消去法的紧凑格式

周 毅 蒋里强 主编

计算方法

JISUAN FANGFA

对分法

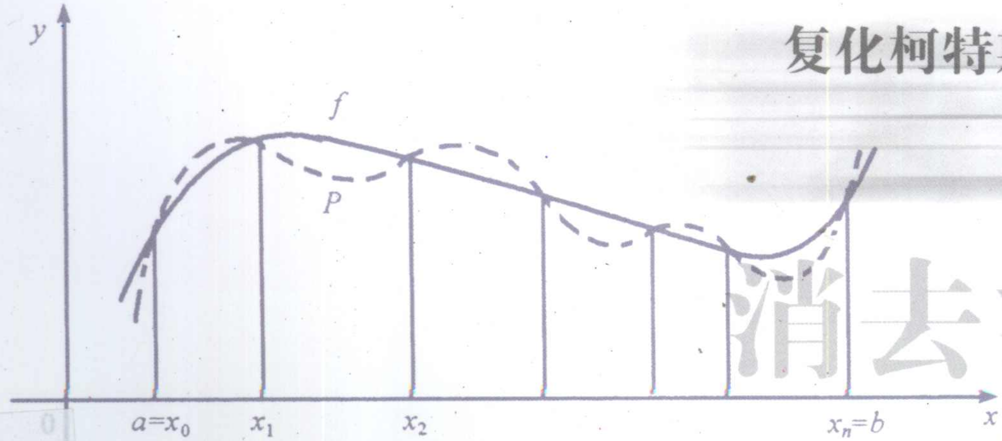
阿达姆斯外推法

迭代法

高斯－勒让德求积公式

牛顿法

复化柯特斯求积公式



消去法

最小二乘法

国防科技大学出版社

计 算 方 法

主　编：周　毅　　　　蒋里强
副主编：范　晔　程汉文　周自刚

国防科技大学出版社
·长沙·

内 容 简 介

全书共分为算法与误差、方程的近似解法、线性方程组的解法、插值法与曲线拟合、数值积分与数值微分、常微分方程数值解法等六章。每章附有适量习题,书末附有习题答案。

本书内容丰富、层次清晰、深入浅出、通俗易懂,可作为非数学专业的本科生及各类工程技术人员的计算方法课程的教材或参考书,也可作为自学或函授教材。

图书在版编目(CIP)数据

计算方法/周毅等编.—长沙:国防科技大学出版社,2002.7
ISBN 7-81024-889-8

Ⅰ.计… Ⅱ.周… Ⅲ.数值计算—计算方法—高等学校—教材 Ⅳ.O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 054961 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073
E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:石少平 责任校对:何晋
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本:787×1092 1/16 印张:8 字数:185 千
2002 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1-4500 册
*

定价:14.00 元

前　言

本书是在周毅、蒋里强 1995 年编写的《计算方法》教材的基础上，结合多年教学实践中所积累的经验和教改成果，并吸取使用原教材的同行们所提出的宝贵意见，根据工科专业的特点和今后的发展要求，按照高等工科院校计算方法教学基本要求两次修改而成。

在编写中，我们在原教材的基础上进行了改进：(1)注意渗透现代教学思想和方法，采用现代教学的符号和语言，并突出重点，淡化枝节；(2)注意加强与计算机科学的结合，在方法描述上，力求突出方法在计算机上实现的特点，增加了算法框图，从而使读者学习了计算方法后，不但能加深对方法的理解，更容易进行程序设计，为使用计算机解决数值问题打下良好的基础；(3)对原教材的习题进行了调整和修改，并在书后附上习题答案，其中部分可供计算实习使用。

本书由周毅、蒋里强主编，周毅、蒋里强、范晔、程汉文、周自刚、于政庆、王彦编写。郑州防空兵学院薛文敏教授审阅了全稿，并提出了许多宝贵意见，在此表示感谢。

本书内容丰富、层次清楚、深入浅出、通俗易懂，可用做非数学专业的本科生以及各类工程技术人员的计算方法课程的教材或参考书，也可作为自学或函授教材。

限于编者水平和编写时间仓促，本书不足之处敬请读者指正。

编　者

2002 年 7 月

目　　录

第一章　算法与误差

第一节　引　　言

数学是研究数与形的科学.其中研究怎样利用手指、算盘、算尺、计算器、计算机等工具,来求出数学问题数值解答的学问,就是计算方法,或称为计算数学,或称为数值分析.它是数学中最古老的分支。

一、计算方法研究的对象与任务

电子计算机的诞生,是计算数学乃至人类文明史的一个里程碑.它使人类获得了高速度、自动化的计算工具,它为众多浩繁的数值计算问题的解决展现了光明的前景.从此,科学研究与工程设计的手段,发生了从模型试验向数值计算的巨大转变.随着计算机被广泛地用于大型的科学计算,计算方法已经成为应用数学的一个重要分支.

运用计算机解决科学计算问题需要经历以下几个主要步骤:提出实际问题 — 建立数学模型 — 选用数值计算方法 — 程序设计 — 上机计算求出数值结果.由提出实际问题到上机求得问题解答的整个过程都可看做是应用数学的任务.如果细分的话,由实际问题应用有关科学知识和数学理论建立数学模型这一过程,通常作为应用数学的任务.而根据数学模型提出求解的数值计算方法直到编出程序上机算出结果,这一过程则是计算数学的任务,也是计算方法研究的对象.因此,计算方法的任务是研究适用于科学计算的数值计算方法及有关的数学理论,它是程序设计和对数值结果进行分析的依据和基础,是用计算机进行科学计算全过程的一个重要环节.它的内容包括函数的数值逼近,数值微分与数值积分,非线性方程的数值解,数值线性代数,常微分与偏微分方程数值解等,都以数学问题为研究对象.

二、算法的概念

大家知道,电子计算机具有极高的运算速度,但它只能根据给定的指令完成加、减、乘、除等算术运算和一些逻辑运算.因此,要使用计算机来求解各种数学问题,必须把求解过程归结为按一定的规则进行一系列四则算术运算或逻辑运算的结果.计算机只能机械地执行人们所给定的指令,而不会主动地思维,去进行创造性的工作,交给计算机执行的解题方法的每一步骤都必须加以准确的规定.我们把对数学问题的解法归结为有加、减、乘、除等基本运算或逻辑运算,并有确定运算顺序的完整而准确的描述,称为数值算法,或简称算法.计算方法就是以数学问题为对象,研究各种数值算法及其有关理论的一门学科.

数值算法的优劣,需要考虑其计算工作量,计算程序的存贮量和逻辑结构的复杂程度,还要考察收敛性和稳定性来加以鉴定.

第二节　误差的基本概念

一、误差的来源

科学计算中所处理的数据和计算的结果，通常都是一定精度范围内的近似数值，它们与实际的精确值之间总存在着误差.引起误差的因素是多方面的，但主要有下面几种：

1.数学描述与实际问题的误差

用计算机解决科学计算问题，首先要建立数学模型.它是对被描述的实际问题进行抽象、简化而得到的，是一种理想化的数学描述，因而是近似的，它与实际问题之间总存在误差.我们把数学模型与实际问题之间出现的这种误差称为"模型误差"或"描述误差".只有实际问题提法正确，建立数学模型时抽象和简化得合理，才能得出好的结果.由于这种误差难于用数量表示，通常都假定数学模型是合理的，这种误差可以忽略不计.在计算方法中不讨论这种误差.

2.观测误差

在各计算公式中包含着一些已知数据(称为原始数据)，这些数据往往是由观测和实验得到的，它们和精确值之间有误差.这种由观测产生的误差称为"观测误差".在计算方法中也不讨论这种误差.

3.截断误差

在计算中常遇到超越运算或极限运算，它们需要通过无穷过程才能求得精确结果.但是，实际上人们只能进行有限的算术运算，用有限的步骤来求得近似的结果.例如，常用收敛的无穷级数部分和来代替无穷级数本身以求得其近似值，这样由于截断一个无穷过程而引起的误差，称为"截断误差"或"方法误差".

4.舍入误差

对于参与计算的数，用有限小数代替无限小数，或用位数较少的有限小数代替位数较多的有限小数.例如用 3.14 代替 π，用 1.414 代替$\sqrt{2}$ 等，这样产生的误差称为"舍入误差".

误差的来源有以上种种，了解这些对于数值计算都是有帮助的.在计算方法中除了研究数学问题的算法外，还要研究计算结果的误差是否满足精度要求，这就是误差问题.在计算方法课程中主要讨论算法的截断误差与舍入误差.

二、绝对误差、相对误差、有效数字

为了从不同的侧面表示近似数的精确程度，通常用绝对误差、相对误差和有效数字的概念.

定义 2.1　设 x 为准确值.x^* 是 x 的一个近似值，称 $e^* = x - x^*$ 为近似值 x^* 的绝对误差，简称误差.

注意这样定义的误差 e^* 可正可负.绝对误差与误差的绝对值不但其值不一定相等，而且不是同一个概念，通常无法算出准确值 x，也不能算出误差 e^* 的准确值，只能根据具体测量或

计算的情况估计误差的大小范围.即估计出 $|e^*|$ 的上界.

定义 2.2　设存在一个正数 ε^*,使

$$|e^*| = |x - x^*| \leqslant \varepsilon^* \tag{1.2.1}$$

则称 ε^* 是近似值 x^* 的绝对误差限或简称误差限.

ε^* 总是一个正数,即 $\varepsilon^* > 0$.由(1.2.1)式可知

$$x^* - \varepsilon^* \leqslant x \leqslant x^* + \varepsilon^*$$

即由误差限可知准确值 x 所在的范围,x 必落在区间$[x^* - \varepsilon^*, x^* + \varepsilon^*]$内.在应用上常采用

$$x = x^* \pm \varepsilon^*$$

来表示近似值 x^* 的精确度或准确值所在的范围.例如毫米刻度的米尺测量一长度 x,读数法如下:若长度接近毫米刻度 x^*,就读出那个刻度 x^* 作为该长度的近似值.显然这个近似值的误差限为0.5mm,于是 $|x^* - x| \leqslant 0.5$mm.如读出的长度为765mm,则有 $|765 - x| \leqslant 0.5$.从这个不等式我们仍不知道准确的 x 是多少,但知 $764.5 \leqslant x \leqslant 765.5$,说明 x 在区间[764.5, 765.5]内.

对于同一个值 x 而言 e^* 与 ε^* 越小,也就越精确,但对不同的 x 和 y 而言,误差 e^* 和误差限 ε^* 的大小不能很好地表示近似值的精确度.例如,有两个量 $x = 10 \pm 1, y = 1000 \pm 5$,则 $x^* = 10, \varepsilon_x^* = 1; y^* = 1000, \varepsilon_y^* = 5$.虽然 ε_y^* 比 ε_x^* 大4倍,但 $\varepsilon_y^*/y^* = \frac{5}{1000} = 0.5\%$,比 $\varepsilon_x^*/x^* = \frac{1}{10} = 10\%$ 要小的多,这说明 y^* 近似 y 的程度比 x^* 近似 x 的程度要好得多.所以,除考虑误差的大小外,还应考虑近似值 x^* 的大小.这就有必要引入相对误差的概念.

定义 2.3　x 的近似值 x^* 的相对误差为

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x - x^*}{x^*} \tag{1.2.2}$$

相对误差说明了 x^* 的绝对误差与 x^* 本身比较起来所占的比例.它可以反映一个近似数的精确程度.相对误差通常用百分数来表示,如前面所说的相对误差分别为10%和0.5%.

相对误差可正可负.我们一般不能求出 e_r^* 的准确值,而只能估计它的大小范围.其绝对值的任一个上界均称为相对误差限记为 ε_r^*,即

$$|e_r^*| = \left|\frac{x - x^*}{x^*}\right| \leqslant \varepsilon_r^* \tag{1.2.3}$$

根据定义2.3,上面所提到的近似值 $x^* = 10$ 和 $y^* = 1000$ 的相对误差限分别为

$$\varepsilon_r^*(x) = \frac{1}{10} = 0.01 = 10\%, \varepsilon_r^*(y) = \frac{5}{1000} = 0.005 = 0.5\%$$

由此可见,y^* 近似 y 的程度比 x^* 近似 x 的程度好。

例 1　已知 $e = 2.71828182\cdots$,其近似值 $e^* = 2.71828$,求 e^* 的绝对误差限 ε^* 和相对误差限 ε_r^*.

解:因为　$e^* - e = -0.00000182\cdots$

所以　$|e^* - e| = 0.00000182\cdots < 0.000002 = 2 \times 10^{-6}$

同样　$|e^* - e| < 0.000019 = 1.9 \times 10^{-6}$

显然,2×10^{-6} 和 1.9×10^{-6} 都为 $|e^* - e|$ 的上界,都可以作为近似值 e^* 的绝对误差限

ε^*,即

$$\varepsilon^* = 2 \times 10^{-6} \text{ 或 } \varepsilon^* = 1.9 \times 10^{-6}$$

由于 $\dfrac{0.000002}{2.71828} \approx 0.704\cdots \times 10^{-6}$

所以 0.8×10^{-6} 和 0.71×10^{-6} 都可以作为 e^* 的相对误差限 ε_r^*.

由此可见,绝对误差限 ε^* 和相对误差限 ε_r^* 是不唯一的,这是因为一个数的上界不唯一所致,但是 ε^* 和 ε_r^* 越小,x^* 近似的 x 的程度越好,即 x^* 的精度也高,相对误差限 ε_r 一定是正数.

注意绝对误差与误差限是有量纲的,而相对误差与相对误差限是无量纲的.

写出一个近似数后,我们当然希望能说明它的准确程度,为此再引进有效数字的概念.

在实际计算中,经常按四舍五入原则取近似数.显然,这样得到的近似数值的误差限不会超过末位数的半个单位.粗略地说,按四舍五入原则得到的近似值中的各位数字都是有意义的,称这些数字为“有效数字”.严格说来:

定义 2.4 若近似值 x^* 的绝对误差限是某一位的半个单位,该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位,我们就说 x^* 有 n 位有效数字.用严格的数学语言还可以定义如下:

将 x 的近似数写成标准形式

$$x^* = \pm 10^m [x_1 + x_2 \cdot 10^{-1} + \cdots + x_n \cdot 10^{-(n-1)}] \tag{1.2.4}$$

其中 x_1 是 1 到 9 中的一个数字,$x_2,\cdots,x_n$ 是 0 到 9 中的一个数字,且

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1} \tag{1.2.5}$$

则称近似值 x^* 具有 n 位有效数字.其中 $x_1,\cdots,x_n$ 都是 x^* 的有效数字.x^* 又称为有 n 位有效数字的有效数.这里 n 是正整数.

例 2 下列数字关于 π 有几位有效数字

3.14; 3.1416; 3.1415

解:$x = \pi = 3.14159265\cdots$

1) $x^* = 3.14$; $e^* = 0.0015926\cdots$; $\varepsilon^* \leqslant 0.002$

$$|\pi - 3.14| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times 10^{0-3+1}$$

所以 3.14 关于 π 有 3 位有位数字.

2) $x^* = 3.1416$; $e^* = -0.000007\cdots$; $\varepsilon^* \leqslant 0.000008$

$$|\pi - 3.1416| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4} = \frac{1}{2} \times 10^{0-5+1}$$

所以 3.1416 关于 π 有 5 位有效数字

3) $x^* = 3.1415$; $e^* = 0.000092\cdots\cdots$; $\varepsilon^* \leqslant 0.0001$

$$|\pi - 3.1415| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 10^{0-4+1}$$

所以 3.1415 关于 π 有 4 位有效数字.

注意,如果 x^* 是由真值 x 按四舍五入原则得到的近似值,则从被保留的最后一位起直到 x^* 的最左边非零数字之间的所有数字都是有效数字,有几位就是有几位有效数字的有效数.

通常用四舍五入原则来求有效数字.

例3 按四舍五入原则写出下列各数具有5位有效数字的近似数:187.9325;0.03785551;8.000033;2.7182818.

解:按定义,上述各数具有5位有效数字的近似数分别是

187.93; 0.037856; 8.0000; 2.7183.

注意,$x=8.000033$的5位有效数字的近似数是8.0000而不是8,因为8只有一位有效数字.另外有效位数与小数点前后有多少位数无关.

从式(1.2.5)可得到具有n位有效数字的近似数x^*,其绝对误差限为

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2}\times 10^{m-n+1}$$

在m相同的情况下,n越大,则10^{m-n+1}越小.故有效数位越多,绝对误差限越小,从有效数字与相对误差限的关系,我们也可得到,有效数位越多,相对误差限越小.

三、误差的传播

对有误差的数进行计算,就会导致误差的传播,引出一些新的误差.如对两个近似数进行加、减、乘、除四则运算时要产生误差.更一般地,当自变量有误差时,计算函数也产生误差.数值运算中的误差估计情况比较复杂,通常可用泰勒(Taylor)展开式估计其误差限.

设数学问题的解y与参变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$有关.$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.给定参量的一组值(即数据)若有误差,解也一定有误差.设$x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$为$x_1,x_2,\cdots,x_n$的近似值,相应的解为y^*,假定多元函数f在点$x=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$处可微,则当数据误差较小时解的绝对误差

$$\begin{aligned} e^*(y) &= y-y^* = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*) \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_i}e^*(x_i) \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

解的相对误差为

$$e_r^*(y)=\frac{e^*(y)}{y^*}\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i^* e_r^*(x_i)}{y^*} \tag{1.2.7}$$

我们可利用式(1.2.6)与式(1.2.7)来估计按函数f的计算误差,给定函数f的具体形式,就可以得出具体的估计.特别地,可以得到加、减、乘、除的误差误计.例如:

$$e(x_1^*\pm x_2^*)\approx e(x_1^*)\pm e(x_2^*)$$

$$e(x_1^* x_2^*)\approx x_2^* e(x_1^*)+x_1^* e(x_2^*)$$

$$e(x_1^*/x_2^*)\approx\frac{e(x_1^*)}{x_2^*}-\frac{x_1^*}{(x_2^*)^2}\cdot e(x_2^*)$$

四、误差分析的方法与原则

数值运算中的误差分析是个很重要而复杂的问题.误差分析的方法主要有概率分析法、向

后误差分析法和区间分析法等许多种方法,但这些方法都不是十分有效的,目前解决这一问题常常是针对不同类型问题逐步进行分析,由于定量分析常常是很困难的,因此对误差积累问题进行定性分析就有重要意义,这就要引入数值稳定性的概念.我们把运算过程中舍入误差不增长的计算公式称为"数值稳定"的,否则是不稳定的.关于这个问题,我们在这里不讨论它.

解决一个计算问题往往有多种算法,用不同算法计算的结果,其精确度是不同的.人们自然希望选用那些计算量小而精度又高的算法.但如何给出最好的算法没有什么固定的办法,我们只是按照一般的情况,指出数值运算中应注意的若干原则.

1. 注意简化计算步骤以减少运算次数

同样一个计算问题,若能减少运算次数,既能提高解题速度,又能使计算中的误差积累降低。

例如计算 x^{255} 的值.若要逐个相乘需用 254 乘法,但若写成

$$x^{255} = x \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot x^8 \cdot x^{16} \cdot x^{32} \cdot x^{64} \cdot x^{128}$$

只要做 14 次乘法运算即可.

例 4 计算 $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 的值.

解:如果直接计算,需进行$\frac{n(n+1)}{2}$次乘法和 n 次加法.

若将公式变成如下递推公式

$$\begin{cases} S_n = a_n \\ S_k = xS_{k+1} + a_k, k = n-1, n-2, \cdots, 2, 1, 0 \\ P_n(x) = S \end{cases}$$

后,再计算 $p_n(x)$ 只需做 n 次乘法和 n 次加法运算.

理论和实践证明,在进行算法设计时,充分利用递推公式,对提高算法的效率往往很有好处。

2. 要避免两相近的数相减

在数值运算中,两相近的数相减有效数字会严重损失.

例如 $x = 532.65, y = 532.52$ 都是5位有效数字,但 $x - y = 0.13$ 只有两位有效数字,这说明必须尽量避免出现这类运算,最好改变计算方法,防止这种现象产生.

例 5 计算 $y = 10^7(1 - \cos 2°)$(用四位数学表)

解:由于 $\cos 2° = 0.9994$,直接计算

$$y = 10^7(1 - \cos 2°) = 10^7(1 - 0.9994) = 6 \times 10^3$$

只有一位有效数字.

若利用 $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$,则

$$y = 10^7 \times 2 \times \sin 1° = 6.13 \times 10^3$$

具有三位有效数字($\sin 1° = 0.0175$).

此例说明,可通过改变计算公式避免或减少有效数字的损失.

类似,乘数绝对值很大或除数接近于零,可能会严重扩大误差,减少精度.

3. 要防止大数"吃掉"小数

在数值运算中参加运算的数有时数量级很大,而计算机位数有限,如不注意运算次序就可

能出现大数“吃掉”小数的现象，影响计算结果的可靠性.

4. 应选用数值稳定性好的计算公式

数值稳定的计算公式舍入误差不增长，计算结果精确.

习　题　一

1　设有三个数：$a = 325 \pm 1$；$b = 3.25 \pm 0.01$；$c = 0.00325 \pm 10^{-5}$. 其近似值 $a^* = 325$，$b^* = 3.25$，$c = 0.00325$，哪个近似值的精度高？为什么？

2　设下列各对近似值均为有效数，问它们是否一样？若不一样有何区别？

(1) 45800 与 458×10^2

(2) 0.00438 与 0.04380×10^{-1}

(3) 0.4015×10^2 与 0.04015×10^3

(4) 9800 与 98×10^2

(5) 0.8070 与 0.807

3　设下列各数都是经过四舍五入得到的近似数，试写出它们是几位有效数字：

$x_1^* = 1.1021$，$x_2^* = 0.031$，$x_3^* = 385.6$，$x_4^* = 56.430$，$x_5^* = 90 \times 10^3$，$x_6^* = 2.0 \times 10^{-4}$

4　设下列近似值均为有效数，试求各数的绝对误差、相对误差和有效数字的位数.

(1) 0.0315

(2) 0.3150

(3) 31.50

(4) 5000

(5) 5.0×10^3

第二章　方程的近似解法

在科学技术和实际应用中常常遇到方程的求解问题，函数方程 $f(x)=0$ 的解通常叫做方程的根，也叫函数的零点．如果 $f(x)$ 是代数多项式，则称方程为代数方程，如果 $f(x)$ 是超越函数，则称方程为超越方程．理论上已经证明，不高于四次的代数方程的根，可以用根式来表示，但高于四次的代数方程的根一般已不能用根式表示，即不存在根的解析表达式．对于超越方程，一般更不存在根的解析表达式．另一方面，在实际应用中，并不一定要求得到根的解析表达式，而只要求获得具有一定准确程度的近似值就可以了．

方程求根往往分两步来做：

第一步，确定根的初始近似值．

设 $f(x)$ 为定义在某个区间上的连续函数，方程 $f(x)=0$ 的根的分布可能很复杂，然而，我们不难将函数 $f(x)$ 的定义域分成若干个只含一个实根的区间．于是总可假设 $f(x)$ 在某个区间 (a,b) 内有且仅有一个实的单根，且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，这个步骤叫做“根的隔离”，这样的区间 (a,b) 叫隔根区间．只要隔根区间适当小，则该区间内的任一点都可作为方程的根的初始近似值．

将根隔离确定初始近似值的简单方法有：

1、描图法：画出 $y=f(x)$ 的略图，观察曲线与 x 轴交点的位置．

2、试算法：适当试算 $f(x)$ 的一些值，观察其符号改变的情况．

第二步，将初始近似值逐步精确化，求出满足精度要求的结果．

本章主要介绍第二步的几种常用的求根方法．

第一节　对分法

方程 $f(x)=0$，如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调连续，且有 $f(a)\cdot f(b)<0$（这些假设可由“根的隔离”实现），则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内有唯一实根 α，可以用下述函数逐次逼近的方法来求得．

将 $[a,b]$ 二等分，中点为 $\frac{a+b}{2}$，计算 $f(\frac{a+b}{2})$，根据 $f(\frac{a+b}{2})$ 的值分两种情况：

若 $f(\frac{a+b}{2})=0$，则 $\frac{a+b}{2}$ 就是所求根；若 $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$，根据 $f(\frac{a+b}{2})$ 的符号形成新的有根区间 (a_1,b_1)，见图 2－1－1．

当 $f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0$ 时，取 $a_1=a,b_1=\frac{a+b}{2}$；当 $f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})>0$ 时，取 $a_1=\frac{a+b}{2},b_1=b$．从而得到一个新的有根区间 (a_1,b_1) 落在 (a,b) 内，即 $(a_1,b_1)\subset(a,b)$，新的

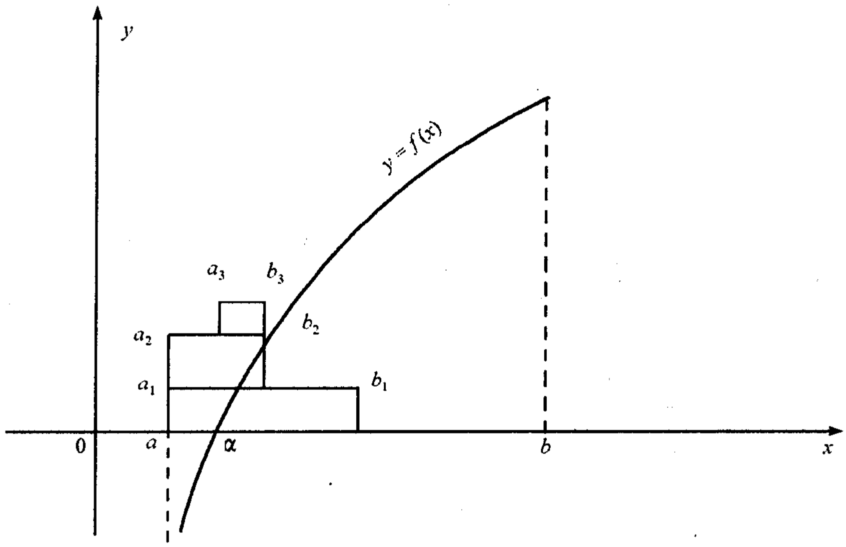


图 2 - 1 - 1

有根区间的长度是原区间长度的一半,即

$$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$$

再将$[a_1, b_1]$二等分,继续上述过程,此过程可一直进行下去,仅当出现第一种情况时过程中断.

记第 k 次过程得到的有根区间为(a_k, b_k).

$$(a_k, b_k) \subset (a_{k-1}, b_{k-1}) \subset \cdots\cdots \subset (a_1, b_1) \subset (a, b)$$

且

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \frac{1}{2^2}(b_{k-2} - a_{k-2}) = \cdots = \frac{b - a}{2^k}$$

显然有

$$f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$$

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k} \to 0 \text{ (当 } k \to \infty \text{ 时)}$$

故当 k 充分大时,我们取最后一个区间的中点 x_k 作为方程$f(x) = 0$的根 α 的近似值

$$x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k) \tag{2.1.1}$$

且有误差估计式

$$|\alpha - x_k| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}(b - a) \tag{2.1.2}$$

表示误差不超过原区间长度的$\frac{1}{2^{k+1}}$.

这种求方程根的近似值的方法称为对分法.

例1 求方程 $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$在$[2,3]$内的根的近似值,使绝对误差不超过10^{-3}.

解:$f'(x)=3x^2-2>0, x\in[2,3]$, $f(x)$单调,且$f(2)=-1, f(3)=16$,所以$(2,3)$是有根区间.

要使误差小于10^{-3},只要使

$$\frac{1}{2^{k+1}}(3-2)<10^{-3}$$

即$2^{k+1}>10^3, k+1>\frac{3}{\lg 2}=9.97, k>8.97$.

故只需取$k=9$,就能得到满足要求的根的近似值,计算过程如表2-1-1.

表2-1-1

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号	有根区间
0	2	3	2.5	+	(2,2.5)
1	2	2.5	2.25	+	(2,2.25)
2	2	2.25	2.125	+	(2,2.125)
3	2	2.125	2.0625	-	(2.0625,2.125)
4	2.0625	2.125	2.0938	-	(2.0938,2.125)
5	2.0938	2.125	2.1094	+	(2.0938,2.1094)
6	2.0938	2.1094	2.1016	+	(2.0938,2.1016)
7	2.0938	2.1016	2.0977	+	(2.0938,2.0977)
8	2.0938	2.0977	2.0958	+	(2.0938,2.0958)
9	2.0938	2.0958	2.0948		

所以$x_k=2.095$是使误差小于10^{-3}的根的近似值.根的准确值是$\alpha=2.0945515$,绝对误差$e^*=-0.0004485$.

对分法的优点是程序简单,对函数要求低,只要连续就可以了,收敛速度以$\frac{1}{2}$为公比的等比级数相同,不算太低,它的缺点是不能求偶数重根,也不能求复根.

对分法的程序框图如图2-1-2所示.