高等数学

一元函数微积分

汪国钦 主编

GAODENG SHUXUE

华南理工大学出版社

高 等 数 学

一元函数微积分

汪国钦 主编

華南理工大學出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：一元函数微积分/汪国钦主编.—广州：华南理工大学出版社，2002.9

ISBN 7-5623-1872-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.汪…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　②微积分-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 057687 号

总 发 行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn
http://www2.scut.edu.cn/press

责任编辑：陈怀芬
印 刷 者：广东农垦印刷厂
开　　本：850×1168　1/32　**印张**：13.875　**字数**：348 千
版　　次：2002 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～2000 册
定　　价：25.00 元

前　言

我们在为华南理工大学网络教育学院开发研制了《高等数学网络课程》课件之后，又连续主持了网络学院三届学生的高等数学课程网上教学工作，对网络学院学生的学习方式和特点有了较为具体的了解和认识，因此萌发了要为接受远程教育的大学生写一本与网上教学相匹配的高等数学教材的愿望。本书就是在这种背景下写成的。

远程教育的特点是学生自主地学习，学生的学习方式主要包括在线模式和离线模式。在线模式，就是学生通过电脑上网，利用本课程的网上课件，自主地选择学习的内容和进度，根据自己的实际情况，阅读、视听网上课件所提供的丰富的教学素材，实时地与教师或其他学习者进行网上交流，具有交互式功能的学习方式。而离线模式，则是在非上网时间或不便上网的场所，利用网络以外的媒体，不受时间、空间的限制，进行本课程学习的方式。于是，一本既与网上课件内容相符、相辅相成、互为补充，又自成体系、适于独立使用的文字教材，便是网络以外媒体的最佳选择。为了使本书更加便于自学，我们力求突出重点，深入浅出，加强实践性环节。

本书共分六章，包含了一元函数微积分的全部内容，

可供远程教育(网络学院)、成人教育和参加自学考试的本科、专科学生使用,也可作为在校本科、专科大学生学习高等数学的参考书。

参加本书编写工作的有:汪国钦、徐永汉、张杰、朱惠媛、韩涛。汪国钦负责全书的总体设计和统稿。在本书的编写和出版过程中,得到了华南理工大学理学院和应用数学系领导的大力支持和鼓励,以及华南理工大学出版社有关同志的热心帮助和指导,在此一并表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,恳请读者提出宝贵意见,以便进一步修改完善。

编　　者

2002 年 6 月于广州

目　　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　函　　数

一、集合、区间与邻域

1. 集合的概念

在数学中，把具有某种特定性质的事物所组成的总体称为一个**集合**（简称集）. 组成这个集合的事物称为该集合的**元素**. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作：$a \in A$；如果 a 不是集合的元素，就说 a 不属于 A，记作：$a \notin A$. 一个集合，若其元素的个数是有限的，则称为**有限集**，否则就称为**无限集**.

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合，如果没有特别声明，以后提到的数都是实数. 习惯上，用 $\mathbb{R}$ 表示实数集，$\mathbb{N}$ 表示自然数集，$\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{Q}$ 表示有理数集.

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作：$A \subset B$ 或 $B \supset A$. 如 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$，$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$，$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，就称 A 与 B 相等，记作 $A = B$ 或 $B = A$.

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 例如集合 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0\}$ 就是一个空集. 规定空集是任何集合的子集.

2. 集合的运算

两集合的并　对于两个给定的集合 A 和 B，由它们的所有元

素组成的集合,叫做集合 A 与 B 的**并集**(或**和集**),记作 $A\cup B$ 或 $A+B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

如

$$\{1,2,3,4\}\cup\{2,4,6,8\}=\{1,2,3,4,6,8\},$$
$$[0,2]+[1,3]=[0,3].$$

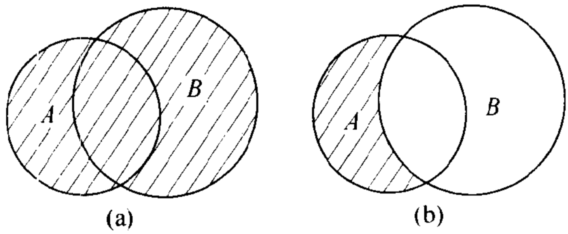


图 1-1

图 1-1(a)中的阴影部分表示 $A\cup B$. 又由定义易知

$$A\cup B=B\cup A, A\cup A=A, A\cup\varnothing=A.$$

两集合的差　对于给定的集合 A 和 B,由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的**差集**,记作 $A-B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A, \text{且 } x\notin B\}.$$

如

$$\{1,2,3,4\}-\{2,4,6,8\}=\{1,3\},$$
$$[0,2]-[1,3]=[0,1).$$

图 1-1(b)中的阴影部分表示 $A-B$.

两集合的交　对于给定的两集合 A 和 B,由同时属于这两个集合的元素组成的集合,叫做 A 和 B 的**交集**,记作 $A\cap B$ 或 AB,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A, \text{且 } x\in B\}.$$

如　　$$\{1,2,3,4\}\cap\{2,4,6,8\}=\{2,4\},$$

$$[0,2]\cap[1,3]=[1,2].$$

图 1-2 中的阴影部分表示 $A\cap B$.

由定义易知

$$A\cap B=B\cap A,$$

$$A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing.$$

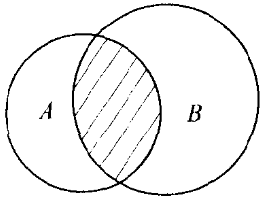


图 1-2

3. 区间与邻域

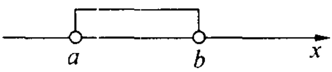
在高等数学中,最常用的一类实数集是**区间**. 设 a 和 b 都是实数且 $a<b$,实数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间,记作 (a,b),即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$. a 和 b 称为区间的端点,它们均不属于 (a,b). 类似地可定义以 a、b 为端点的闭区间、半开区间等,它们的定义和记号分别如下:

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,

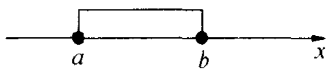
半开区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

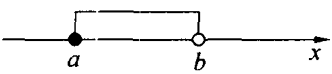
以上这些区间都称为有限区间,在几何上它们均可以用数轴上长度有限的线段来表示,如



(a, b)



$[a, b]$

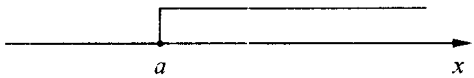


$[a, b)$

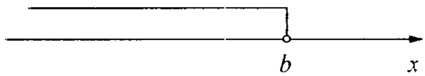
$(a, b]$

此外,还有无限区间. 我们引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)后,可用类似的记号表示无穷区间:

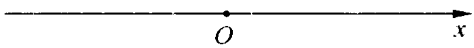
$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,几何表示为



$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$，几何表示为



$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in R\}$，几何表示为



邻域也是一种今后常用的集合．设 a、δ 是实数，且 $\delta > 0$，称集合 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记为 $O(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$，其中点 a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径．点 a 的 δ 邻域，几何上就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$．记号 $O(a)$ 表示点 a 的某一邻域，不指明具体半径，而 $\check{O}(a, \delta)$ 表示点 a 的 δ 去心邻域，即

$$\check{O}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

为方便，有时就称开区间 $(a - \delta, a)$ 为点 a 的 δ 左邻域，称 $(a, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 右邻域．

二、函数

所谓函数关系就是变量之间的依赖关系．这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应．在某一变化过程中，两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质．一般地，有

定义　设 x、y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应，则

称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数.以后凡是没有附加说明时，函数都是指单值函数.

具体表示一个函数时，可以用表格法、解析法（即算式表示法），有时也可以用语言描述，这些都是大家在中学时已熟悉的内容，本书就不详述了.在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数.这时函数的定义域就约定为使算式有意义的一切实数组成的集合，又称为函数的**自然定义域**.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$.这样，以 x 为横坐标，y 为纵坐标就在 xOy 平面上确定一点 (x,y).当 x 取遍 D 上的每一数值时，就得到点 (x,y) 的一个集合 E：$E=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$.这个点集 E 称为函数 $y=f(x)$ 的图形（如图 1-3），$f(D)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

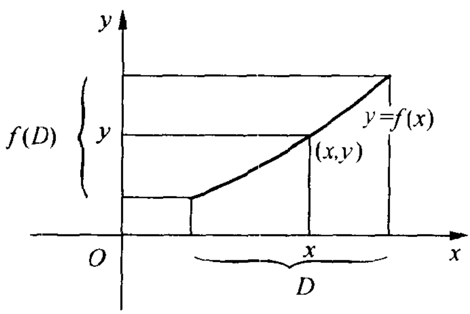


图 1-3

从函数定义可以看出，定义域与对应法则是函数的两要素，当两函数的定义域与对应法则相同时，我们就说两函数相同（或相