# 空间连杆机构的分析与综合

# 空间连杆机构的分析与综合

陆钟吕　刘乃钊　编

哈尔滨船舶工程学院出版社

## 内 容 简 介

本书是根据编者多年来为研究生讲课的讲义整理而成。

全书共分六章，第一章简要地介绍空间机构原理；第二、三章采用矩阵法对刚体和空间四杆机构进行运动分析；第四章介绍空间机构数综合的方法与步骤；第五、六章介绍目前常用的旋量法。本书内容精炼，文笔流畅，取材较新，理论性和系统性都很强。

本书可作为研究生教材；也可作为高校机械专业师生的参考书；对从事机械设计、机器人技术、生物医疗技术和自动化技术的工程技术人员也是一本较好的参考书。

空间连杆机构的分析与综合
陆钟吕　刘乃钊　编
*
哈尔滨船舶工程学院出版社出版
新华书店首都发行所发行
东北师范大学印刷厂印刷
*
开本850×1168　1/32　印张6.5　字数140千字
1989年7月　第1版　1989年7月　第1次印刷
印数：1—1000册
ISBN　7-81007-050-9/TH·3
定价：1.40元

# 前　言

空间机构可以用数目较少的构件使从动件实现复杂的运动规律或实现预先给定的位置。因此，空间机构在现代机械制造工业中，诸如航空工程、轻工机械和农业机械中得到广泛的应用。尽管由于空间机构中的一些运动副的结构比较复杂，其分析和综合也比较困难，一度限制了它的迅速发展。但是近几十年来，随着电子计算机的迅速发展，空间机构分析和综合方面的许多问题得到了比较满意的解决，它的应用范围不断扩大。特别是在一些新兴的科技领域内，例如机器人技术、生物医疗技术以及自动化技术中，空间机构占有极其重要的地位。为此，进一步深入研究空间机构的分析和综合方法及其应用，将对促进我国科学技术的现代化和国民经济的迅速发展具有极其重要的意义。

本书是根据编者多年来为研究生讲授《空间连杆机构的分析与综合》课程的讲义整理而成的。在第一章中，简要地介绍了空间机构的组成原理，给出了由七个构件和七个转动副（或者螺旋副）组成的基本机构和等效链的基本概念。在第二和第三章中，采用矩阵法对刚体和空间四杆机构进行运动分析，导出了旋转矩阵、螺旋位移矩阵、速度和加速度矩阵。专门介绍了分析空间低副机构所采用的、由J・Denavit和R・S・Hartenberg提出的符号标志法。在第四章中，简要地介绍了空间机构数综合的方法和步骤，并讲述了以曲柄为导向构件，使连杆平面实现已知位置的空间机构的综合方法。

在第五和第六两章中，专门介绍了目前比较常用的、以对偶

数为基础的旋量法。这种方法的优点在于能够全部类似地应用一般矢量代数的规则和将球面上的二维几何扩展到线空间，以分析刚体的空间运动性质。首先引进和应用对偶数方法的要归功于 Study 和其他一些学者。以后，大约在本世纪四十年代末，F·M·Dimenberg 应用旋量代数和对偶数分析空间机构，得出了多种机构的位移方程。随后，经过很多机构学专家的研究，使这种方法不断发展和完善，并愈来愈受到许多学者的重视。目前，旋量法已广泛地应用于空间机构的研究中。为了普及这种方法，在这两章中介绍了：有关对偶数、对偶矢量的基本概念；对偶数、对偶变量的常函数以及旋量的代数运算；用对偶四边形，并矢型算子和螺旋变换算子分析空间低副机构的位置问题。

本书由陆钟吕和刘乃钊两人编写，陆钟吕编写了第二、三、四、五、六章，审校了第一章；刘乃钊编写了第一章，审校了后五章。

在本书编写过程中承蒙哈尔滨科技大学王永乐教授仔细审阅，提出了很多宝贵意见，谨在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中难免有错误和不妥之处，殷切希望广大读者批评指正。

编　　者

# 目　录

# 第一章　空间连杆机构的组成原理

## §1-1　空间运动副的分类及其性质

任意一个刚体 $A$ 在空间运动时，可以是分别绕坐标系 $x$、$y$、$z$ 轴的独立转动和沿各个坐标轴的独立移动，或者是各个运动的组合，如图1-1所示。因此，在一般情况下，刚体 $A$ 在空间具有六个独立的运动，即有六个自由度。当刚体 $A$ 与另一刚体 $B$ 相互接触而组成运动副以后，$A$ 相对于 $B$ 的相对运动数目，即相

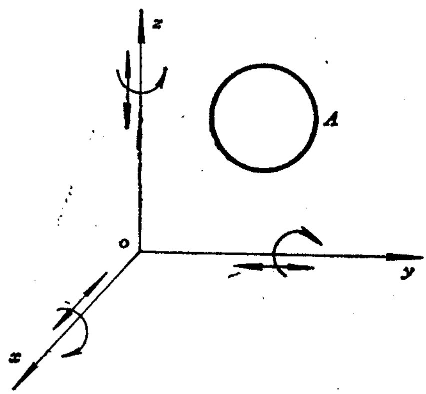



图1-1

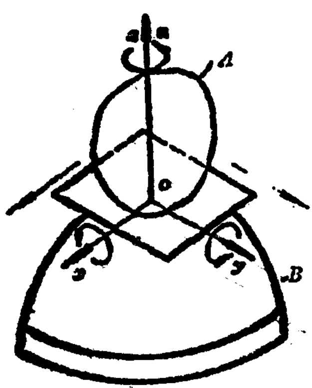



图1-2

对自由度数目的多少将取决于它们的接触形式。一般来讲，两个刚体接触部分的形状无非是点、线和面三种几何形状。今设刚体 $A$ 和 $B$ 的接触部分是一个点，如图1-2所示。通过接触点 $O$ 作 $A$ 和 $B$ 的公切面 $Q$ 和坐标系 $xyz$，轴 $x$ 和 $y$ 位于公切面 $Q$ 上，轴 $z$ 垂直于该公切面。此时，刚体 $A$ 在不脱离接触的条件下，对 $B$ 有五个相对的独

立运动，即分别绕坐标轴 $x$、$y$ 和 $z$ 的转动和沿 $x$、$y$ 轴的移动，沿 $z$ 轴的移动受到接触的限制，因为 $A$ 沿 $z$ 轴移动后，将使 $A$ 与 $B$ 脱离接触而破坏了运动副。由此可见，当两个刚体相互接触而组成运动副以后，运动副本身将提供一定的约束条件，使其相对运动受到一定的限制。设两个刚体之间的相对自由度数为 $f$，运动副所提供的约束条件数为 $u$，则它们之间的相互关系应为

$$u = 6 - f \tag{1-1}$$

由上式可知，运动副所能提供的约束条件数是从 1 到 5。因此，我们可以按照约束条件数的多少将运动副分成五类。

提供一个约束条件，即 $u = 1$ 的运动副叫做Ⅰ类运动副，图 1-2 所示的点接触运动副即属于这种运动副，它可以允许刚体之间有五个相对运动，即 $f = 5$。

图 1-3 为一圆柱体 $A$ 和一平面 $B$ 相接触而组成的运动副。它们之间是线接触。圆柱体 $A$ 相对于 $B$ 有四个相对运动，即绕 $x$、$z$ 轴的转动和沿 $x$、$y$ 轴的移动。此时运动副提供了两个约束条件，即 $u = 2$。限制了圆柱体 $A$ 在 $z$ 轴方向的移动和绕 $y$ 轴的转动。这种运动副是Ⅱ类副。图 1-4 所示的运动副也是Ⅱ类副的一

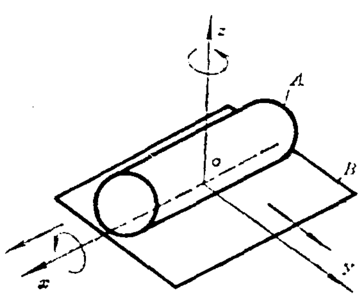



图1-3

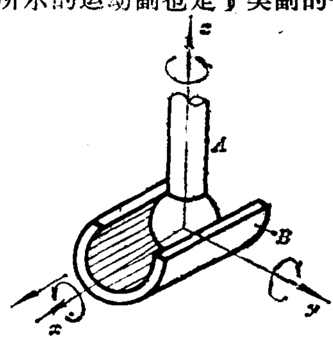
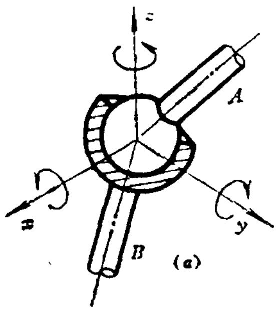



图1-4

个例子。圆球体 $A$ 在空心圆柱体 $B$ 内运动，它们之间的相对运动

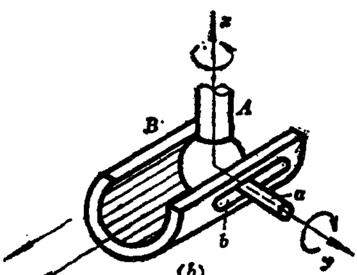
有：绕 $x$、$y$、$z$ 轴的转动和沿 $x$ 轴方向的移动。通过运动副而限制了在 $y$ 和 $z$ 轴方向的相对移动，所以 $u=2$，$f=4$。

图1-5中($a$)、($b$)、($c$)所示的运动副是Ⅲ类副的三种不同形式。在图($a$)中，圆球体 $A$ 与凹球面 $B$ 组成运动副，其接触部分是一球面。球体 $A$ 相对于 $B$ 的运动是绕 $x$、$y$、$z$ 轴的转动，在各个坐标轴方向的移动受到运动副的限制。所以这种运动副具有三个相对自由度，提供了三个约束条件，即 $f=3$，$u=3$。由于圆球体 $A$ 和 $B$ 的接触部分是球面，所以这种运动副叫做球面副，它属于低副。

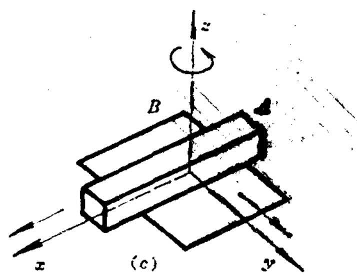


(a)

如果在图 1-4 中的圆球体 $A$ 上装一销轴 $a$，使其在空心圆柱体 $B$ 的直



(b)



(c)

图1-5

线槽 $b$ 中作直线往复移动，如图1-5($b$)所示，此时 $A$ 相对于 $B$ 的运动是分别绕 $y$ 和 $z$ 轴的转动和沿 $x$ 轴方向的移动。这种运动副叫做球销副，具有三个相对自由度，提供了三个约束条件，即 $f=3$，$u=3$。图 1-5($c$) 表示一个长方体 $A$ 与平面 $B$ 所组成的运动副，它们之间是面接触，属于低副。$A$ 相对于 $B$ 的运动是绕 $z$ 轴的转动和沿 $x$ 和 $y$ 轴方向的移动。它们之间具有三个相对自由度，运

动副提供了三个约束条件，即$f=3$，$u=3$。

图1-6表示一个圆柱体$A$与空心圆柱体$B$所组成的运动副，它们之间是面接触。圆柱体$A$可以绕其轴线转动和沿轴线移动，其相对自由度为2，运动副提供了四个约束条件，即$f=2$，$u=4$。这种运动副叫做圆柱副，属于Ⅳ类副的一种。

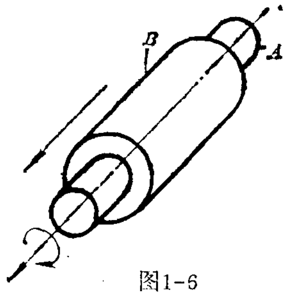


图1-6

螺栓$A$和螺母$B$相接触后，组成了螺旋副，如图1-7所示。此时，螺栓$A$一方面绕其轴线转动，另一方面沿轴线移动。但是螺栓$A$的转角$\varphi$和其轴线方向的移动量$h$受到螺纹螺距的限制，它们之间具有下列关系

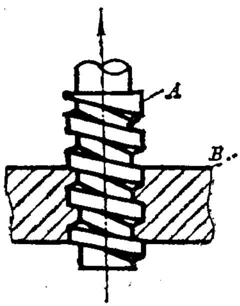


图1-7

$$h=h(\varphi) \qquad (1\text{-}2)$$

(1-2)式提供了一个附加的约束条件，所以螺旋副只有一个相对自由度，而具有五个约束条件，即$f=1$，$u=5$。因此螺旋副是一个Ⅴ类副。除去螺旋副以外，平面机构中的转动副和移动副，如图1-8($a$)、($b$)所示，也属于Ⅴ类副。它们分别具有一个相对转动和一个相对移动，$f=1$，都提供五个约束条件，$u=5$。运动副分类见表1-1。

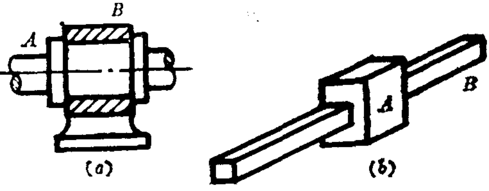
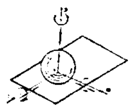
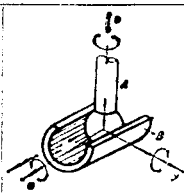
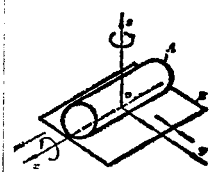
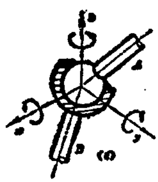
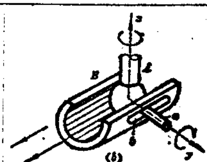
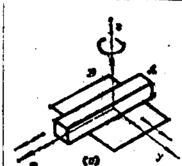
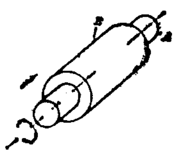
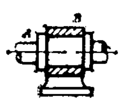
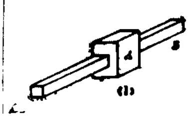
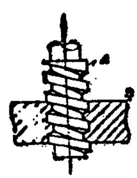


图1-8

(a)转动副；(b)移动副

表1-1 运动副的分类

| 运动副类别 | 约束数 $u$ | 自由度数 $f$ | 运动副型式 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 |
| Ⅰ | 1 | 5 |  | | |
| Ⅱ | 2 | 4 |  |  | |
| Ⅲ | 3 | 3 |  |  |  |
| Ⅳ | 4 | 2 |  | | |
| Ⅴ | 5 | 1 |  |  |  |

## §1-2 空间运动链及其性质

用运动副将两个以上的构件联接起来的组合体叫做运动链，如图 1-9 所示。一般来讲，空间运动链的各个构件不在同一平面或平行平面中运动。

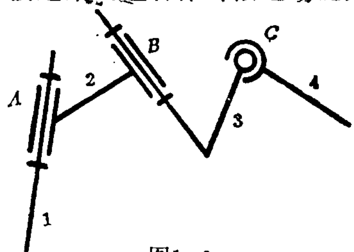


图1-9

空间运动链可以分成开式运动链和闭式运动链两种。运动链形成封闭多边形时，则称为闭式运动链，如图1-10所示，反之则称为开式运动链，如图1-9所示。绝大多数的机构是由闭式运动链组成，但是随着工业机械手的迅速发展，开式运动链将广泛地应用于机械手的执行机构中。

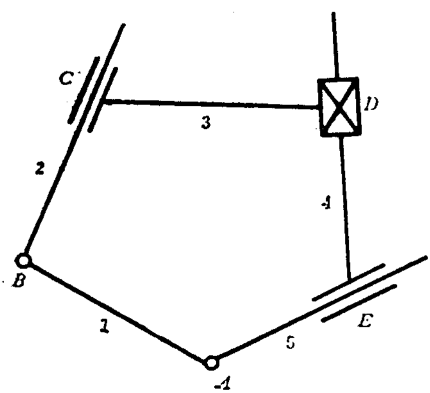


图1-10

设组成运动链的构件数为$N$，运动副数为$J$。在开式运动链中，先由两个构件组成一个运动副，如图 1-9 中构件 1 和 2 组成运动副$A$那样，然后每增加一个构件就增加一个运动副。显然，此时所增加的构件数目将等于运动副增加的数目。由此得到开式运动链的一个重要性质，即其总构件数目$N$和运动副数目$J$之间具有如下关系

$$N = J + 1 \tag{1-3}$$

在闭式运动链中，由于运动链所具有的封闭多边形的数目不同又可以分成单环闭式运动链和多环闭式运动链两种。在单环闭式运动链中（图1-10），其运动副数$J$和构件数$N$之间的关系应为

$$N - J = 0 \tag{1-4}$$

如果在图1-11中的单环运动链$ABCD$中再增加一个封闭多边形$CDEFG$，则形成一个双环闭式运动链。这时，增加$E$、$F$、$G$三个运动副，增加5、6两个构件。显然，在单环运动链的基础上每增加一个环，则运动副数比构件数多增加一个。在$L$个环的闭式运动链中，可以认为是在一个环的基础上增加$L-1$个环。此时其总运动副数比构件数多增加$L-1$个，而在第一个环中，其运动副数和构件数应当相等。由此得到，在$L$个环的闭式运动链中，其构件、运动副和环的数目之间的关系应为

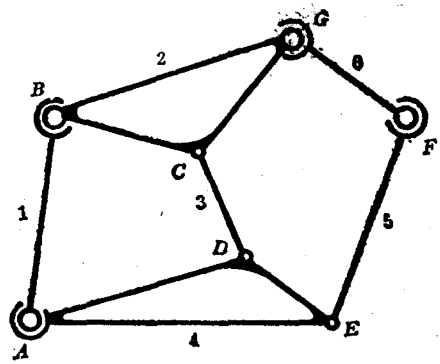



图1-11

$$J - N = L - 1 \tag{1-5}$$

或者

$$J - N + 1 = L \tag{1-6}$$

## §1-3 空间机构的分类及其自由度

在空间机构中，各个运动副的轴线并不都是互相平行的，因此各个构件间的相对运动是一个空间运动。按照各个运动副轴线之间的相互位置，空间机构可以分成：一般空间机构，球面机构

和空间移动机构。

### 1-3.1 一般空间机构

通常，这种机构的各个运动副轴线是相错的，如图1-12所示。它是一种缝纫机的弯针机构，由空间曲柄摇杆机构1-2-3-4-1和空间双摇杆机构1-5(4)-6-7-1组成，其中包括转动副、球面副和圆柱副。由图中可以看出，各个运动副的轴线是相错的。

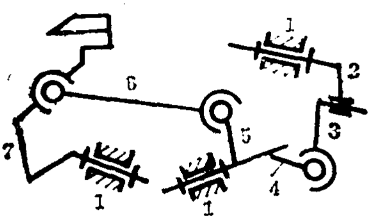


图1-12

一般空间机构的自由度计算可以根据运动副所提供的约束条件数来进行。设机构是由$N$个构件和$J$个运动副组成，其中有$J_5$个Ⅴ类副，$J_4$个Ⅳ类副，$J_3$个Ⅲ类副，$J_2$个Ⅱ类副和$J_1$个Ⅰ类副，则

$$J = J_5 + J_4 + J_3 + J_2 + J_1 \tag{1-7}$$

根据各类运动副所提供的不同约束条件数，我们得到$J$个运动副所提供的总约束条件数为

$$\sum_{1}^{J} u_i = 5J_5 + 4J_4 + 3J_3 + 2J_2 + J_1 \tag{1-8}$$

式中$u_i$是机构中第$i$个运动副所提供的约束条件数。

在空间机构中，每个运动构件有六个自由度，$(N-1)$个运动构件所具有的总自由度数应为$6(N-1)$。由此得到，一般空间机构的自由度$F$应为

$$\begin{aligned} F &= 6(N-1) - \sum_{1}^{J} u_i \\ &= 6(N-1) - (5J_5 + 4J_4 + 3J_3 + 2J_2 + J_1) \end{aligned} \tag{1-9}$$

我们也可以按照运动副所具有的相对自由度数来计算机构的自由度。设机构中第$i$个运动副的相对自由度为$f_i$，约束条件为$u_i$，则