自然丛书（数学）

有趣的图论

管梅谷

山东科学技术出版社

一九八四年·济南

内 容 提 要

图论是数学中的一个古老而新颖的分支。它已诞生二百多年，近几十年又发展为一个独立的分支。它的许多著名难题使不少数学家束手无策。它在各种科学领域中的精采应用已引起了广大科学工作者的注意。

有许多有趣的数学游戏问题都可以用图论的方法来解决。本书就是通过几个数学游戏和生产、生活实际问题，巧妙地引出图论中的一些基本概念，然后用图论中的概念和方法解决所提出的问题，并介绍了几个图论中有名的难题。

本书故事情节有趣，文字朴实简明，说理清楚易懂，解决实际问题，可以帮助读者获得对图论的初步了解。

本书可供中等文化程度的广大读者阅读。

自然丛书(数学)

有 趣 的 图 论

管 梅 谷

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　4.25印张　79千字

1980年7月第1版　1980年7月第1次印刷

印数：1—14,100

书号 13195·31　定价 0.36元

《自然丛书(数学)》编辑委员会名单

主　　编：张学铭

副 主 编：莫　叶　杨培玉

编辑委员：马克杰　杨子胥　杨培玉　张学铭　张德修

陈力行　陈玉波　苗永聪　莫　叶　黄超群

章志敏　管梅谷　(以姓氏笔划为序)

出 版 说 明

《自然丛书》是按中国科协与国家出版局联合制定的《一九七八——一九八五年全国重点科普图书出版规划》而组织编写的一套科普读物。本丛书包括数学、物理、化学、天文、地学和生物六大基础学科，由科学普及出版社、山东科学技术出版社和吉林人民出版社联合编辑出版。科学普及出版社负责编辑出版天文和物理部分，山东科学技术出版社负责编辑出版数学和地学部分，吉林人民出版社负责编辑出版化学和生物部分。

本丛书比较系统地介绍六大基础学科的基础知识、基本理论、一般应用技术及现代新发展，并适当介绍一些有关的边缘学科的知识。在表现形式上，力求深入浅出，通俗易懂，生动活泼，图文并茂。

本丛书供中等文化程度的广大读者阅读，旨在帮助他们丰富知识，开阔眼界，提高科学文化水平，增长社会主义建设才干，更好地为社会主义现代化建设服务。

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

一、从分油到最短路问题

这本书的名字是“有趣的图论”，看了这个书名，读者可能要问：“什么叫图论啊？这个名词我们还没有听说过呢！”请大家不要着急，慢慢看下去就会明白。现在，让我们先来讲一个数学游戏，作这本书的开头吧！

分油问题

有一个很古老的数学游戏，叫做分油问题。有一个人用装10斤油的瓶装了一瓶油拿到市场上去卖，正好来了两个买油的，每人要5斤，但是没有秤，只有两个空瓶，一个瓶能装7斤油，另一个瓶能装3斤油。请大家想想看有没有办法用这三个瓶把10斤油分成5斤的两份。请读者先试一下，再往下看。

下面是一种分的方法：

第一步：从10斤瓶中倒3斤油到3斤瓶中去。这样在10斤的瓶中还剩下7斤油，7斤瓶仍旧空着，3斤瓶中有3斤油。为了说来方便，我们把这种情况记作(7,0,3)，这里第一个数字表示10斤瓶中的油的数量，后面两个数字分别

为 7 斤瓶与 3 斤瓶中油的数量。当然，一开始时的情况应该记作(10,0,0)。因此，第一步可以记作：

$$(10,0,0)\Longrightarrow(7,0,3)$$

第二步：将 3 斤瓶中的油倒入 7 斤瓶中，这一步可以记作：

$$(7,0,3)\Longrightarrow(7,3,0)$$

然后，按照下面写的办法做下去，最后就可以分成两个 5 斤的了：

$$(10,0,0)\Longrightarrow(7,0,3)\Longrightarrow(7,3,0)\Longrightarrow(4,3,3)\Longrightarrow(4,6,0)\Longrightarrow(1,6,3)\Longrightarrow(1,7,2)\Longrightarrow(8,0,2)\Longrightarrow(8,2,0)\Longrightarrow(5,2,3)\Longrightarrow(5,5,0)$$

数一下就可以知道，用这种办法倒 10 次，就成功了。

也有人提出相似的问题，例如，有三个分别能装 8 斤，5 斤与 3 斤油的瓶，要求把 8 斤油分成 4 斤的两份。或者是有三个容量为 12 斤、7 斤、5 斤的油瓶，要求把 12 斤油分成 6 斤的两份等等。请大家试试看，为这两个问题，各找一种分的办法。

如果你已经做过上面两个题，就会发现这些问题都不难解决。现在请大家想想看，以上的问题是怎样解决的？很明显是凑出来的！

在你用凑的办法解决了几个问题以后，也许你会产生一个想法："这种分油问题不算难，凑凑就能解决了。"且慢下结论！先试试下面几个问题再说：

第一个问题：三个瓶的容量是 10 斤、8 斤、2 斤。仍旧

要求把 10 斤瓶中的油分成 5 斤的两份。

这问题光靠凑就不行了。试一下可能会发现，不管怎么倒，总倒不出两个 5 斤来。不过这个问题仍不算难，因为凑几次会使人得到一个印象："看来要分成 5 斤的两份是不可能的。"只要用比"凑"高级一点的思考方法就可以证明这个想法是对的了。因为不管怎么倒，每次倒完后，三个瓶中的油的数量一定都是双数，这一个结论从下面倒的动作中可以明显地看出来。

$$(10,0,0)\Longrightarrow(8,0,2)\Longrightarrow(8,2,0)\Longrightarrow(6,2,2)$$
$$\Longrightarrow(6,4,0)$$

由此可以断定，要倒出两个 5 斤来是不可能的。

第二个问题：三个瓶的容量是 16 斤、12 斤、7 斤。要求把大瓶中的 16 斤油分成 8 斤的两份。(请大家先试一下，再往下看)

大概找不到答案吧！和前面那个问题一样，你也可能想到，"也许这个问题又是分不成的。"那么就再试试看。能不能不用凑而用思考的方法来证明一定分不成 8 斤的两份？试一下就会知道，这也是不容易的事。怎么办呢？想找一种分法，找不到！想证明不存在分法，证不出来！只好再花点时间凑凑，但还是凑不出来，又能下什么结论呢？

好吧，这个问题先放一放，再来看一个问题。

第三个问题：仍旧回到三个瓶的容量是 10 斤、7 斤、3 斤的那个问题上去。前面我们得出的分油的办法一共倒了 10 次才成功。现在问：有没有办法只倒 9 次就把 10 斤油分成 5

斤的两份？再试试看，只倒 8 次行不行？也可以问：要想把 10 斤油分成 5 斤的两份，至少要倒几次？

这个问题恐怕更难一些了，要想光用凑的办法恐怕就很难解决了。

为什么这几个问题都难解决？主要原因是我们用的方法是“凑”。“凑”不是科学、系统的方法。那么，有没有科学、系统的解决分油问题的方法呢？这本书就打算向大家介绍一种科学、系统的方法。这种方法要用到“图论”的知识。所以我们需要先介绍一些图论的基本知识，然后再回过头来讲解决分油问题的方法。

什么是图

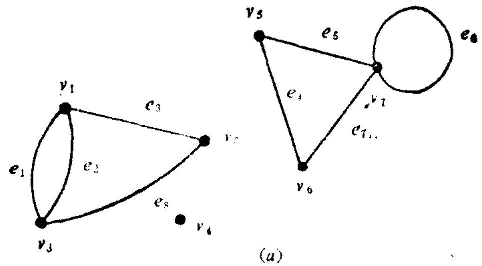
“图论”，顾名思义，就是关于“图”的理论，要学习图论，首先要弄清楚什么是图。

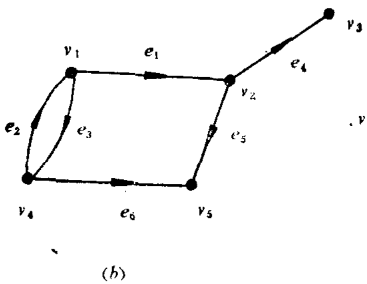
我们所讲的图，并不是指日常生活中遇到的形形色色的图（象地图、零件图、装配图……），也不是指几何中遇到的各种各样的图形。在这本书中，“图”这个字专门用来代表一种特殊的图形，就是：仅仅由点和连接这点的线组成的图形。例如，图 1(*a*)、(*b*)、(*c*)中画的就是图的例子。

(*a*)中的图，是由 7 个点 v_1，v_2，…，v_7 以及 8 条连接这些点的线组成；(*b*)和(*c*)中的图，是由 5 个点以及连接它们的若干条线组成的。

看一下图 1 中的三个图，可以看出它们之间还有区别：

(b)中的图，每条线上都有一个箭头，代表这条线的方向，这种图叫做有向图；(a)中的图，每条线上都没有箭头，叫做无向图；(c)中的图，有些线上有箭头，有些线上没有箭头，叫做混合图。





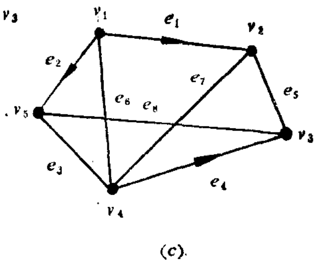


图 1

按照刚才讲的，可以看出，在研究一个图时，首先必须明确这个图包含哪几个点，例如，图 1(a)中的图包含了 ν_1，ν_2，…，ν_7 这 7 个点，于是这 7 个点就都是这个图的研究对象。除此以外，这个图还能包含一些线，但是，这些线必须是“连接这些点的”，明确些说，就是：每一条线必须连接图中的两个点，例如在图 1(a)的图中，e_1 是连接 ν_1 和 ν_3 的，

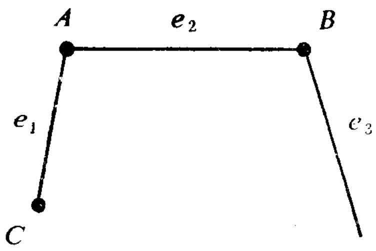


图 2

e_2 也是连接 v_1 和 v_3 的，而 e_6 是连接 v_7 和 v_7 的（上面说过，每条线必须连接两个点，但是，并没有说这两个点必须不同）。如果一个图形中出现了一些不是连接两个点的线，这样的图形就不是我们所研究的图了。例如，图 2 中的图形，它包含了 3 个点 A,B,C，三条线 e_1，e_2，e_3，但是 e_3 不是连接图中的两个点的，因此，这就不是一个图。

关于一个图中的线，我们还要作一些说明。在几何里，我们常常把线看成是由许多点组成的，但是，在图论中，线就是线，线的唯一作用是把两个点连接起来，此外，什么别的作用也不起了。因此，我们不认为一条线是由许多点组成的。直观些说，大家最好把一个图想象成图 3 中所画的那种样子，即有一些木头做的球，它们代表一些点，另外有些绳子，每根绳子的两端都绑在木头球上。当然在这种想法中，我们不会把一根绳子看成是由许多木头球组成的，也就是不把一条线看成是由许多点组成的。在这种观点下，一般也不说"两条线的交点"（因为在几何中，所谓两条线的交点就是属于这两条线的公共点，现在，每条线根本就不是由点组成的，所以说不上什么公共点了），或者说，我们认为图中的任何两条线都是不相交的。例如，对于图 1(c)中的图来说，我们就应该认为 e_6 与 e_8，e_7 与 e_8 ……都是互相不相交的，也

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

就是象图 3 那样，一条线从另一条线的上面过去的。

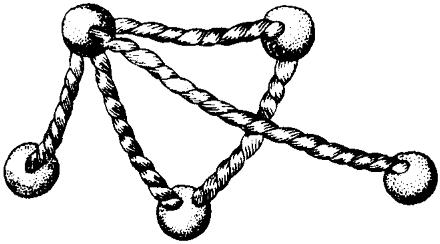
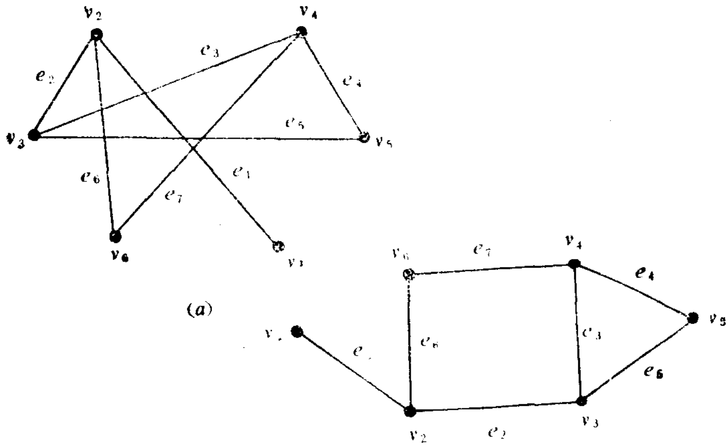


图 3

还有一个重要问题要讲一下，就是对于一个图来说，最重要的是它由哪几个点组成，哪些点之间有线相连，哪些点之间没有线相连。至于这些点是怎样分布的，连接它们的线是直的还是弯的，都无关紧要。例如，图 4 中的两个图，从外表上看是大不一样的，但是，从本质上看，却是一样的。为什么呢？因为它们都包含 6 个点 ν_1，ν_2，…，ν_6，都包含 7 条线 e_1, e_2，…，e_7，而且在两个图中，e_1 都是连接 ν_1 与 ν_2 的，e_2 都是连接 ν_2 与 ν_3 的……。

关于什么是图，已经讲得差不多了，为了让大家对图这个概念有比较深刻的印象，下面我们再明确一下图的定义。

定义 1：所谓一个无向图 G，指的是由 n 个点 $\{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n\}$ 和 m 条线 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 组成的图形，并且每条线 e_i 连接两个点 ν_k 和 ν_l（ν_k 与 ν_l 可以不相同，也可以相同）。点 ν_1，ν_2，…，ν_n 称为 G 的顶点，线 e_1，e_2，…，e_m 称为 G 的边。



(a)

(b)

图 4

在这个定义中，我们只说每一条线 e_i 连接两个点 ν_k 与 ν_l，没有说 e_i 是从 ν_k 出发指向 ν_l 的还是从 ν_l 出发指向 ν_k 的，也就是说，e_i 是没有方向的，所以，我们就把这种图叫做无向图。通常，一个无向图 G 中所有顶点 $\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\}$ 的全体用字母 V 来表示，所有边 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 的全体用字母 E 来表示。而把无向图 G 记作 $G=[V,E]$，意思就是，图 G 是由 V 中的顶点和 E 中的边组成的。

关于无向图的定义，我们还要附加一点说明，就是，如果一个图形只有顶点而没有边，我们还是可以把它看作是一个无向图。例如图 5 中的 5 个顶点，就构成一个无向图。但是，我们却不考虑没有顶点的图，为什么呢？因为一个图连一个顶点也没有，那么，它就不可能有边了（因为边一定是

连接两个顶点的)，所以没有顶点的图实际上是什么东西也没有的，当然，这种图没有什么研究的价值。

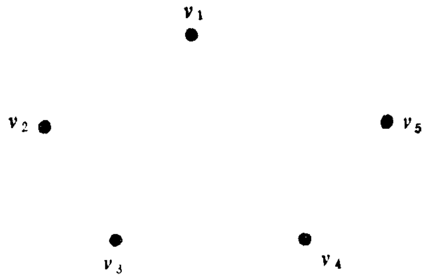


图 5

定义 2：所谓一个有向图，指的是由 n 个点 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和 m 条线 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 组成的图形，并且每一条线 a_i 以一个点 v_k 为起点而以另一个点 v_l 为终点。

只要对照图 1 中的 (b) 图想一想，这个定义的意义就不难明白了。在有向图中，每条线都是有方向的，也就是说，是从它的起点出发，指向它的终点的。

一个有向图 G 的点仍旧称为 G 的顶点，但是有向图中的线却不叫做边，而叫做弧。所有顶点 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 的全体用字母 V 表示，所有弧 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 的全体用字母 A 表示，通常，我们把一个有向图 G 记作 $G=(V,A)$。注意，这里用的是圆括号，而无向图用的是方括号。

上面分别讲了无向图和有向图的定义。但是，这两种图之间是相互联系的。一般说来，我们可以把无向图中的一条边看成是两条方向相反的弧。当然，反过来也一样，也可以把两个顶点之间的两条方向相反的弧看成是一条无向边。这种看法是有一定实际意义的，例如，我们可以把一个图中的

线想象成某一个城市中的马路，这时，没有方向的边表示一条朝两个方向都能行驶车辆的路，而有方向的弧就表示只能单向行驶的路，因此，当两个点之间有两条方向相反的弧时，就表示这一段路上朝两个方向都能走，所以可用一条无向的边来表示。

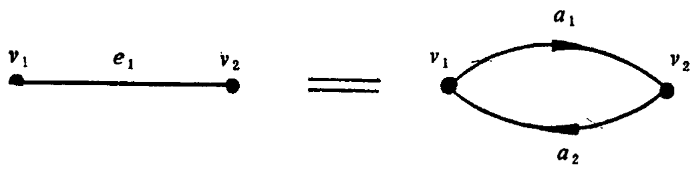
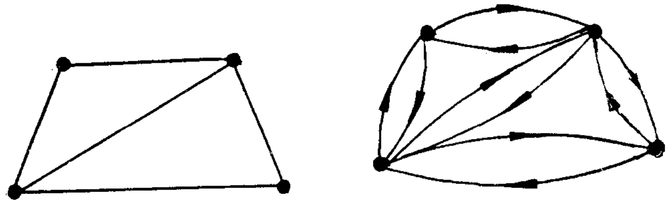


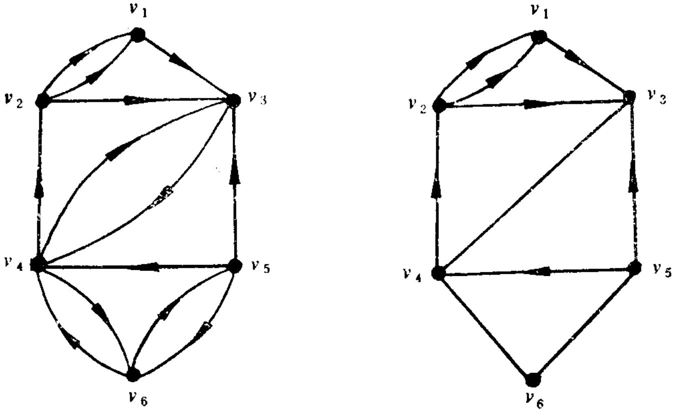
图 6

从上面讲的可以得出一个结论，就是每一个无向图都可以看成是一个有向图。办法就是把每一条边都看成两条弧。例如，图 7(b)中的有向图就是从(a)中的无向图转化来的。但是，这种做法未必好，因为大家一看就可以看出，图 7(b)中的图包含的线很多，看起来乱，不如(a)中的无向图看起来清楚。所以倒不如反过来把两条方向相反的弧合成一条无向边更好。例如，我们可以把图 8(a)中的有向图中连接 v_3 与 v_4，v_4 与 v_6，v_5 与 v_6 的三对弧合并成三条边，使它变为(b)中的混合图（v_1 与 v_2 间的两条弧都是从 v_2 出发指向 v_1 的，不是方向相反的两条弧，因此不能合并）。请大家注意，混合图实际上是有向图，以后凡是遇到混合图时，我们都理解成它本来是一个有向图，只是为了方便，把它的若干对有向弧合并成无向边了。



(a)　　　　　　　　(b)

图 7



(a)　　　　　　　　(b)

图 8

关于"什么是图",这个问题就讲到这里,也许大家会产生这样的问题。前面不是说过,图论可以帮助我们解决分油问题吗？可是从图的定义来看,它只不过是一个由点和线组成的图形,与分油问题之间,真是风马牛不相及,怎么能用它来解决分油问题呢？关于这个问题,等你看完了下一节的内容,就会自然而然解决了。

图能够代表什么呢？

虽然图只是点和线组成的图形，但是一个图中的顶点，边和弧却可以代表世界上各种各样的事物。下面我们就来看几个例子。

例1：交通图。

图9是某一个地区的几个城市和连接它们的公路的地图，当然这张地图可以看成一个图G，G的顶点代表城市，G的边代表公路。

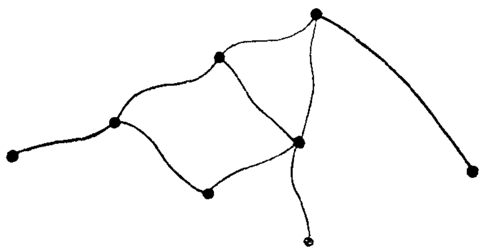


图9

例2：人与人之间的关系图。

假设有一个由10个人组成的团体，这10个人中，有些人相互认识，有些人相互不认识。我们可以用一个图G把这种情况很清楚的表示出来，办法就是，取10个顶点，每一个顶点代表一个人。如果两个人是相互认识的，就在代表这两个人的两个顶点之间连一条边，不认识的人之间就不连。例如，图10就是这样的一个图，从这个图中，我们可以看出，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com