. 这时交点的直角坐标是

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}\xi_3 & \xi_1\\ \eta_3 & \eta_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}}.$$

交点的齐次坐标可取为 $\left(\begin{vmatrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\xi_3 & \xi_1\\ \eta_3 & \eta_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}\right)$，这是一个普通点的齐次坐标.

(2) 如果 ξ 与 η 平行，这时 $\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}=0$，$\xi$ 与 η 没有普通点作为交点，即任何 (x_1,x_2,x_3)，$x_3\neq 0$，不可能同时满足 ξ 与 η 的方程. 三数组 $(\xi_2,-\xi_1,0)$ 或者与之成比例的 $(\eta_2,-\eta_1,0)$ 满足直线 ξ 与 η 的方程，$(\xi_2,-\xi_1,0)$ 不是普通点的齐次坐标. $(\xi_2,-\xi_1,0)$ 也满足与 ξ 平行的任一直

线的方程：

$$\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+k x_3=0,$$

其中 k 为任意实数.

从这些讨论，我们自然地将满足直线方程

$$\xi:\ \xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0$$

的三数组 $(\xi_2,-\xi_1,0)$ 作为直线 ξ 上无穷远点的齐次坐标. 这样，直线 ξ 的齐次坐标方程可以看成 ξ 决定的拓广直线的方程. 满足 $\xi:\ \xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0$ 的三数组 (x_1,x_2,x_3)（x_1,x_2,x_3 不全为 0）就是 ξ 上点的齐次坐标，$x_3\neq 0$ 对应普通点，$x_3=0$ 决定无穷远点. 例如 $(1,2,0)$ 是直线 $2x_1-x_2+\lambda x_3=0$ 上的无穷远点（λ 可取任意实数）. x 轴上的无穷远点可用 $(1,0,0)$ 表示，y 轴上的无穷远点用 $(0,1,0)$ 表示. 自然地，无穷远直线的方程可写成

$$\alpha_\infty:\ x_3=0.$$

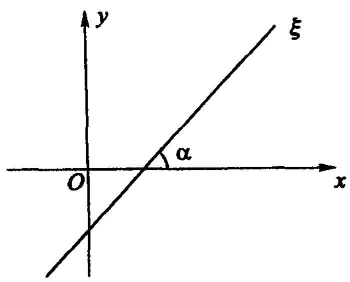


图 1-1-12

如图 1-1-12，直线 $\xi:\ \xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0$ 与 x 轴夹角为 α，$\tan\alpha=-\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$，$\cos\alpha:\sin\alpha=-\xi_2:\xi_1$ 是直线 ξ 的方向. 与直线 ξ 平行的直线的方向也是 $-\xi_2:\xi_1$. 如果 $\xi_1\neq 0$，那么 ξ 上任一普通点可用 $\left(-\dfrac{1}{\xi_1}(\xi_2 t+\xi_3),t\right)$ 表示，相应的齐次坐标是 $(-\xi_2 t-\xi_3,t\xi_1,\xi_1)$. 当 $t\neq 0$，它也可表示成 $\left(\xi_2+\dfrac{1}{t}\xi_3,-\xi_1,-\dfrac{1}{t}\xi_1\right)$. t 趋于无穷大，也就是直线 ξ 上点趋于无穷远点时，可得极限 $(\xi_2,-\xi_1,0)$. 这从另一角度说明了以 $(\xi_2,-\xi_1,0)$ 表示直线 ξ 上无穷远点的合理性，用 $(\xi_2,-\xi_1,0)$ 表示无穷远点也符合前面的约定(i)与(ii).

这样拓广欧氏平面上的直线也都可用 x_1,x_2,x_3 的一次齐次方程表示，

$$\xi:\ \xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0,$$

其中系数 ξ_1,ξ_2,ξ_3 不能全为 0. 如果 ξ_1,ξ_2 不全为 0，它表示一条拓广直线，如果 ξ_1,ξ_2 都等于 0，这时 $\xi_3\neq 0$，此即 $\alpha_\infty:\ x_3=0$，是无穷远直线的方程. 显然直线 ξ 与 $\eta:\ \eta_1 x_1+\eta_2 x_2+\eta_3 x_3=0$ 表示同一直线，即 ξ 与 η 重合的充要条件是 $\xi_1:\xi_2:\xi_3=\eta_1:\eta_2:\eta_3$. 所以拓广平面上直线 $\xi:\ \xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0$ 也可以用三数组 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 表示，称它是直线 ξ 的齐次坐标或 ξ 的线坐标. 易见直线的线坐标也是齐次坐标. 例如，$2x_1-3x_2+5x_3=0$ 的线坐标是 $(2,-3,5)$，或 $\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{3}{5},1\right)$，或 $(4,-6,10)$.

拓广平面上点与直线以及它们的关系在齐次坐标下可以总结为以下几点.

(1) 拓广平面上点可以用齐次坐标 (x_1,x_2,x_3) 表示，成比例的表示同一点，x_1,x_2,x_3 不全为 0. 当 $x_3\neq 0$ 时，(x_1,x_2,x_3) 表示普通点；当 $x_3=0$ 时，表示无穷远点.

(2) 拓广平面上直线也可用齐次坐标 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 表示，ξ_1,ξ_2 不全为零时是拓广直线；$\xi_1=\xi_2=0$，而 $\xi_3\neq 0$，表示无穷远直线.

(3) 过两个不同点 $A(a_1,a_2,a_3)$，$B(b_1,b_2,b_3)$ 的直线 ξ 的齐次坐标是

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right).$$

(4) 两直线 $\xi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，$\eta(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 的交点 A 的齐次坐标是

$$\left(\begin{vmatrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\xi_3 & \xi_1\\ \eta_3 & \eta_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}\right).$$

(3)与(4)的证明很容易，点 A 与 B 都满足方程

$$\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}x_1+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}x_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}x_3=0.$$

因此，它是经过 A,B 的直线方程. 可以证明，如果 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=0$，但 a_1,a_2 不全为 0，则 $\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$与$(a_2,-a_1,0)$成比例. 这时过 A,B 的直线可以表示为 $a_2x_1-a_1x_2=0$. 类似情形对(4)也成立.

再一次指出，齐次坐标的分量不能全为 0，$(0,0,0)$不表示任何点与直线的齐次坐标. 如果允许$(0,0,0)$表示点，这一点将在任一直线 $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$ 上. 另外，数组$(1,2,3)$可表示点的齐次坐标，也可表示直线的齐次坐标，这要看具体情况，由上下文决定.

如果把拓广平面上的点(普通点与无穷远点)不加区分，直线(拓广直线与无穷远直线)也不加区分，同等看待，就得到射影平面，所以拓广平面是射影平面的一个模型. 弄清拓广平面的构造有助于我们学习与理解射影几何. 另一方面，从拓广平面上去掉无穷远直线就回到普通平面，而射影几何的定理与性质都可以在拓广平面上体现，经过适当的解释就能运用到欧氏几何上. 以后会看到射影几何不但可用于研究欧氏几何，也可以用于研究其他几何，如仿射几何、双曲几何、椭圆几何等.

改造欧氏直线与平面的方法也可以用于高维欧氏空间，也可以运用于仿射空间，得到高维的拓广空间，从而得到高维射影几何的模型. 例如，在三维欧氏空间中对于每一条直线添加一个无穷远点，空间的平行直线上的无穷远点相同. 约定同一平面上的所有直线上的无穷远点构成该平面上的无穷远直线，而空间的所有的无穷远点构成一个平面，叫无穷远平面，并且其上没有普通直线生成的拓广直线，也没有普通点. 这样得到的空间叫拓广欧氏空间，它是三维射影空间的一个模型. 如果(x,y,z)是欧氏空间中点的直角坐标，对应的齐次坐标是(x_1,x_2,x_3,x_4)，其中 $x_4\neq0$，$x=\dfrac{x_1}{x_4}$，$y=\dfrac{x_2}{x_4}$，$z=\dfrac{x_3}{x_4}$. 拓广空间的无穷远平面的方程是 $x_4=0$. 显然，由三维欧氏空间中任一平面生成的拓广平面是这样生成的拓广空间的子空间，如果平面的方程是

$$\xi_1x+\xi_2y+\xi_3z+\xi_4=0,$$

ξ_1,ξ_2,ξ_3 不全为 0，那么此平面生成的拓广平面是

$$\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3+\xi_4x_4=0.$$

满足此方程的(x_1,x_2,x_3,x_4)中，如果 $x_4=0$，它是此平面上无穷远点的齐次坐标.

欧氏空间中直线可看成空间两平面的交线，空间直线可表示成

$$\begin{cases}\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3+\xi_4x_4=0,\\ \eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3+\eta_4x_4=0.\end{cases}$$

此式中 ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 η_1,η_2,η_3 不成比例，这一直线是欧氏空间中普通直线. 如果 ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 η_1,η_2,η_3 成比例，自然 $\xi_1:\xi_2:\xi_3:\xi_4\neq\eta_1:\eta_2:\eta_3:\eta_4$，平面 $\xi_1x+\xi_2y+\xi_3z+\xi_4=0$ 和 $\eta_1x+\eta_2y+\eta_3z+\eta_4=0$ 平行. 如果 ξ_1,ξ_2,ξ_3 不全为 0，此两平面的交线也可以表示成

$$\begin{cases}\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0,\\ x_4=0.\end{cases}$$

这是拓广平面 $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3+\xi_4x_4=0$ 上的无穷远直线.

习题 1.1

1. 写出下列各直线上的无穷远点的齐次坐标：

(1) $y=\frac{3}{4}x+6$；(2) $3x+y=0$；(3) x 轴与 y 轴的角平分线.

2. 已知四直线 ξ：$x_1-x_2=0$，η：$x_1+x_2=0$，ε：$2x_1+x_2-x_3=0$，τ：$x_1+x_2+2x_3=0$. 试求直线$(\xi\times\eta)\times(\varepsilon\times\tau)$与$(\xi\times\tau)\times(\varepsilon\times\eta)$的方程.

3. 试求以 $x_1+x_2-x_3=0$，$2x_1-x_2=0$，$x_1-x_2+x_3=0$ 为边的三角形的顶点的坐标.

4. 证明：(1) 任意三角形经过中心射影可以成为等边三角形；

(2) 任意平面四边形可以经中心射影成为平行四边形.

5. 设三条定直线 ξ,η,ζ 交于点 O，点 A,B 与 O 共线，设 P 是直线 ξ 上动点，PA,PB 分别交 η,ζ 于 Q,R，求证：QR 过直线 AB 上一定点.

6. 设 A,B 是定直线 ξ 外两定点，X,Y 是 ξ 上任意两点，记 $M=AY\times BX$，$N=AX\times BY$. 求证：MN 过 AB 上一定点.

7. 下列欧氏平面上的图形或者量哪些在中心射影下可能改变：

平行直线；三共线点；三直线交于一点；两点之间距离；两直线的夹角；三角形；梯形；三角形三边上高的交点；直角三角形；圆；双曲线.

如果把它们看成拓广平面上的图形或量，哪些在中心射影下不改变？

§1.2 射影平面

1.2.1 射影平面的定义

如果把拓广直线上的点不加区别，也就是不再区分普通点与无穷远点，所得到的直线叫做**射影直线**. 同样对于拓广平面上的普通点与无穷远点也不加区别，同等看待，所得到的平面叫**射影平面**，它上面的点叫**射影点**. 射影点经常简称为点，射影平面记为 P^2. 把拓广平面上的两种直线（拓广直线与无穷远直线）也不加区别都作为射影平面上的射影直线，简称为直线. 根据这一定义，从定理 1.1.1 与 1.1.2 知道射影平面上点与直线的基本关系是：

定理 1.2.1 (i) 过射影平面上任意两个射影点有且只有一条射影直线；

(ii) 射影平面上任意两条射影直线交于一个射影点.

从 §1.1 的讨论知道，射影平面上的点可用非零三数组表示. 点 A 可用(a_1,a_2,a_3)表示，其中 a_1,a_2,a_3 是不全为零的三个实数，三数组$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$也表示点 A，$\lambda\neq0$. $a=(a_1,a_2,a_3)$叫做点 A 的齐次坐标或者解析表示. 三数组(p_1,p_2,p_3)与(q_1,q_2,q_3)表示同一点的条件是 p_1,p_2,p_3 与 q_1,q_2,q_3 成比例. 射影平面上直线在齐次坐标下用 x_1,x_2,x_3 的一次齐次方程表示，

$$\xi:\ \xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0,$$

它的系数 ξ_1,ξ_2,ξ_3 不能全为 0. 直线 ξ 的方程被 $\xi_1:\xi_2:\xi_3$ 确定，三数组(ξ_1,ξ_2,ξ_3)叫做直线 ξ 的线坐标或者解析表示. 例如，$2x_1+3x_2-x_3=0$ 是一条射影直线的方程，点 $A(3,2,12)$，$B(3,-2,0)$都是此直线上的点，而 $D(1,1,1)$不满足方程 $2x_1+3x_2-x_3=0$，因此 D 不是此直