



偏微分方程逆问题的 数值方法及其应用

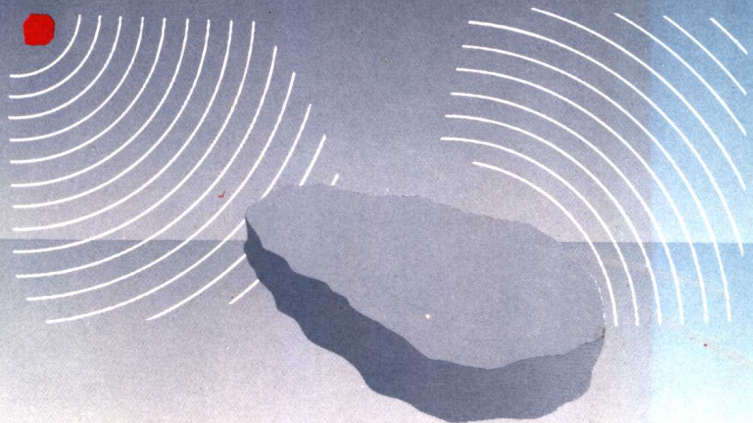
苏超伟 著



西北



版社



偏微分方程逆问题的 数值方法及其应用

苏超伟 著

西北工业大学出版社

1995年10月 西安

(陕)新登字 009 号

【内容简介】 本书的目的是向读者介绍解决偏微分方程逆问题的一些数值方法。第一章介绍有关不适定问题和偏微分方程逆问题的概念及实例；第二章介绍不适定问题的正则化方法，算子逆问题的摄动方法，第一类 Fredholm 积分方程的数值方法以及病态线性方程组的求解方法；第三章详细介绍解决偏微分方程逆问题数值解的 PST 和 GPST 技术；第四章详细介绍解决偏微分方程逆问题数值解的最佳摄动量方法，逆问题的区域分裂算法和异步并行计算的处理技术；第五章介绍六个不同领域（声学、电磁学、无损损伤、分布式参数系统、翼型反设计和石油开采）中逆问题的处理方法和数值仿真。

本书可供从事科学和工程领域中逆问题数值分析和反设计方面的科研人员、高等院校的教师、研究生和高年级大学生阅读。

偏微分方程逆问题的数值方法及其应用

苏超伟 著

责任编辑 雷 鹏

责任校对 齐随印

*

© 1995 西北工业大学出版社出版发行

(710072 西安市友谊西路 127 号 电话 4253407)

全国各地 新华书店 经销

西北工业大学出版社印刷厂印装

ISBN 7-5612-0811-1/O·111

*

开本：850×1168 毫米 1/32 印张：7.0625 字数：166 千字

1995 年 10 月第 1 版

1995 年 10 月第 1 次印刷

印数：1—1 000 册

定价：17.10 元

购买本社出版的图书，如有缺页、错页的，本社发行部负责调换。



该书由“西北工业大学‘505’专著出版基金”资助出版

来辉武教授简介

来辉武系 505 神功元气袋及系列保健产品发明者；美国纽约第 14 届世界发明家奖、法国巴黎第 82 届国际发明奖、泰国曼谷中国星火计划项目展示金奖、中国北京首届科技之光成果展金奖等 60 多项国际、国内奖获得者；全国劳动模范、中国“七五”星火计划优秀企业家称号获得者；陕西咸阳抗衰老研究所所长，中国咸阳保健品厂厂长兼书记，中国医学科学院西安分院中西医结合研究所所长、研究员，西北工业大学顾问教授，西北大学名誉教授，西安医科大学名誉教授，中国科学技术讲学团教授，陕西继续教育大学荣誉教授。



中国咸阳保健品厂厂长
西北工业大学顾问教授

来辉武

前 言

我们知道,在许多科学领域(如:物理学、力学、热传导学、声学、电磁学等)和工程技术中,有许多问题可以用偏微分方程描述。研究偏微分方程的数值解是解决这些问题的强有力工具。而偏微分方程的数值解的研究已成为一门专门的学科,国内外有很多学者在这个领域进行研究,并利用各种数值方法和最新的研究结果来解决各种工程实际问题。然而,自然界中的事物总存在着辩证关系。当偏微分方程中的算子、边界条件、初始条件,从过去的已知变成未知,而原方程的解仍然未知时,这就构成了偏微分方程的逆(反)问题。这些问题在工程技术中也是普遍存在的。例如,在无损伤、地下目标重构(识别)、地震勘探、石油开采方面的强化采油和产量预测、飞机翼型设计、结构故障诊断、物质的热传导系数和比热系数的测定等方面,均存在偏微分方程的逆问题。逆问题的研究得到了国内外学者的广泛重视,近十年来,每年举行一次有关逆问题的国际性会议,并创立“Inverse Problems”杂志,这一研究方向无疑已成为各种学科和工程技术中的热门研究领域。

本书的主要目的是向读者介绍解决偏微分方程逆问题的两种数值方法以及在解决工程实际问题中的其它一些方法。通过介绍不同领域的工程实际中的逆问题,一方面,使读者了解到逆问题存在的广泛性,另一方面,使读者了解到解决这些问题的最新技术。

为了保证本书具有一定的系统性,本书第一章介绍了有关不适定问题和偏微分方程逆问题的概念及实例;第二章介绍了一些基础知识,如不适定问题的正则化方法、算子逆问题的摄动方法、第一类 Fredholm 积分方程的数值方法以及病态线性方程组的求解方法;第三章详细介绍了 Y. M. Chen 提出的 PST 和 GPST 技术,以及在解决一维、二维扩散方程、双曲方程中的具体处理方法和数值计算结果;第四章详细介绍了作者提出的最佳摄动量方法,以及利用解决正问题的区域分裂原理提出了逆问题的区域分裂计算技术和异步并行算法;第五章介绍六个不同领域(声学、电磁学、无损探伤、分布式参数系统、翼型反设计和石油开采)中逆问题的处理方法和数值仿真。但需要指出,因篇幅的限制,本书不可能包罗各种领域中出现的逆问题和它们的数值处理方法。

为了便于读者自学,在编写过程中,力求由浅入深,并且系统地叙述了有关方面的问题,尤其是着重阐述 GPST 和最佳摄动量方法的基本原理和处理过程。同时,在讨论逆问题的应用方面尽可能地不涉及各自专业方面的知识,把重点放在建模以后的数值处理方面。

作者在研究逆问题的数值方法中,得到了 Grumman 公司奖学金的资助。第四章中的许多研究结果是在该奖学金的资助下,在美国纽约州立大学石溪分校应用数学和统计系研究完成的。在此期间得到了 CEEC 基金委员会主席、国际著名的物理学家杨振宁教授,应用数学和统计系主任、国际著名的量子力学和计算流体力学专家 James Glimm 教授,以及逆问题数值方法 GPST(或 PST)的创始人 Y. M. Chen 教授的大力支持和鼓励。在回国后的研究工作中,作者得到了国家教委回国人员基金和陕西省自然科学基金对“偏微分方程逆问题的异步并行方法之研究”项目的资助,作者在编写本书过程中,受到西北工业大学有关领导和应用数学系领导的支持,西北工业大学林世明教授和西北大学张棣教授,以

及同行的帮助和鼓励。另外,西北工业大学张学林讲师在作者整理本书初稿时曾给予了很大的帮助。作者在此一一深表谢忱。

由于作者水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请读者批评指教。

著 者

1994年11月

目 录

第一章 绪 论	1
1.1 概 论	1
1.2 逆问题的实例	9
第二章 基础知识	20
2.1 不适定问题的正则化方法	20
2.1.1 正则化方法的概念	20
2.1.2 正则算子的构成	23
2.1.3 稳定泛函	28
2.1.4 算子方程的拟解与正则解	30
2.1.5 正则参数的选取	33
2.2 算子逆问题的摄动法	38
2.2.1 算子识别的摄动法	39
2.2.2 一类算子结构中参数识别的摄动法	41
2.2.3 算子结构中参数识别的一个实例	43
2.3 第一类 Fredholm 积分方程的数值方法	45
2.3.1 待定系数法	45

2.3.2	级数展开法	48
2.3.3	应用数值积分法求近似解	49
2.3.4	Backus - Gilbert 方法	50
2.4	病态线性方程组的解法	55
2.4.1	利用 Householder 矩阵求解病态 线性方程组	55
2.4.2	利用(常微分方程组的)稳态解求解 病态线性方程组	58
2.4.3	求解病态线性方程组的正则化方法	59
2.4.4	求解病态线性方程组的一种迭代方法	62
第三章	PST 与 GPST 技术	65
3.1	一维扩散方程的热传导系数的逆问题	67
3.2	Green 函数的数值计算	75
3.3	改进的 PST 方法	78
3.4	GPST 的数学方法的描述	86
3.5	解决二维扩散(或波动)方程逆问题的 GPST 方法	89
第四章	最佳摄动量法	99
4.1	最佳摄动量法的一般过程	100
4.2	解决一维线性扩散方程逆问题的最佳摄动量法	103
4.3	二维线性时变扩散(或波动)方程的一类逆问题	110
4.3.1	最佳摄动量法的理论分析	110
4.3.2	二维时不变扩散系数逆问题的 模拟计算实例	116
4.3.3	二维时变扩散系数逆问题的模拟计算实例	119
4.3.4	二维时变波动方程逆问题的模拟计算实例	123

4.4 逆问题的区域分裂算法与异步并行算法	126
4.4.1 偏微分方程正问题数值方法的区域分裂算法 与异步并行算法	127
4.4.2 逆问题的区域分裂算法	133
4.4.3 逆问题的异步并行模拟计算实例	135
第五章 逆问题数值方法的应用	143
5.1 声学中的逆散射问题	143
5.1.1 逆散射问题的建模	143
5.1.2 改型的对偶空间方法	145
5.1.3 数值计算过程及算例	148
5.2 电磁成象的一种数值方法	154
5.2.1 问题的提出	155
5.2.2 电磁成象的一种数值迭代方法	157
5.2.3 电磁成象的模拟计算	161
5.3 无损探伤中物体的密度、体积模量、剪切模量 的重构问题	165
5.3.1 问题的提出	165
5.3.2 解决无损探伤问题的 GPST 方法	166
5.3.3 数值模拟	169
5.4 跨音速机翼的反设计方法	172
5.4.1 问题的提出	172
5.4.2 残数修正型方法	174
5.4.3 设计实例	180
5.5 分布式参数系统中的一类逆问题	182
5.5.1 问题的提出	182
5.5.2 最佳摄动量法	183
5.5.3 解决外界力识别问题的最优化方法	188

5.6 石油开采方面的一类逆问题	192
5.6.1 问题的提出	192
5.6.2 解决时间匹配问题的 GPST 方法	195
5.6.3 计算与编程方面应考虑的问题	198
5.6.4 模拟计算实例	201
参考文献	203

第一章 绪 论

1.1 概 论

1. 什么是偏微分方程的逆问题

偏微分方程的逆(反)问题是因相对偏微分方程的正问题而提出来的。

众所周知,在物理学、力学和工程技术问题的研究中,发现许多问题可以用偏微分方程描述。由于它具有紧密地、直接地联系着许多自然现象的特点,所以随着科学技术的发展,它一方面从其它科学技术中吸取新方法,不断地丰富更新它的研究内容,另一方面,也促进了许多相关数学分支的发展,为解决许多实际问题提供了有力工具。

偏微分方程正问题(即:定解问题),是研究由偏微分方程描述某种物理过程或现象,并根据系统的状态变量的某些特定条件(包括初始条件、边界条件等)来确定整个系统的状态变量的变化规律,即研究状态的数学表达式。

例如:某一物体 G 的热传导问题,以函数 $u(x, y, z, t)$ 表示物体 G 在位置 (x, y, z) 处及时刻 t 的温度,物体的热传导系数、比热系数和密度系数分别为 $k(x, y, z)$ 、 $c(x, y, z)$ 和 $\rho(x, y, z)$,外界对物体 G 的加热过程为 $f(x, y, z, t)$,则物体内部的温度函数 $u(x, y, z, t)$ 一定满足下列方程:

$$\frac{\partial \rho c u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f \quad (1.1)$$

并且,在初始时刻即 $t = 0$ 时,物体的温度变化规律已知,如

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \quad (1.2)$$

物体与外界接触的表面温度变化规律已知,即

$$u(x, y, z, t) |_{(x, y, z) \in \Gamma} = g(x, y, z, t) \quad (1.3)$$

其中 Γ 为物体的边界曲面。

这样物体 G 的内部温度 $u(x, y, z, t)$ 的变化规律就被唯一地确定。

然而自然界中的变化规律总存在着一定的辩证关系。在上述热传导问题中,当人们研制出一种新物体时,它的热传导系数、比热和密度的系数特性,往往是未知的,而物体和外界接触表面上的各点流量(即 $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma}$) 是可观察的,物体内部的温度变化仍然未知,这就要求人们去确定新物质的热传导系数 $k(x, y, z)$ 、比热系数 $c(x, y, z)$ 和密度系数 $\rho(x, y, z)$ 。这个问题恰是上述问题的反问题,即是一个偏微分方程的逆问题。

概括而言:若偏微分方程的定解问题中某些原来条件变成未知条件,而原方程的未知函数可能仍然是未知的,或者只知道与这个未知函数的一些有关信息,我们要通过方程,定解条件和某些附加条件来确定这些未知量,这类问题称为偏微分方程的逆问题。

在许多自然科学和工程技术领域中,确定这些待定量有着不同的途径。最明显、最直接的方法是测量这些参数在一些离散点处的值,并通过插值逼近方法可得待定量的变化规律。但这种方法一般是行不通的。其原因有:

- (1) 直接测量所有的数据,费用巨大(如在资源勘探方面);
- (2) 直接测量是不可能的,例如,不可损坏的物体内部结构参数,高空、海底、地下、生物等物体内部的一些参数。

这就要求人们利用与待定参数有关的偏微分方程,去测量与

待定参数有一定关系的其它量在边界上的变化规律或者其它可获得的信息去估计所要求的未知量,这个过程就是求解偏微分方程逆问题的过程。

一般地,偏微分方程逆问题有五类:

(1) 确定偏微分方程的某些结构参数,即微分算子识别问题。例如上述问题中确定热传导系数 $k(x, y, z)$ 或比热系数 $c(x, y, z)$ 等。

(2) 确定过程的过去状态,即时间反演问题(或时间匹配问题)。例如,用上述问题中已知物体当前的温度去确定初始的温度分布,即 $\varphi(x, y, z)$ 。

(3) 确定外界过程的作用。例如,在上述问题中确定对物体的加热过程 $f(x, y, z, t)$ 。

(4) 确定状态变量在物体边界上的变化规律。例如,在上述问题中确定物体与外界接触表面上的温度变化规律,即 $g(x, y, z, t)$ 。

(5) 确定物体的边界形状,即几何逆问题。例如,在上述问题中确定 Γ 或 G 的形状。

2. 适定问题与不适定问题

虽然 Hadamard 的适定性概念是针对数学物理问题提出的,但是这个适定性概念很容易推广到一般方程的解问题。下面介绍一般性的适定性概念。

已知两个度量空间 U 和 F , 元素间的距离分别为 $\rho_U(u_1, u_2) (u_1, u_2 \in U)$, $\rho_F(z_1, z_2) (z_1, z_2 \in F)$, 并且对每个元素 $u \in U$ 在空间 F 中存在唯一解 $z = R(u)$ 与之对应。如果对任一个数 $\varepsilon > 0$, 都存在数 $\delta(\varepsilon) > 0$, 若有不等式

$$\rho_U(u_1, u_2) < \delta(\varepsilon) \quad (1.4)$$

就有

$$\rho_F(z_1, z_2) < \varepsilon \quad (1.5)$$

其中 $z_1 = R(u_1), z_2 = R(u_2) (u_1, u_2 \in U, z_1, z_2 \in F)$ 。则在 F 空间中由 $u \in U$ 确定的解 $z = R(u)$ 的问题被称为在空间对 (F, U) 上是稳定的。

由度量空间 U 的元素 u 来确定度量空间 F 上的解 z 的问题, 如果满足下列条件, 则称该问题在度量空间对 (F, U) 上是适定的。

(1) (存在性) 对所有元素 $u \in U$ 均存在空间 F 的解 z ;

(2) (唯一性) 解 $z = R(u)$ 是唯一被确定;

(3) (稳定性) 问题在空间对 (F, U) 上是稳定的。

不满足上述三个条件之一的问题统称为不适定问题。

长期以来, 人们都认为, 从实际物体问题归结出的数学问题总是适定的。这一观念把人们的注意力牢固地局限于适定性的一类问题之中, 并且人们认为实际问题都一定是适定的, 因而研究不适定问题也就没有任何意义。直到本世纪 50 年代中, 才开始引起人们的重视。特别是 80 年代以来, 由于遥感、资源勘探、大气测量、系统参数识别、生物器官和人体器官特性的分析、无损探伤等等, 各类自然科学与工程技术的迅速发展, 把对不适定问题的研究和应用提到了崭新的阶段。

在不适定问题中, 人们一般关心的是不满足稳定性条件的一类不适定问题。因此, 粗略地讲凡是解不连续地依赖于数据的一切数学问题都称为不适定问题。对不适定问题的研究, 前苏联学者 Tikhonov 和 Arsenin 从观念、理论、方法上开拓了一个新的领域。他们的专著《不适定问题的解法》是这一领域中第一部著名的著作。美国纽约大学 Courant 数学研究所的 John 教授将这部著作译成英文时, 在序言中写道: “可以一言以蔽之: 大多数应用问题是而且总是不适定的, 特别是当它们要求数值解时。”

对于偏微分方程逆问题, 不管它的正问题是否线性, 它的逆问题总是非线性的, 并且是不适定的。因此这里给出不适定的概念和以下列出的不适定问题的例子是非常必要的。