



面向 21 世纪 课 程 教 材  
Textbook Series for 21st Century

# 微积分及其应用

白银凤 罗蕴玲 主编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪课程教材  
Textbook Series for 21st Century

# 微积分及其应用

白银凤 罗蕴玲 主编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

## 内容简介

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材。主要内容有:函数极限与连续性、导数与微分、中值定理与导数的应用、积分、空间解析几何、多元函数微分法及其应用、多元函数积分及其应用、微分方程与差分方程简介、无穷级数、数学建模初步及其应用范例。附录包括:积分表、数学软件 Maple 的简明介绍、习题答案、名词术语索引。

本书在概念与理论、方法与技巧、实践与应用等三方面进行了较为合理的安排。在整体结构上力求严谨简明,语言表述上力求通俗易懂。书中精选了大量有实际背景的例题和习题,并特别增加了数学建模初步和数学软件 Maple 的简明介绍,以适应新世纪对数学教学的发展需要。

本书可作为高等农林院校的教材,也可作为高等院校经济管理类专业的教材,还可作为科技工作者的自学用书或参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

微积分及其应用/白银凤,罗蕴玲主编. —北京:高等教育出版社,2001(2002重印)  
ISBN 7-04-009884-9

I. 微… II. ①白…②罗… III. 微积分 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 023747 号

微积分及其应用

白银凤 罗蕴玲 主编

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
传 真	010-64014048		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>

---

经 销	新华书店北京发行所	版 次	2001 年 7 月第 1 版
印 刷	中国科学院印刷厂	印 次	2002 年 7 月第 2 次印刷
开 本	787×960 1/16	定 价	24.70 元
印 张	29.5		
字 数	550 000		

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

## 《微积分及其应用》编写人员

主 编	白银凤	罗蕴玲	
副主编	刘瑞芹	丁体明	赵广生
	申玉发	袁 星	孟 军
参 编	汪 雷	宋向东	杜世平
	孙建华	邓阳春	郭亚军
	尹海东	熊 骏	

# 序

微积分是大学中普遍开设的一门重要的基础课。在科学技术突飞猛进的今天,微积分学这门古老的学科依然青春常在。它不仅对众多专业的学生来说,仍然是进一步学习专业基础课和专业课必不可少、至关重要的基础,而且随着现代科学技术的发展,数理方法向各门学科全面渗透,对包括微积分在内的数学课程的教学要求也越来越高。特别是鉴于数学课程对思维训练的特殊作用,数学教育已成为全面提高学生素质的重要途径。如何适应新形势的需要,进一步提高微积分课程的教学质量,成为摆在高等院校广大数学教师面前的一个十分重要的任务。

教材是教学的主要依据,是保证教学质量的基础。教育部组织的“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”实施以来,许多院校把教材建设作为一件大事来抓,组织编写出了一批各具特色的微积分教材,对于促进微积分课程教学水平的提高起到了良好的作用。作为教育部这一改革计划的 04—6 项目的参加者,河北农业大学等校编写的《微积分及其应用》,就是其中之一。在这本教材的编写过程中,河北农业大学、四川农业大学、东北农业大学、新疆农业大学、北京农学院、河北职业技术师范学院等校的数学教师们从面向 21 世纪农林院校人才培养目标的总体需要出发,认真总结他们多年从事微积分教学积累起来的宝贵经验,吸收深入进行教育教学改革所取得的成果,努力在教材中渗透现代数学的思想和方法,做到融科学性、适用性于一体。总体看来,这本教材在内容选取、体系编排上有不少独到之处,具体体现在以下几个方面。

一是把函数连续性和极限概念结合起来讲述。这样做,避免了通常先系统讲述极限理论再引进函数连续性带来的某些不必要的重复,使极限理论的内容更具体而充实,引导学生尽快转入极限理论对函数研究的运用,更深刻地理解极限理论对微积分基本概念的基础性作用;同时能够让学生更早地利用函数的连续性去计算极限,解决了在学习连续性之前只能利用定义证明极限带来的习题安排等方面的困难,而用定义证明极限的训练对于非数学专业的学生来说本来就不应当要求过高。

二是在定积分和不定积分的讲述次序上,改变了传统的做法,先讲定积分,后讲不定积分。事实上积分学的核心概念是定积分,真正体现微积分学的思想,

体现极限论的观点,且与微积分学实际应用密切相关的是定积分.作为微分的逆运算而提出的不定积分,除了通过微积分基本定理在联系微分与积分上起着不可替代的作用之外,更多的是形式运算及技巧上的变化,其内容的选取完全可视学时的多少及对学生的不同要求而定.通过编者的精心编排,突出定积分这一占据核心地位的重要基本概念的做法,达到了预期的效果,在逻辑上也显得十分自然.

三是对微元法的处理,采用了较为严格的形式,避免了常见于一些教科书中的“近似于”等模糊概念以及使用未曾定义量的矛盾现象.尽管对初学者来说,这种处理方式的优点未必能完全体会到,但从数学的严格性来说可看出编者已经做了很大的努力,而严格性的训练正是数学教育的重要内容之一.

四是始终注意抓住培养学生“用数学”的意识和能力这一重要环节.教材中精选了大量有实际背景的例题和习题,并专门编写了数学建模初步一章,引导学生把学到的数学知识应用到实际问题中去.在知识经济已见端倪的今天,学生的创新意识和创新能力的培养成为当今教育界关注的焦点.加强学生使用数学工具解决实际问题的能力的培养,不仅有助于提高他们学习数学的兴趣,加强他们对数学知识的理解,也有助于他们的创新意识和创新能力的加强和提高.

这部教材把数学软件 Maple 的介绍作为附录,指导学生尽量使用计算机来完成有关计算.实际工作中大量的计算问题(甚至某些数学公式运算)都是可以通过采用现代计算机技术来完成的.这种做法体现了时代精神,也为在农林院校开设数学实验课提供了重要的参考.此外,书中在所涉及的主要数学名词及外国数学家人名后附以英文原文,也是适应经济全球化形势对教材的要求的.

相信《微积分及其应用》教材的出版,能够在促进农林院校高等数学教学改革中发挥很好的作用.

安幼山

2000年10月

# 前 言

本书是原国家教委高教司[1996]61号文件批准立项的《高等农林院校本科数学(含生物统计)系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践》的04—6课题的研究成果。

按照国家教育部制定并实施的《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的目标和要求,河北农业大学作为04—6课题组的成员,对高等数学课程教学内容的改革进行了研究与实践,在初步总结改革的看法和设想的基础上,于1999年完成了书稿《高等数学》在河北农业大学、四川农业大学,新疆农业大学等院校农林类本科各专业进行了使用。根据两年的使用情况以及新世纪高等农林教育的发展需要,在征求了多方面的意见后,河北农业大学联合四川农业大学、东北农业大学、新疆农业大学、北京农学院、河北职业技术学院等院校对《高等数学》进行了较大的调整、修改、补充和完善,从而形成现在这本面向21世纪课程教材《微积分及其应用》。

在编写这本教材时,我们努力在概念与理论、方法与技巧、实践与应用这三方面作出较为合理的安排;在内容的深度和广度上力求以适应农林、经济类不同专业使用;在整体结构上力求严谨简明;语言表述上力求通俗易懂;适当减少一些繁难的定理证明和复杂的运算技巧,突出基本概念、基本方法、基本技能和几何直观,并在各章又分别增加了涉及物理、力学、生物、医学、经济、管理及日常生活等多方面的实际例子,力求较好地体现微积分与现实问题的密切联系,以提高学生学习微积分的兴趣,增强学生应用数学知识解决实际问题的意识。另外还特别增加了数学建模初步及数学软件Maple的简明介绍,以达到提高学生综合数学素质的目的。

本书由农业部教学指导委员会数学组成员安幼山教授审稿。安幼山教授在百忙中对本书提出了很多前瞻性和指导性意见,为本书增色不少。

在本书出版的时候,我们衷心地感谢教育部适时地、富有远见地推出了《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》,为农林类本科数学教学改革指明了方向,也为我们提供了参与的机会。还要感谢04—6课题组,感谢农业部教学指导委员会给予的鼓励,感谢河北农业大学教务处、数学教研室所给予的支持和帮助。

高等教育出版社负责农林类面向21世纪课程教材的同志们,对本书的出版

给予了极大的支持,对他们的工作,我们表示由衷的感谢!

由于编者水平所限,错误和不妥之处在所难免,敬请批评指正,我们将不胜感激.

编者

2000年10月



# 目 录

第一章 函数的极限与连续性 .....	( 1 )
1.1 函数 .....	( 1 )
一、函数概念及其几种特性 .....	( 1 )
二、反函数 .....	( 4 )
三、复合函数 .....	( 5 )
四、基本初等函数、初等函数 .....	( 7 )
五、函数关系的建立 .....	( 11 )
习题 1.1 .....	( 12 )
1.2 函数的极限与连续 .....	( 14 )
一、数列的极限 .....	( 14 )
二、函数的极限 .....	( 18 )
三、无穷小与无穷大 .....	( 22 )
四、函数的连续性 .....	( 23 )
五、函数的间断点 .....	( 26 )
习题 1.2 .....	( 27 )
1.3 函数极限的性质及运算法则 .....	( 27 )
一、函数极限的性质及运算法则 .....	( 28 )
二、极限存在准则和两个重要极限 .....	( 33 )
习题 1.3 .....	( 39 )
1.4 无穷小的比较 .....	( 40 )
习题 1.4 .....	( 42 )
1.5 初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质 .....	( 42 )
一、初等函数的连续性 .....	( 42 )
二、闭区间上连续函数的性质 .....	( 44 )
习题 1.5 .....	( 46 )
第二章 导数与微分 .....	( 47 )
2.1 导数的概念 .....	( 47 )
一、变化率 .....	( 47 )
二、导数的概念 .....	( 48 )
三、导数的量纲 .....	( 51 )

四、可导性与连续性的关系 .....	( 52 )
五、可导性的图形意义 .....	( 53 )
习题 2.1 .....	( 54 )
2.2 导数的运算法则 .....	( 55 )
一、基本初等函数的导数 .....	( 55 )
二、函数和、差、积、商的导数 .....	( 61 )
三、复合函数的导数 .....	( 62 )
四、隐函数的导数 .....	( 65 )
五、由参数方程所确定的函数的导数 .....	( 67 )
习题 2.2 .....	( 70 )
2.3 函数的微分 .....	( 71 )
一、微分的概念 .....	( 72 )
二、微分的运算与微分形式的不变性 .....	( 74 )
三、微分在近似计算中的应用 .....	( 76 )
习题 2.3 .....	( 77 )
<b>第三章 中值定理与导数的应用</b> .....	( 78 )
3.1 中值定理 .....	( 78 )
一、罗尔中值定理 .....	( 78 )
二、拉格朗日中值定理 .....	( 80 )
三、泰勒中值定理 .....	( 82 )
四、柯西中值定理 .....	( 84 )
习题 3.1 .....	( 85 )
3.2 洛必达法则 .....	( 86 )
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限 .....	( 86 )
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限 .....	( 89 )
三、其他类型未定式的极限 .....	( 89 )
习题 3.2 .....	( 92 )
3.3 函数单调增减性及其判别法 .....	( 93 )
习题 3.3 .....	( 95 )
3.4 函数的极值及其求法 .....	( 96 )
一、极值的定义 .....	( 96 )
二、极值存在的条件 .....	( 96 )
习题 3.4 .....	( 99 )
3.5 最大值、最小值及其应用 .....	( 100 )
习题 3.5 .....	( 103 )

3.6 曲线的凹凸性及拐点	(103)
一、曲线的凹凸性及拐点	(103)
二、曲率	(105)
习题 3.6	(107)
3.7 函数作图	(107)
习题 3.7	(110)
3.8 导数应用实例	(110)
一、变化率及相对变化率在经济中的应用	(110)
二、征税的学问	(115)
三、接受能力与讲授时间的关系	(116)
四、您的书写吊灯应该挂多高	(116)
五、鱼群的适度捕捞	(117)
习题 3.8	(118)
<b>第四章 积分</b>	(119)
4.1 定积分概念	(119)
一、引例	(119)
二、定积分概念	(121)
三、定积分的几何意义和物理意义	(122)
四、定积分的基本性质	(124)
习题 4.1	(128)
4.2 微积分基本定理	(128)
一、微积分第一基本定理	(128)
二、原函数与不定积分	(130)
三、微积分第二基本定理	(136)
习题 4.2	(137)
4.3 基本积分法	(139)
一、换元积分法	(139)
二、分部积分法	(152)
三、几种特殊类型函数的积分举例	(157)
习题 4.3	(160)
4.4 反常积分	(163)
一、无穷区间上的反常积分	(163)
二、有无穷间断点的反常积分	(165)
三、 $\Gamma$ 函数与 $\beta$ 函数	(167)
习题 4.4	(169)
4.5 定积分的应用	(170)
一、定积分的微元法	(170)

二、定积分的几何应用 .....	(171)
三、定积分的物理应用 .....	(178)
四、定积分的其他应用 .....	(179)
习题 4.5 .....	(182)
<b>第五章 空间解析几何</b> .....	(184)
5.1 空间直角坐标系 .....	(184)
一、空间直角坐标系 .....	(184)
二、空间两点间的距离 .....	(185)
习题 5.1 .....	(186)
5.2 向量代数 .....	(186)
一、向量的概念 .....	(186)
二、向量的线性运算 .....	(187)
三、向量的坐标表示 .....	(189)
四、向量的模与方向余弦的坐标表示式 .....	(191)
五、向量的标量积 .....	(192)
六、向量的向量积 .....	(194)
习题 5.2 .....	(196)
5.3 平面与空间直线 .....	(197)
一、平面 .....	(197)
二、空间直线 .....	(202)
习题 5.3 .....	(205)
5.4 空间曲面与空间曲线 .....	(206)
一、空间曲面 .....	(206)
二、空间曲线 .....	(209)
习题 5.4 .....	(212)
5.5 二次曲面 .....	(212)
一、椭球面 .....	(213)
二、抛物面 .....	(214)
三、双曲面 .....	(215)
四、二次锥面 .....	(216)
习题 5.5 .....	(216)
<b>第六章 多元函数微分法及其应用</b> .....	(217)
6.1 多元函数的基本概念 .....	(217)
一、区域 .....	(217)
二、多元函数的定义 .....	(218)
三、二元函数的极限与连续 .....	(220)
习题 6.1 .....	(225)

6.2 偏导数与全微分 .....	(225)
一、偏导数 .....	(225)
二、全微分 .....	(230)
习题 6.2 .....	(234)
6.3 多元复合函数与隐函数的求导法则 .....	(235)
一、多元复合函数的求导法则 .....	(235)
二、隐函数求导法则 .....	(241)
习题 6.3 .....	(244)
6.4 偏导数的几何应用 .....	(245)
一、空间曲线的切线与法平面 .....	(245)
二、曲面的切平面与法线 .....	(246)
习题 6.4 .....	(248)
6.5 最优化问题 .....	(249)
一、极值的概念 .....	(249)
二、极值存在的条件 .....	(250)
三、最大值与最小值 .....	(251)
四、最优化问题 .....	(252)
五、最小二乘法及其应用 .....	(256)
习题 6.5 .....	(261)
<b>第七章 多元函数积分及其应用 .....</b>	<b>(263)</b>
7.1 二重积分的概念与性质 .....	(263)
一、二重积分的概念 .....	(263)
二、二重积分的性质 .....	(266)
习题 7.1 .....	(267)
7.2 二重积分的计算 .....	(267)
一、在直角坐标系下计算二重积分 .....	(268)
二、在极坐标系下计算二重积分 .....	(275)
习题 7.2 .....	(279)
7.3 二重积分的应用 .....	(280)
一、立体的体积 .....	(280)
二、曲面面积 .....	(282)
习题 7.3 .....	(286)
7.4 三重积分的概念及其计算 .....	(286)
一、三重积分的概念 .....	(286)
二、三重积分的计算 .....	(288)
习题 7.4 .....	(296)
7.5 线积分 .....	(297)

一、对弧长的线积分 .....	(297)
二、对坐标的线积分 .....	(301)
三、格林定理及其应用 .....	(308)
习题 7.5 .....	(312)
<b>第八章 微分方程与差分方程简介</b> .....	<b>(315)</b>
8.1 微分方程的基本概念 .....	(315)
一、引例 .....	(315)
二、微分方程的基本概念 .....	(316)
习题 8.1 .....	(317)
8.2 可分离变量的一阶微分方程 .....	(318)
习题 8.2 .....	(320)
8.3 一阶线性微分方程 .....	(320)
一、一阶线性齐次微分方程 .....	(320)
二、一阶线性非齐次微分方程 .....	(321)
三、伯努利微分方程 .....	(324)
习题 8.3 .....	(325)
8.4 可降阶的高阶微分方程 .....	(326)
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的高阶微分方程 .....	(326)
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 .....	(327)
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 .....	(328)
习题 8.4 .....	(329)
8.5 二阶常系数线性微分方程 .....	(330)
一、通解的结构 .....	(330)
二、二阶常系数线性齐次微分方程 .....	(331)
三、二阶常系数线性非齐次微分方程 .....	(334)
习题 8.5 .....	(338)
8.6 微分方程应用实例 .....	(338)
一、嫌疑犯问题 .....	(339)
二、含盐量问题 .....	(340)
三、悬链线方程问题 .....	(340)
习题 8.6 .....	(342)
*8.7 差分方程简介 .....	(342)
一、差分方程的基本概念 .....	(343)
二、线性差分方程的基本定理 .....	(345)
三、一阶线性差分方程 .....	(345)
四、二阶线性差分方程 .....	(351)
习题 8.7 .....	(356)

<b>* 第九章 无穷级数</b> .....	(358)
9.1 常数项级数的概念及性质 .....	(358)
一、常数项级数的概念 .....	(358)
二、无穷级数的基本性质 .....	(360)
习题 9.1 .....	(363)
9.2 常数项级数敛散性的判别方法 .....	(364)
一、正项级数及其敛散性的判别方法 .....	(364)
二、交错级数及其敛散性的判别方法 .....	(370)
三、绝对收敛与条件收敛 .....	(371)
习题 9.2 .....	(373)
9.3 幂级数 .....	(374)
一、函数项级数的一般概念 .....	(374)
二、幂级数及其收敛区间 .....	(375)
三、幂级数的运算 .....	(379)
四、函数展开成幂级数 .....	(382)
五、幂级数在近似计算中的应用 .....	(386)
习题 9.3 .....	(389)
<b>第十章 数学建模初步及应用范例</b> .....	(390)
10.1 建立数学模型的一般步骤 .....	(390)
10.2 应用范例 .....	(392)
一、不允许缺货的存贮问题 .....	(392)
二、交通管理问题 .....	(393)
三、铅球投掷问题 .....	(395)
四、传染病的传播问题 .....	(398)
习题 10 .....	(401)
<b>附录 I 积分表</b> .....	(403)
<b>附录 II Maple 简介</b> .....	(412)
<b>习题答案</b> .....	(421)
<b>名词术语索引</b> .....	(449)
<b>参考文献</b> .....	(453)

# 第一章 函数的极限与连续性

微积分学的基本内容是用极限方法研究函数. 微积分中的几个主要概念, 都是建立在极限概念这个基础上的. 可以说, 微积分这门学科的产生过程就是人类对极限的认识逐步加深, 极限思想逐步清晰的过程. 在本书的学习过程中, 读者应当抓住这一线索, 充分体会极限理论是如何作为微积分的理论基础的.

本章介绍极限的概念及其性质, 并利用极限概念讨论函数的连续性.

## 1.1 函 数

### 一、函数概念及其几种特性

#### 1. 函数的概念

在同一自然现象或技术过程中, 往往同时有几个变量在变化, 这些变量又不是相互独立的, 而是遵循一定的变化规律相互联系的. 下面我们先看两个变量的例子(多于两个变量的情形见第六章).

**例 1** 设圆的半径为  $R$ , 则圆的面积  $S$  与  $R$  之间有下面关系:

$$S = \pi R^2$$

圆的周长  $C$  与  $R$  之间的关系为:

$$C = 2\pi R$$

**例 2** 设有一物体做自由落体运动, 下落的时间为  $t$ , 开始下落的时刻为  $t=0$ , 则该物体落下的距离  $S$  与时间  $t$  有如下关系:

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

从上面这两个例子可以看出, 在所给的问题中, 只要我们指定了一个量的值, 就可按照相应的法则确定另一个量的值, 两个变量的这种对应关系, 我们称之为函数, 下面对函数这一概念给出确切的定义.

**定义 1** 设  $x$  和  $y$  是两个变量,  $D$  是一个非空数集. 如果对于每个数  $x \in D$ , 变量  $y$  按照一定法则  $f$  总有确定的数值与它对应, 则称  $y$  是  $x$  的函数(function), 记作  $y = f(x)$ . 称数集  $D$  为这个函数的定义域(domain),  $x$  为自变量,  $y$



为因变量. 当  $x$  遍取  $D$  中一切数值时, 对应的因变量  $y$  所取值的全体称为这个函数的值域(range), 记为  $f(D)$ .

下面对函数定义作三点说明:

1° 定义中表示对应法则的记号“ $f$ ”, 也可用其他字母表示, 如: “ $\varphi$ ”、“ $F$ ”、“ $g$ ”等等;

2° 定义中如果  $x$  在  $D$  中任取一个值时, 对应的  $y$  都是惟一的, 则称此函数为单值函数(uniform function), 否则称为多值函数(multivalued function). 今后如无特别声明, 本书所说的函数均指定义域、值域皆为实数集的子集的单值实函数.

3° 在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 在数学中, 有时不考虑函数的实际意义, 这时约定: 函数的定义域就是由使算式有意义的所有实数组成的集合.

例 3 (1)  $y = x^2$

$$(2) y = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

(3) 变量  $x$  与  $y$  的对应关系由下面方程确定:

$$xy - 2^{\frac{1}{x}} + y^2 = 0$$

由函数的定义, 可知上面三个小题中的  $y$  均是  $x$  的函数, 另外我们还可看出, 在(1)和(2)中, 因变量是用仅含自变量的解析式直接表示的, 而(3)中的因变量  $y$  和自变量  $x$  的对应关系则是用方程表示的, 为了对此加以区别, 称前者为显函数(explicit function), 其一般形式为  $y = f(x)$ ; 后者为隐函数(implicit function), 一般形式为  $F(x, y) = 0$ . 显然任何显函数  $y = f(x)$  均可表示为隐函数的形式:

$$F(x, y) = y - f(x) = 0$$

但反之不一定.

另外, 从(2)中还可看到, 一个函数可以用几个不同的式子表示, 称这种在定义域的不同部分用不同式子表示的函数为分段函数(piecewise function).

## 2. 函数的几种特性

### (1) 函数的有界性

设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 数集  $W \subset D$ . 如果存在正数  $M$ , 使得对于  $W$  中的一切  $x$ , 有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数  $y = f(x)$  在  $W$  上是有界的(bounded). 否则称函数  $y = f(x)$  在  $W$  上是无界的(unbounded).