上海市工人业余学校课本

机电数学

下册

上海人民出版社

上海市工人业余学校课本

机电数学

下册

上海市工人业余学校教材编写组

上海人民出版社

上海市工人业余学校课本
机 电 数 学
下 册
上海市工人业余学校教材编写组
上海人民出版社出版
(上海绍兴路5号)
新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 11.25 字数 248,000
1974年2月第1版 1977年9月第6次印刷
统一书号：13171·66 定价：0.69元

毛主席语录

列宁为什么说对资产阶级专政，这个问题要搞清楚。这个问题不搞清楚，就会变修正主义。要使全国知道。

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。劳动人民要知识化，知识分子要劳动化。

工人以工为主，也要兼学军事、政治、文化。也要搞社会主义教育运动，也要批判资产阶级。

说　明

在毛主席无产阶级革命路线的指引下，在批林整风运动的推动下，本市工人业余教育蓬勃发展．为了适应普及科学技术知识的需要，我们曾于1972年编写了《机电数学》试用教材．通过近一年的教学实践，广大工人、学员和教师提出了不少宝贵意见，我们根据这些意见并吸取了各单位的教学经验，对原试用教材作了较大的修改．这次修改，我们尽量注意以下几点：一、在教材的系统和内容的安排上，由浅入深，由特殊到一般，符合学员的认识规律；二、初步运用唯物辩证观点阐明一些数学的基本概念和方法；三、从实践的观点出发，力求使理论和实际相结合，并加强了解决实际问题所需要的基本理论和基本运算；四、在文字叙述上力求通俗易懂，便于自学，并配备一定数量的例题和习题，每章附有内容小结与复习题，便于复习巩固．

根据业余教育的特点，教材分上、下两册．上册共分七章，第一、二、三、七章讲述代数式和方程的基本知识，第四、五、六章讲述几何和解直角三角形的有关知识，附录部分有算术复习和几何图形的面积、体积公式．下册共分九章，第一、二、三、九章讲述对数、任意角三角函数和复数的基本知识，第四、五、六、七、八章讲述函数与曲线的有关知识，附录部分有上册内容的复习．

本教材适合于具有一定生产实践经验和相当于初中文化水平的机电工人使用．由于教材内容较多，各厂校可根据专

7A

业特点和学员实际情况进行选读，并补充结合本专业的例题和习题．

“教材要彻底改革”。编写新教材是无产阶级教育革命的重要组成部分．由于我们的马列主义、毛泽东思想水平不高，又缺乏实践经验，教材中肯定还会存在不少问题，希望广大工人、学员和教师提出批评和修改意见，以便今后作进一步修改．

在教材修改过程中，得到很多厂、校的领导，工人，学员和教师的大力支持，我们在此一并表示感谢．

上海市工人业余学校教材编写组

一九七三年九月

目　录

第一章　对　　数

在生产实践和科学实验中，我们经常会遇到下面的一些计算问题：

例如，设计一台机床，如果最高转速为1980转/分，最低转速为44转/分；任何相邻两档转速的比ϕ为1.41，问转速应有几档？

设所求转速有k档，且从小到大各档转速依次为n_1，n_2，n_3，n_4，……，n_k．根据题意，

$$\frac{n_2}{n_1}=\phi，所以 n_2=n_1\phi;$$

$$\frac{n_3}{n_2}=\phi，所以 n_3=n_2\phi=n_1\phi^2;$$

$$n_4=n_3\phi=n_1\phi^3;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以此类推，有

$$n_k=n_1\phi^{k-1}.$$

现　　$n_1=44$ 转/分，$n_k=1980$ 转/分，$\phi=1.41$，

代入上式，得　　$1980=44\times1.41^{k-1}$，

即　　$1.41^{k-1}=45.$

这是一个已知底数和幂，求指数k的问题．这类问题运用以前学过的计算方法，还不能解决．

又如，计算我国第一颗人造地球卫星绕地球运转一周所需要的时间，将遇到下列算式：

$$T=6.28\times\sqrt{\frac{6371}{9.8\times10^{-3}}}\times\left(\frac{15565}{12742}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

象这种含有乘、除、乘方、开方运算的式子，如果直接计算，是较复杂的，有时甚至是很困难的.

如何来解决上面这些计算问题呢？通过学习对数知识，这些问题将得到解决. 本章主要讨论对数的有关概念及运用对数进行计算的方法.

第一节 对数的概念及其运算法则

一、对数的概念

在 $a^b=N$ 中，已知底数 a 和指数 b，由幂的意义可以求出幂 N. 例如，

当 $a=2$, $b=5$ 时, $N=2^5=32$;

当 $a=4$, $b=\frac{1}{2}$ 时, $N=4^{\frac{1}{2}}=2$;

当 $a=10$, $b=-2$ 时, $N=10^{-2}=0.01$.

反过来，在 $a^b=N$ 中，已知底数 a 和幂 N，怎样求指数 b 呢？对于某些特殊的值，仍可由幂的意义直接得出. 例如，

当 $N=32$, $a=2$ 时, $b=5$;

当 $N=2$, $a=4$ 时, $b=\frac{1}{2}$;

当 $N=0.01$, $a=10$ 时, $b=-2$.

但在一般情况下，指数 b 的值不能由幂的意义直接求得. 如前面提到的 $1.41^{k-1}=45$，指数 k 的值就不能由幂的意义直接求得，它要通过对数运算来求得.

为此，我们先通过例子来介绍对数的意义.

在 $2^5=32$ 中，我们把指数 5 叫做以 2 为底 32 的对数，并

写作 $\log_2 32=5$;

在 $4^{\frac{1}{2}}=2$ 中，我们把指数 $\frac{1}{2}$ 叫做以 4 为底 2 的对数，并写作 $\log_4 2=\frac{1}{2}$;

同样，在 $10^{-2}=0.01$ 中，我们把指数 -2 叫做以 10 为底 0.01 的对数，并写作 $\log_{10}0.01=-2$.

一般地，如果 $a^b=N$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)，那末指数 b 叫做以 a 为底 N 的对数，并写作 $\log_a N=b$. 这里，log 右下角的数 a 叫做底数（简称底），N 叫做真数.

根据对数的意义可以知道，在底数 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，指数式 $a^b=N$ 和对数式 $\log_a N=b$ 既有联系，又有区别. 现把这两个式子中 a, b, N 的名称和式子的意义对照列表如下：

式子	名称			意义
	$a\begin{pmatrix}a>0\\a\neq 1\end{pmatrix}$	b	$N(N>0)$	
指数式 $a^b=N$	底数	指数	幂	a 的 b 次幂等于 N
对数式 $\log_a N=b$	底数	对数	真数	以 a 为底 N 的对数等于 b

下面举例说明指数式与对数式的互换：

指数式 $\rightleftarrows$	对数式
$4^1=4$	$\log_4 4=1$;
$10^0=1$	$\log_{10}1=0$;
$5^0=1$	$\log_5 1=0$;
$10^{-2}=0.01$	$\log_{10}0.01=-2$;
$4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$	$\log_4\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$;
$1.41^x=45$	$\log_{1.41}45=x$.

为什么要把指数式转变成对数式呢？恩格斯说："这种从

一个形式到另一个相反的形式的转变，并不是一种无聊的游戏，它是数学科学的最有力的杠杆之一，如果没有它，今天就几乎无法去进行一个比较困难的计算。"

从上面的互换中可以看出，把指数式写成对数式，并不是一种无聊的游戏，如果没有对数式，就无法把指数式中的未知数 x 表达出来，也就无法计算 x 的值.

从指数式和对数式的互换中，可以推得对数的三个性质：

(1) $\because\ a^1=a$, $\therefore\ \log_a a=1$,

即 与底相等的数的对数恒等于1；

(2) $\because\ a^0=1$, $\therefore\ \log_a 1=0$,

即 1的对数恒等于零；

(3) 在 $\log_a N=b$ 中，$\because\ a>0$, $\therefore\ N=a^b>0$;

即 真数恒为正数(负数和零没有对数).

例1 求下列各对数：

(1) $\log_2 4$; (2) $\log_2 16$; (3) $\log_2 64$.

解 (1) $\because\ 2^2=4$, $\therefore\ \log_2 4=2$;

(2) $\because\ 2^4=16$, $\therefore\ \log_2 16=4$;

(3) $\because\ 2^6=64$, $\therefore\ \log_2 64=6$.

从上面的例子可以推得 $\log_a a^m=m$,

即 真数是底数的 m 次幂时，它的对数就是幂指数 m.

二、积、幂、商的对数的运算法则

我们知道在幂的运算法则中，同底数幂的相乘、乘方、相除可以转化为指数的相加、相乘、相减，例如

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad (a^m)^n=a^{mn},\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

现在来讨论同底数的对数的运算法则.

从例1中可以看出：

$$\log_2 64=\log_2 4+\log_2 16,$$

但 $$\log_2 64=\log_2(4\times 16),$$

$$\therefore\quad \log_2(4\times 16)=\log_2 4+\log_2 16.$$

一般地 $$\because\quad \log_a a^m=m,\ \log_a a^n=n,\ \log_a a^{m+n}=m+n,$$

$$\therefore\quad \log_a a^{m+n}=\log_a a^m+\log_a a^n,$$

但 $$\log_a a^{m+n}=\log_a(a^m\cdot a^n),$$

$$\therefore\quad \log_a(a^m\cdot a^n)=\log_a a^m+\log_a a^n.$$

在上式中，如果设

$$a^m=M,\ a^n=N,$$

则

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N, \tag{1}$$

即 正因数乘积的对数，等于各个因数对数的和.

由此还可推得，当 n 是正整数时，

$$\log_a N^n=\log_a \underbrace{N\cdot N\cdot\cdots\cdot N}_{n\text{个}}$$

$$=\underbrace{\log_a N+\log_a N+\cdots+\log_a N}_{n\text{个}},$$

$$\log_a N^n=n\cdot\log_a N. \tag{2}$$

可以证明（证明从略），当 n 是任意实数时，(2)式仍然成立，

即 正数的幂的对数，等于幂底数的对数乘以幂指数.

由上面两个法则可以推得

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a(M\cdot N^{-1})=\log_a M+\log_a N^{-1}$$

$$=\log_a M-\log_a N,$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N, \tag{3}$$

即 两个正数的商的对数，等于被除数的对数减去除数的对数.

这里必须注意，在一般情况下，

$$\log_a(M+N)\neq\log_a M+\log_a N,$$

$$\log_a(M-N)\neq\log_a M-\log_a N.$$

例2 用 $\log_{10}2$ 和 $\log_{10}3$ 来表示下列各式：

(1) $\log_{10}12$； (2) $\log_{10}\frac{8}{27}$； (3) $\log_{10}\sqrt[5]{6}$.

解 (1) $\log_{10}12=\log_{10}(3\times 2^2)=\log_{10}3+\log_{10}2^2$

$$=\log_{10}3+2\log_{10}2;$$

(2) $\log_{10}\frac{8}{27}=\log_{10}8-\log_{10}27$

$$=\log_{10}2^3-\log_{10}3^3$$

$$=3\log_{10}2-3\log_{10}3$$

$$=3(\log_{10}2-\log_{10}3);$$

(3) $\log_{10}\sqrt[5]{6}=\log_{10}6^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\log_{10}(2\times 3)$

$$=\frac{1}{5}(\log_{10}2+\log_{10}3).$$

例3 用 $\log_{10}a$ 和 $\log_{10}b$ 来表示下列各式：

(1) $\log_{10}(a^3\cdot\sqrt{b})$； (2) $\log_{10}\frac{\sqrt[3]{a+b}}{a\cdot\sqrt{b}}$.

解 (1) $\log_{10}(a^3\cdot\sqrt{b})=\log_{10}a^3+\log_{10}b^{\frac{1}{2}}$

$$=3\log_{10}a+\frac{1}{2}\log_{10}b;$$

(2) $\log_{10}\frac{\sqrt[3]{a+b}}{a\cdot\sqrt{b}}=\log_{10}\sqrt[3]{a+b}-\log_{10}(a\cdot\sqrt{b})$

$$=\log_{10}(a+b)^{\frac{1}{3}}-(\log_{10}a+\log_{10}b^{\frac{1}{2}})$$

$$=\frac{1}{3}\log_{10}(a+b)-\log_{10}a-\frac{1}{2}\log_{10}b.$$

例 4 设 $x=\frac{3.14\times\sqrt[3]{2.56}}{0.185^2}$，求 $\log_{10}x$.

解 $\log_{10}x=\log_{10}\frac{3.14\times\sqrt[3]{2.56}}{0.185^2}$

$$=\log_{10}3.14+\log_{10}\sqrt[3]{2.56}-\log_{10}0.185^2$$

$$=\log_{10}3.14+\frac{1}{3}\log_{10}2.56-2\log_{10}0.185.$$

从上面几个例题中可以看出，利用对数的运算法则可以把乘、除运算转化为加、减运算；乘方、开方的运算转化为乘、除运算，这样就能使较复杂的运算化为简单的运算.

习 题 1-1

1. 把下列指数式写成对数式：

(1) $3^4=81$; (2) $4^{-3}=\frac{1}{64}$;

(3) $10^3=1000$; (4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$;

(5) $10^{-3}=0.001$; (6) $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$;

(7) $8^{\frac{2}{3}}=4$; (8) $a^1=a$.

2. 把下列对数式写成指数式：

(1) $\log_7 49=2$; (2) $\log_8 2=\frac{1}{3}$;

(3) $\log_{10}0.01=-2$; (4) $\log_{10}10=1$;

(5) $\log_3 1=0$; (6) $\log_{27}\frac{1}{9}=-\frac{2}{3}$.

3. 求下列各式中的 x：

(1) $\log_3 81=x$; (2) $\log_x\frac{1}{16}=4$;

(3) $\log_9 81=x$; (4) $\log_2 x=-3$;

(5) $\log_6 x=0$; (6) $\log_x 5=1$;

(7) $\log_7 1=x$; (8) $\log_{10}x=-1$.

4. 求下列各对数:

(1) $\log_{10}10$;　　(2) $\log_{10}100$;

(3) $\log_{10}1000$;　　(4) $\log_{10}1$;

(5) $\log_{10}0.1$;　　(6) $\log_{10}0.01$;

(7) $\log_{10}0.001$.

5. 用 $\log_{10}2$, $\log_{10}3$ 和 $\log_{10}5$ 表示下列各式:

(1) $\log_{10}15$;　(2) $\log_{10}\frac{3}{20}$;　(3) $\log_{10}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

6. 已知下列各式, 求 $\log_{10}x$:

(1) $x=\frac{a}{5b}$;　　(2) $x=\frac{2(a+b)}{a(a-b)}$;

(3) $x=\frac{\sqrt{a+b}}{5a}$;　　(4) $x=\frac{5mn}{3ab}$;

(5) $x=\frac{b\sqrt{c}}{\sqrt[3]{a^2}}$;　　(6) $x=\sqrt[4]{\frac{412^3}{713\times 112^5}}$.

第二节　常用对数

前面我们讨论了底相同的对数运算法则，现在进一步讨论对数的数值计算．我们常用的记数法是十进位的，在对数的数值计算中，用 10 做底的对数比较方便．这一节将专门讨论这种对数的性质以及运用这种对数进行数值计算的方法．

一、常用对数的意义及性质

我们把以 10 为底的对数叫做常用对数．为了方便起见，规定把 $\log_{10}N$ 简写成 $\lg N$．例如，$\log_{10}100$ 简写成 $\lg 100$.

常用对数是一般对数的特例，因此它具有一般对数的性质．此外，常用对数还具有一些特殊的性质．下面我们分三种情况来讨论：

1. 10的整数次幂的对数

例如，$\lg 1=\lg 10^0=0$;

$\lg 10=\lg 10^1=1$;　　$\lg 0.1=\lg 10^{-1}=-1$;

$\lg 100=\lg 10^2=2$;　　$\lg 0.01=\lg 10^{-2}=-2$;

$\lg 1000=\lg 10^3=3$;　$\lg 0.001=\lg 10^{-3}=-3$;

……………………　　…………………………

一般地，

$$\lg 1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个}0}=\lg 10^n=n;$$

$$\lg \underbrace{0.00\cdots0}_{n\text{个}0}1=\lg 10^{-n}=-n.$$

由此可得

性质 1　以10为底的整数次幂的对数等于幂的指数，即

$$\lg 10^{\pm n}=\pm n\quad (n\text{为正整数}).$$

例 1　求下列各对数：

(1) $\lg 100000$;　　　　(2) $\lg 0.0001$.

解　(1) $\lg 100000=\lg 10^5=5$;

(2) $\lg 0.0001=\lg 10^{-4}=-4$.

例 2　求下列各真数 x：

(1) $\lg x=4$;　　　　(2) $\lg x=-2$.

解　(1) $\because\ \lg x=4$,

根据性质1，　　$\therefore\ x=10^4$;

(2) $\because\ \lg x=-2$,

同理，　　$\therefore\ x=10^{-2}$.

从上例可知，如果已知某真数 N 的对数为 $\pm n$ (n 为正整数)，那末真数 $N=10^{\pm n}$.