大學用書

管理數學

謝志雄 著

三民書局印行

管　理　數　學

謝　志　雄　著

學歷：國立台灣師範大學數學系學士
　　　國立清華大學數學研究所碩士
　　　美國南卡羅萊納大學數學博士
經歷：美國南卡羅萊納大學數學系講師
　　　國立清華大學數學研究所副敎授
　　　私立東吳大學商用數學系主任
現職：私立東吳大學商用數學系敎授

三　民　書　局　印　行

[redacted]六十六年九月初版
十二年一月修訂再版

管理數學

基本定[redacted]柒角捌分

著作者 [redacted]志雄
發行人 劉振強
出版者 三民書局股份有限公司
印刷所 三民書局股份有限公司
臺北市重慶南路一段六十一號
郵政劃撥九九九八號

行政院新聞局登記證局版臺業字第〇二〇〇號

序

學習管理科學者所須具有的數學知識甚多，本書所提供者是線性代數、機率及線性規劃三大部門中較為重要的部份。實際上，本書是以線性代數為基礎來介紹機率及線性規劃的應用。雖然在第三章的最後三節用到積分的知識，一般高中畢業生已有足夠的數學基礎，可以閱讀本書其餘的章節。大專學生如果學習過一學期的微積分，數學成熟度已較高，再來學習本書會較為理想而有效果。

本書所介紹的內容，理論與方法並重。理論的部份儘可能給以簡易而嚴密的證明，少數定理因涉及較繁或較深的數學，故省略其證明，而强調其所具備的重要意義或所提供的可行方法。全書共分八章，足夠做為大專課程一學年的教材。第一章除複習集合、函數及排列與組合的概念外，另以較多篇幅介紹數學的推理方法。第二、第三及第六章為機率及其應用，重點放在有限機率及有限馬可夫鏈。第四章矩陣及第五章向量空間介紹線性代數中最基本的部分，以做為以後各章的工具。第七及第八章分別介紹求解線性規劃問題的三個基本方法與對局問題的解法。

本書各章收集許多日常生活中的實際問題，做為例題及習題，以激發學習興趣，並使讀者能有機會活用理論，實際練習解決問題，這是本書的特點。

編寫本書時，承本系講師張紘炬先生熱心協助搜集資料，並提供寶貴心得，助教李艷卿小姐抄稿及校稿，內人趙昭子女士校讀初稿並提供

修訂意見，都是在百忙中為本書盡心力，在此一併誌謝。惟著者才疏學淺，又倉卒付印本書，疏陋難免，尚乞專家學者，不吝賜教為幸！

謝志雄　[redacted]6年6月

東吳大學　商用數學系

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

管理數學 目錄

序

第一章 集合、函數與邏輯

第二章 機 率

第三章 隨機變數與機率分配

第四章 矩 陣

第五章 向量空間

第六章　有限馬可夫鏈

第七章　線性規劃

第八章　對局理論

第一章　集合、函數與邏輯

1-1 集　合

我們將以介紹集合作爲本書的開始。雖然，高中或國中數學就已談論到這個題材，爲了對符號及定義有淸楚的交待，我們借此給讀者復習一些數學上最基本的觀念。

集合 (set) 一辭在數學上是一個無定義的名詞。通常一些個體的全體就可稱爲**集合**，這些個體都是它所屬團體的**元素** (element)。例如，某大學全體數學系的學生形成一個集合 S，若 x 爲此大學數學系的學生，則 x 爲集合 S 的元素，以符號

$$x \in S$$

記之；若 y 不是大學生，則顯然 y 不在集合 S 內，以符號

$$y \notin S$$

記之。通常表示集合的方法有下列三種，(i) 與 (ii) 稱爲**表列法**，(iii) 稱爲**描述法**。

(i) 元素個數不多且篇幅足够容納時，可以將集合的元素全部列出。例如，

{男，女}，{經理，秘書，工友}，{1，2，3，4}

分別爲二個，三個，四個元素的集合。

(ii) 元素個數很多，不可能或不需要將元素逐一列出，但仍可以使人明瞭時，僅需將其中一部份元素列出即可。例如，

$$\{1, 2, 3, \cdots, 99\},\ \{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$$

分別代表小於 100 的正整數的集合及所有正整數的集合。

(iii) 將集合中元素所共有的性質描述出來。例如,

$$\{x \mid x \text{ 爲實數且 } 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\{x \mid x \text{ 爲某大學的學生}\}$$

爲了在數學上便於處理起見, 不含元素的集合常被提及, 這種集合稱爲**空集合** (empty set), 以 ϕ 代表之。例如, 滿足 $x^2=2$ 的正整數的集合就是空集合。

定義1-1 若A和B爲集合, 並且A中的元素皆在B內, 則稱A爲B的**部份集合**或**子集合** (subset), 並以 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 代表之。當 $A \subset B$ 時, 我們稱A**包含於**B, 或B**包含**A。$A \not\subset B$ 或 $B \not\supset A$ 代表A不是B的子集合。

例如, $\{1, 2, 3\}$ 爲 $\{x \mid x \text{ 爲實數且} 1 \leq x \leq 3\}$ 的子集合。

由定義可知, 若A和B爲集合且 $A \not\subset B$, 則A中至少有一元素不在B內, 亦可知 $\phi \subset A$, 並且 $A \subset A$。

定義1-2 設A和B爲集合。若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 則稱A和B**相等** (equal), 並以 $A = B$ 代表之。$A \neq B$ 代表A和B不相等。

因此 $A=B$ 表示A爲B的子集合並且B亦爲A的子集合, 亦即A和B互相包含。由此顯然可知: 空集合只有一個。

以集合構成新集合也是很重要的觀念。例如, 集合

$$\{\{6\},\ \{5, 1\},\ \{4, 2\},\ \{3, 2, 1\}\}$$

中的元素是由和爲 6 的不同正整數所形成的集合。集合

$$\{\{\text{父}, \text{子}\}\ \{\text{母}, \text{長女}, \text{次女}\}\}$$

中的元素是由一家五口依性別區分所得的集合。

若S爲集合, 則所有S的子集合所構成的集合稱爲S的**冪集** (power

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

set)，以 $\mathscr{P}(S)$代表之。即

$$\mathscr{P}(S)=\{A\mid A\subset S\}$$

例如，若 $S=\{1,2,2,3\}$ 則

$\mathscr{P}(S)=\{\phi,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}$。

在許多問題的討論過程中，所涉及的所有集合常是某一固定集合的子集合，此一固定的集合稱爲**宇集** (universal set)，並以U代表之。以下的討論，除例子以外，皆在某一宇集U內進行。

定義1-3　設A, B爲U的子集合。

(i) 集合　$A\cup B=\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$ 稱爲A和B的**聯集** (union)

(ii) 集合　$A\cap B=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$ 稱爲A和B的**交集** (intersection)

(iii) 集合　$A-B=\{x\mid x\in A$且$x\notin B\}$ 稱爲A對B的**差集** (difference set)

(iv) 集合　$A^c=U-A$ 稱爲A的**餘集** (complement)。

以上的定義可以視爲在$\mathscr{P}(U)$ 上定義了運算 (見1-2節)："∪"，"∩"，"−"，"c"。這些運算滿足許多性質，以下僅列出最基本而重要者。爲了使讀者能明瞭∪與∩的對偶性，我們將對偶的性質並列在一起。

定理1-1　(集合的運算性質)

1. 交換律：$A\cup B=B\cup A$　　$A\cap B=B\cap A$
2. 結合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
3. 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

   $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
4. 恒等律：$A\cup\phi=A$　　$A\cap U=A$
5. 補餘律：$A\cup A^c=U$　$A\cap A^c=\phi$

6. 等冪律: $A\cup A=A \qquad A\cap A=A$

7. 消逝律: $A\cup U=U \qquad A\cap\phi=\phi$

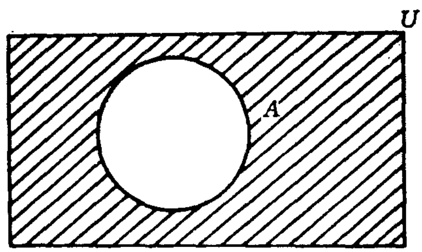
8. 吸收律: $A\cup(A\cap B)=A \qquad A\cap(A\cup B)=A$

9. De Morgan 律: $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c \qquad (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

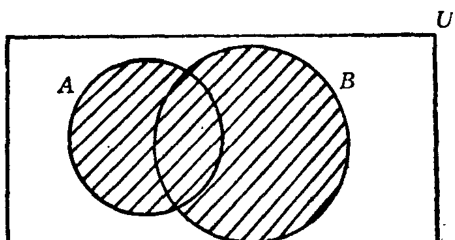
10. 復故律: $(A^c)^c=A$

11. $A-B=A\cap B^c$

以上諸性質的證明大部分甚爲容易，故不在此詳證。其實除由定義可以直接了解上述的性質外，還可以用**文氏圖** (Venn diagram) 可以驗證。以下幾個圖形都是文氏圖表明集合的關係。



斜線部分爲 A^c

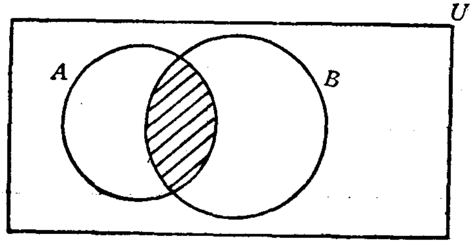


斜線部分爲 $A\cup B$

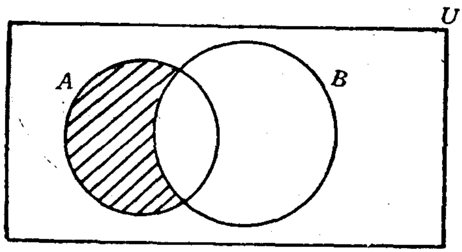
定義1-4 設A，B爲U的子集合。

(i) 若$A\cap B\neq\phi$，則稱A和B相交。

(ii) 若$A\cap B=\phi$，則稱A和B互斥。



斜線部分爲 $A\cap B$



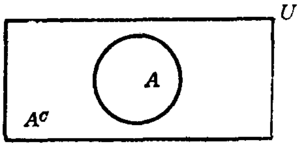
斜線部分爲 $A-B=A\cap B^c$

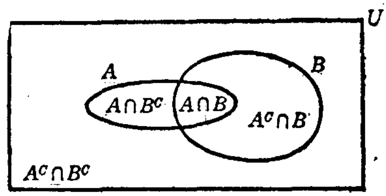
一個子集合A將U分成互斥的二部分：A與 A^c。二個不等的子集合A和B將U分成互斥的四部分：$A\cap B$，$A\cap B^c$，$A^c\cap B$，$A^c\cap B^c$。三個互異的子集合A，B和C將U分成互斥的八部分。以文氏圖表示如下：

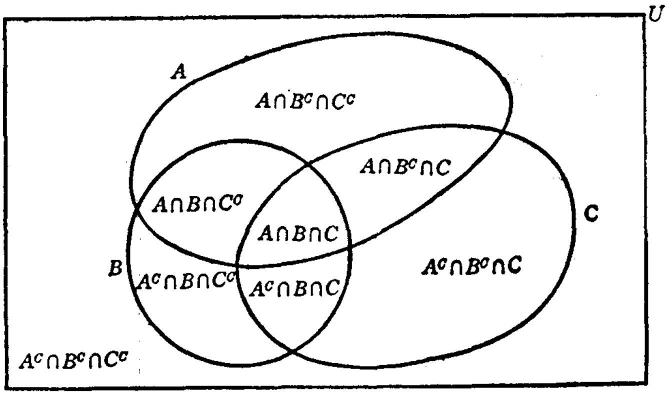
集合的元素爲有限多個時，此集合爲**有限集合** (finite set)；否則爲**無限集合** (infinite set)。無限集合的**基數** (cardinal number) 爲∞，有限集合的**基數**等於其所含元素的個數。若以 n(A)代表有限集合的基數，則 $n(\phi)=0$，由文氏圖很容易可以獲知

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \qquad \langle 1\rangle$$

$$n(A-B)=n(A\cap B^c)=n(A)-n(A\cap B) \qquad \langle 2\rangle$$







例1-1　設某校數學系有學生125人，其中80人選修法語，60人選修德語，40人選修俄語；35人選修法語和德語，25人選修德語和俄語，18人選修法語和俄語；12人選修法，德，俄三種語。問未修法，德，俄任何一種語言的學生有多少？

若以此系全體學生作爲宇集U，以F，G及R分別代表選修法，德及俄語的學生所成的集合，則有

$$n(U)=125,\ n(F)=80,\ n(G)=60,\ n(R)=40$$

$$n(F\cap G)=35,\ n(G\cap R)=25,\ n(F\cap R)=18$$

$$n(F\cap G\cap R)=12$$

從這些資料可以算出文氏圖中 8 個子集合的基數如下：

$n(F\cap G\cap R)=12$

$n(F\cap G\cap R^c)=n(F\cap G)-n(F\cap G\cap R)=35-12=23$

$n(F\cap G^c\cap R)=n(F\cap R)-n(F\cap G\cap R)=18-12=6$

$$n(F^c\cap G\cap R)=n(G\cap R)-n(F\cap G\cap R)=25-12=13$$

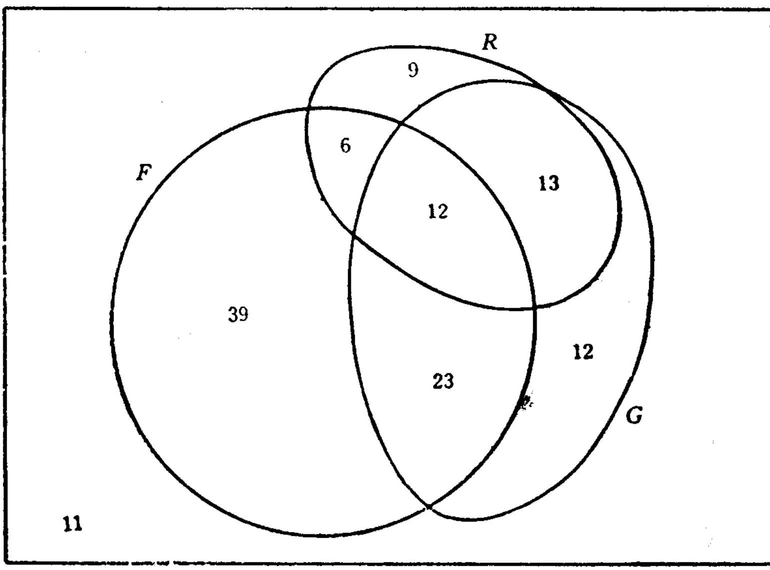
$$n(F\cap G^c\cap R^c)=n(F)-n(F\cap G\cap R^c)-n(F\cap G^c\cap R)-n(F\cap G\cap R)$$
$$=80-23-16-12=39$$

$$n(F^c\cap G\cap R^c)=n(G)-n(F\cap G\cap R^c)-n(F^c\cap G\cap R)-n(F\cap G\cap R)$$
$$=60-23-13-12=12$$

$$n(F^c\cap G^c\cap R)=n(R)-n(F^c\cap G\cap R)-n(F\cap G^c\cap R)-n(F\cap G\cap R)$$
$$=40-13-6-12=9$$

$$n(F^c\cap G^c\cap R^c)=125-39-23-12-6-9-13-12=11$$

故有11人未選修法，德，俄語中的任何一種語言。



實數全體的集合以 $\mathscr{R}$ 代表之，它是我們在本書中所唯一用到的數系，因此實數也稱爲數。下列各式皆可用來代表 $\mathscr{R}$ 的子集合:

$\{x\,|\,x$ 爲實數且具有性質 $P(x)\}$

$\{x\,|\,x\in\mathscr{R}$ 且 $P(x)$成立$\}$

$\{x \in \mathscr{R} \mid P(x)成立\}$

$\{x \mid P(x)成立\}$

幾種特殊的實數集合常被提及，在此順便將所使用的符號表明如下：若 a，b 爲實數且 $a<b$，則令

$[a, b]=\{x \mid a \leq x \leq b\}$，　　$(a, b]=\{x \mid a<x \leq b\}$

$[a, b)=\{x \mid a \leq x<b\}$，　　$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$

$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}$，　　$(a, \infty)=\{x \mid a<x\}$

$(-\infty, b]=\{x \mid x \leq b\}$，　　$[a, \infty)=\{x \mid a \leq x\}$

$(-\infty, \infty)=\mathscr{R}$

在本書中，符號 (a, b) 另有"序對"的意義(見1-2節)，符號 $[a, b]$ 另有列向量及列矩陣的意義（見第四章)。雖然它們所代表的正確意義可以由上下文獲知，但仍希望在此先行提醒讀者注意。

習　題 1-1

1. 試以文氏圖表明下列集合：

   $A^c \cap B$，$A^c \cap B^c$，$A^c \cap B^c$

2. 試逐步以文氏圖驗證集合的分配律及 De Morgan 律。

3. 試證明下列集合的性質：

   (1) $A=(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

   (2) $A \cup B=A \cup (A^c \cap B)$

   (3) $A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$

   (4) $A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$

   (5) $A \cup (B-C)=(A \cup B)-(C-A)$

   (6) $A \cap (B-C)=(A \cap B)-(A \cap C)$

4. 設某公司於某日有董事長，董事及監事三人舉行會議討論是否增資。試寫出此三人中對增資案投贊成票的人所形成的所有可能集合。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com