標準
高中三角學

陳明哲編著

中央書局

標準
高中三角學

陳明哲編著

中央書局

標準高中三角學

編著者 陳　明　哲
發行人 張　煥　珪
印刷者 聯合印刷公司
香港中環些利街六號

發行者 中央書局　香港英皇道多寶大廈四樓

一九七六年五月四版

編輯大意

一、本書根據教育部最近頒佈之中學課程標準編輯，專供升學、複習、會考及課外補充之用。

二、本書分爲八章。收羅現行各教科書之重要題及歷年各大學之入學試題，以使讀者明瞭其命題之中心與趨向。

三、本書對於定理、公式等證明均力求簡明扼要，俾使讀者易於瞭解。

四、本書中演出之例題特多，盡選代表性之題材，詳加解答，俾使讀後即可明瞭各種解題之方法。而習題中，較易者則僅列其答，稍難者加以提示或略解，更難者則付完整解答，以便自修。

五、三角學中之檢表法，固然爲讀者之基本知識，而應詳加敍述。但一般升學考試，如考檢表法，事實上頗有困難，故本書爲顧全升學起見，對於三角函數表之檢查，一律不列，惟望讀者切勿忽略其重要性。

六、三角學乃爲高中一年級之必修科目。因該時代數學中高深之部分——如方程式論，行列式，消去法，極大極小——尙未述及，故材料淺薄，多不能應付目前之大學入學考試。故本書力謀補救，舉例詳盡，以期完整。

七、本書例題及習題中附有記號「※」者表示較難之問題，如讀者時間不足，可斟酌情形習作。

八、編著本書爲時倉卒，疏忽之處，自所難免，尙希各位賢達，不吝指敎，俾能隨時改善，是所至盼。

編　者　識

本書之用法

爲了培養解題之能力，必徹底理解基本定理，即在本書各節所示之定義定理，而舉出之例題亦爲詳加研究之對象，故後讀者必須徹底研究。

但在研究例題時，千萬不可看其解答，必須先自解之，如雖經充分思考後，仍覺難解時，則可先看其解答之一部分再自解之，如尙覺難解者，始可觀其全解。爲徹底了解其解答，應重複默解之。

本書讀法一般步驟再詳述如下：

初讀時，例題中，如有困難者，附以省略號○。

如必要讀之例題，附以再讀號◎爲便。

習題在初讀時解之亦可，或再讀後解之亦可。

但，必須自力解之。雖在習題後附有解答，尙以不看爲要。

再讀之時，先讀附有再讀之記號者，如認爲不必再讀者，則附以×號，以消去之，如認爲必要三讀者，留之不作記號。次讀有省略號○者，其中認爲必要再讀之例題，塡以小圈。在省略號內爲◎表示必再讀，如認爲不必再讀之時，附以×號消去之。仍感困難者留之。

解習題亦照前法讀之。

如此繼續反覆讀之，則難解之問題逐漸減少，而短時期中可讀完。

如有充分時間者，本書末之補充題再研究之，以期其徹底理解。

高三或畢業之讀者可按前法讀之爲便。

高二之讀者可作教科書之補充，尤以本書之定義及定理之證明比一般教科書爲詳細明瞭，例題豐富必可作讀者之好伴侶。

標準高中三角學

第一章 角之度量法

1. 角……1
2. 角之度量法……1
3. 六十分制與弧度制……2
4. 圓心角、弧、半徑間之關係及扇形之面積……4
5. 雜例……5

第二章 三角函數

1. 直角坐標……11
2. 象限……11
3. 角之推廣……12
4. 三角函數……12
5. 三角函數之正負值……14
6. 已知一函數值求同角的其他各函數值……15
7. 三角函數之基本關係式……19
8. 三角函數之互換……20
9. 三角恆等式……26
10. 證明三角恆等式之方法……27
11. 有關證題之其他應注意之點……28
12. 簡易恆等式之證明……29
13. 三角函數之直線表示法……41
14. 三角函數值之變化……43
15. 餘角之三角函數……46
16. 特別角之三角函數值……47
17. 化負角三角函數爲正角三角函數……53

18. 化（ $90°+\theta$ ）角之三角函數爲 θ 角三角函數 ……54
19. 化（ $90°-\theta$ ）角之三角函數爲 θ 角三角函數 ……56
20. 化（ $180°-\theta$ ）角之三角函數爲 θ 角三角函數 ……56
21. 化（ $180°+\theta$ ）角之三角函數爲 θ 角三角函數 ……58
22. 化（ $270°-\theta$ ）角之三角函數爲 θ 角三角函數 ……58
23. 化（ $270+\theta$ ）角之三角函數爲 θ 角三角函數 ……59
24. 化（ $360°-\theta$ ）角之三角函數爲 θ 角三角函數 ……59
25. 化（ $n\times360°+\theta$ ）角之三角函數爲 θ 角三角函數 ……60

第三章 複角函數

1. 兩角和之正弦與餘弦……72
2. 兩角和之正弦餘弦公式意義之推廣……73
3. 兩角差之正弦與餘弦……75
4. 兩角和及差之正切……82
5. 兩角和及差之餘切……83
6. 兩倍角之三角函數……88
7. 三倍角之三角函數……94
8. 半角之三角函數……99
9. 化正餘弦之積爲和或差……107
10. 化正餘弦之和或差爲積……107
11. 關於證明恆等式之研究……109
12. 具有條件 $A+B+C=180°$ 之三角函數數式之變形……130
13. 關於等差級數 (A.P.) 等比級數 (G.P.) 及調和級數 (H.P.) 等問題……141
14. 雜題……145

第四章 三角形邊角間之關係

1. 正弦定律……153
2. 餘弦定律……154

3. 正切定律……………………………………………… 155
4. 半角定律……………………………………………… 156
5. 三角形之解法………………………………………… 158
6. 三角形中邊與角之恆等式之證明…………………… 167
7. 附有條件之證明問題………………………………… 178
8. 三角形之面積………………………………………… 192
9. 三角形外接圓半徑與內切圓半徑之關係…………… 196
10. 三角形之傍切圓之半徑……………………………… 197
11. 雜題…………………………………………………… 206

第五章　測　量　問　題

1. 測量術語……………………………………………… 216
2. 解測量問題之步驟…………………………………… 217
3. 簡易測量題…………………………………………… 217
4. 簡易測量題（續）…………………………………… 225

第六章　含三角函數之行列式

（244——254）

第七章　反三角函數

1. 反三角函數之意義…………………………………… 255
2. 反三角函數之性質…………………………………… 256
3. 反三角函數之通值…………………………………… 256
4. 反三角函數之主值…………………………………… 258
5. 反三角函數之恆等式………………………………… 263
6. 雜題…………………………………………………… 275
7. 三角方程式…………………………………………… 279
8. 三角方程式之解法…………………………………… 279
9. 雜題…………………………………………………… 287

10. 反三角函數方程式……………………………………295
11. 三角聯立方程式……………………………………299

第八章　代數學上之應用

1. 消去法……………………………………317
2. 三角不等式……………………………………324
3. 極大，極小……………………………………332
4. 含三角函數之級數和……………………………………337

第一章 角之度量法

1. 角(Angle)

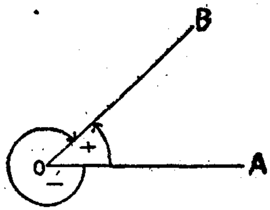
設一半直線OX之位置一定，又一半直線OA初與OX相重，O爲樞紐，自OA位置旋轉至OB位置構成角AOB。

OA稱爲角之始邊(*Initial side*)

OB爲終邊(*Terminal side*),

O爲頂點(*Vertex*)，且

規定旋轉方向與時針旋轉方向相同時爲負角，相反時爲正角。



2. 角之度量法(Measurement of angles)

量角之大小所用之單位有下列三種：

(一) 六十分制(*Sexagesimal system*)

將圓周分爲360等分，每一等分弧所對之圓心角，稱爲1度(*Degree*)，故圓周角等於360度，每度分爲60分(*Minute*)，每分分爲60秒(*Second*)，度，分，秒簡記爲"°"，"′"，"″"。此法數理上多用之。

(二) 百分制(*Centesimal system*)

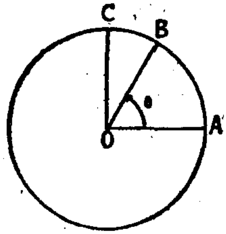
以一直角之百分之一爲單位，這單位稱爲1級(*Grade*)，一級之百分之一稱爲一分(*Minute*)，一分之百分之一稱爲一秒。(*Second*)。此法沿用不廣。

(三) 弧度制(*Circular system*)

於圓周上取等於半徑之弧，其弧所對之圓心角爲角之單位，稱爲一弧度(*Radian*)，或稱一弳。

3. 六十分制與弧度制

於圓 O 上取 AB 弧之長等於半徑 OA，則 θ 角等於 1 弧度，另作半徑 $CO\perp OA$。



由幾何定理

(i) 圓周 $=2\pi r$（r 爲半徑，π 爲圓周率）

(ii) 同圓或等圓內，兩圓心角之比，等於所對兩圓弧之比。

故得

$$\frac{\angle AOB}{\angle AOC}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{AC}}=\frac{r}{\frac{\pi r}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore\quad \angle AOB=\frac{2}{\pi}\angle R$$

因直角與 π 爲常數，故知 $\angle AOB$ 亦爲常數，則 $\angle AOB$ 爲一弧度單位。

$$\therefore\quad 1\text{ 弧度}=\frac{2\times 90^\circ}{\pi}=\frac{180^\circ}{3.1416}=57.2957^\circ=57^\circ17'45''$$

$$\therefore\quad 1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}=\frac{3.1416}{180}\text{弧度}=0.0174533\cdots\cdots\text{弧度}$$

$$\therefore\quad 360^\circ=2\pi\text{ 弧度}\qquad 180^\circ=\pi\text{ 弧度}$$

茲再討論六十分制與弧度制之互相關，設一角以弧度法所量之值爲 R，以六十分制所量之值爲 D，因一直角爲 90°，則 $\frac{D}{90^\circ}$ 表此角與直角之比。但 $\frac{\pi}{2}$，表直角以弧度爲單位，故此角與直角之比爲 $\frac{2R}{\pi}$，此以上兩比之比值相等，故可得下式之關係。

$$\frac{D}{90^\circ}=\frac{2R}{\pi}\quad\text{即}\quad\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}$$

由是 $\quad R=\dfrac{D\pi}{180}\qquad D=\dfrac{180R}{\pi}$

今將特別角其六十分制與弧度制對照表列於後:

D	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
R	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
D	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
R	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

〔例1〕 化 $150°$ 及 $43°15'18''$ 爲弧度。

（解） $150°=150°\times\frac{\pi}{180}$ 弧度 $=\frac{5}{6}\pi$ 弧度

$43°15'18''=43°+\frac{15°}{60}+\frac{18°}{60\times60}=\frac{38927°}{15\times60}$

故 $\frac{38927°}{15\times60}=\frac{38927}{15\times60}\times\frac{\pi}{180}=\frac{38927}{162000}\pi=(0.7548\cdots)$ 弧度

〔例2〕 化 $\frac{2}{3}\pi$ 弧度及 0.75 弧度爲六十分制。

（解） $\frac{2}{3}\pi$ 弧度 $=\frac{2\pi}{3}\times\frac{180°}{\pi}=120°$

0.75弧度 $=0.75\times\frac{180°}{3.1416}=42°\times\frac{0.30528}{3.1416}=52°58'18''$

〔例3〕 平時鐘在十二點十五分之時，求鐘面兩針所夾之角，以六十分制表之。

（解） 分針十二點鐘行過十五格，但時針速度爲分針之 $\frac{1}{12}$，故時針經過 15 格 $\times\frac{1}{12}=\frac{5}{4}$ 格，故兩針中隔15格 $-\frac{5}{4}$ 格 $=\frac{55}{4}$ 格。

又鐘面每格爲 6°，故兩針成

$6°\times\frac{55}{4}=82.5°=82°30'$ 之角。

〔例4〕 求正五邊形，正八邊形，正 n 邊形之各一內角，以弧度表出之。

（解）　依幾何定理正多邊形各內角爲 $D=\dfrac{(n-2)\cdot180^\circ}{n}$

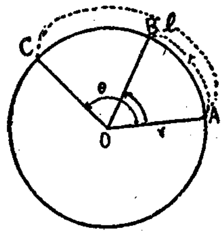
由　$\dfrac{D}{180^\circ}=\dfrac{R}{\pi}$ 得　$R=\dfrac{D\pi}{180^\circ}$

故　$R=\dfrac{\dfrac{(n-2)\cdot180^\circ}{n}\times\pi}{180^\circ}=\dfrac{(n-2)\cdot\pi}{n}$

設　$n=5, 8, x$ 分別代入上式，則可得正五邊形之一內角爲 $\dfrac{3\pi}{5}$，正八邊形之一內角爲 $\dfrac{3\pi}{4}$，正 x 邊形之一內角爲 $\dfrac{(x-2)\pi}{x}$。

4. 圓心角、弧、半徑間之關係及扇形之面積

於半徑爲 r 之圓，設圓心角爲 θ 弳之弧長爲 l，由平面幾何知圓心角之大小與所對的弧成比例。



故　$l:r=\theta:1$

$\therefore$　$l=r\theta$　或　$\theta=\dfrac{l}{r}$

即　弧長＝半徑×圓心角

或　圓心角$=\dfrac{\text{弧長}}{\text{半徑}}$

又設扇形 AOC 之面積爲 A，則

扇形 AOC 之面積：圓之面積$=\theta:2\pi$

即　$A:\pi r^2=\theta:2\pi$　$\therefore$　$A=\dfrac{1}{2}\theta r^2$

〔例1〕　一圓的半徑爲 2 寸，求 4.3 寸之弧所對之圓心角。

（解）　由公式　$\theta=\dfrac{l}{r}=\dfrac{4.3}{2}=2.15$

故其所對之圓心角爲 2.15 弧度。

〔例2〕　地球之直徑爲 7900 哩，則地球中心角 1′ 所對之弧長若干？

（解）　半徑＝7900 哩÷2＝3950° 哩。

$\therefore$　弧長$=r\theta=3950$ 哩$\times\dfrac{\pi}{180\times60}=1.149$ 哩。

5. 雜 例

〔例1〕 設三角形的三內角成等差級數，而以六十分制量最小角所得的數值與弧度法最大角所得之比爲 $60:\pi$。問三角各若干度？

（解） 解三角形三內角之度數各爲 $(x-y)^\circ$, x°, $(x+y)^\circ$（但 y° 爲公差），則依題意得

$$x-y:\frac{(x+y)\pi}{180}=60:\pi \quad \therefore \quad (x-y)\pi=60\times\frac{(x+y)\pi}{180}$$

則 $x-y=\frac{1}{3}(x+y)$ ……………………………………………(1)

因三角形三內角之和爲 180°，故得

$$(x-y)+x+(x+y)=180 \quad \therefore \quad x=60 \text{……………(2)}$$

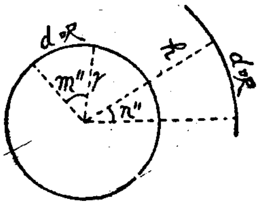
以(2)仰入(1)，得 $y=30$

$\therefore$ $x-y=30$, $x=60$, $x+y=90$ 答：30°, 60°, 90°

〔例2〕 相隔 d 呎距離之兩點，在地面下二垂線之交角爲 m''，于 h 哩之高處其交角爲 n''，則地球半徑爲 $\frac{nh}{m-n}$，試證之。

（證） 設地球之半徑爲 r，因地球半徑比 d 值甚大，故可視 d 爲一弧，由弧度制得知

$$d=r\theta=(r+h)\theta'$$



但 $\theta=\frac{m\pi}{180\times60^2}$, $\theta'=\frac{n\pi}{180\times60^2}$

故 $\frac{rm\pi}{180\times60^2}=\frac{(r+h)n\pi}{180\times60^2}$

即 $rm=(r+h)n \quad \therefore \quad r=\frac{nh}{m-n}$

〔例3〕 有二種正多角形，其一正多角形一內角之度數與另一正多角形之弧度（弳）之比爲 $144:\pi$。如此多角形有幾組，再求各組之邊數。

（解） 設適合於條件之二種正多角形之邊數爲 n 及 m。

則 正 n 邊形一內角之度數 $=\frac{90(2n-4)}{n}$

$$\text{正 } m \text{ 邊形一內角之弳數} = \frac{(m-2)\pi}{m}$$

故依題意，得

$$\frac{90(2n-4)}{n} : \frac{(m-2)\pi}{m} = 144 : \pi$$

就 n 解之，得 $n = 10 - \dfrac{80}{m+8}$

因 $n \geqq 3$ 故 $\dfrac{80}{m+8} \leqq 7$；就 m 解之，得 $m \geqq \dfrac{24}{7} = 3\dfrac{3}{7}$

$\therefore$ $m+8 \geqq 12$，而 $m+8$ 必為 80 之約數

80 之約數中不小於 12 者為 16, 20, 40, 80

$m+8=16$，時 $m=8$ $\therefore$ $n=5$

$m+8=20$，時 $m=12$ $\therefore$ $n=6$

$m+8=40$，時 $m=32$ $\therefore$ $n=8$

$m+8=80$，時 $m=72$ $\therefore$ $n=9$

故所求之多角形有四組，而其各組之邊數為 (5, 8)，(6, 12)，(8, 32)，(9, 72)。

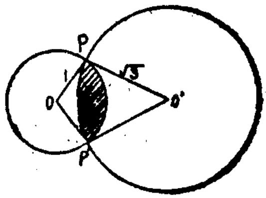
〔例 4〕 設兩圓正交，其半徑 1 及 $\sqrt{3}$，試求兩圓公共部份周圍之長及面積之大小。

（解） 於左圖 $PO=1$，$PO'=\sqrt{3}$

因圓 O 與圓 O' 正交，故 $OP \perp PO'$

於 $\triangle POO'$

$OO' = \sqrt{\overline{PO}^2 + \overline{PO'}^2} = \sqrt{1+3} = 2$



$\therefore$ $OO' = 2\,OP$

$\therefore$ $\angle POO' = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\angle POP' = \dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $\angle PO'O = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$

$\therefore$ $\angle P'OP' = \dfrac{\pi}{3}$

由公式 $l=r\theta$ 得兩弧長爲 $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

故其周長爲 $\frac{\pi}{3}(2+\sqrt{3})$

又公共部份之面積爲兩扇形之和，減去三角形 OPO' 面積之兩倍。

但扇形 OPP' 之面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times1^2=\frac{\pi}{3}$

扇形 $O'PP'$ 之面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times(\sqrt{3})^2=\frac{\pi}{2}$

$\triangle OPO'$ 之面積 $=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故公共部份之面積 $=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$

習 題 一

(1) 試將下列諸角的單位，化爲六十分制：

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{2}{3}\pi$ (c) $\frac{5}{6}\pi$ (d) $\frac{4}{3}\pi$ (e) $\frac{11}{6}\pi$

(f) $2n\pi$

(2) 化下列各角的單位爲弧度制：

(a) 12° (b) 56° (c) 135° (d) 225° (e) 5° 37′ 30″

(f) 22.9°

(3) 試以六十分制表出一弧度，又以弧度制表出一度。

(4) 設有一圓，其半徑爲 4 公尺，問其圓心角爲 80° 所對的弧長爲若干?

(5) 月之直徑向地球之角度爲 1868″，月與地球之距離爲 238793 哩，求月之直徑。(月之直徑可視爲弧長)

(6) 順次將 ABC 三角形之角爲單位量，度其餘兩角，並求其和，若三和成等差級數，則原三角成調和級數。

(7) 在三點半時，鐘面長短兩針成何角，以本位弧單位表之。

（8） 分圓周成五段成 A. P.（等差級數），最大者爲最小者之 6 倍，問最小弧對中心角爲幾本位弧？

（9） 若兩正多角形內角之比等于其邊數之比，試求各正多角形之邊數。

（10） 設半徑爲 r 的六個等圓圓心都在他圓周上，且相鄰二圓互相外切，求此六等圓圍成部份的面積。

（11） 已知月球公轉地球一次所需之時間爲 27.4 日，問月球每日之角速度爲若干弳？

（12） 如半徑爲 r 之三個等圓互相外切，求此三圓圍成部份之面積。

習題略解

（1） （a） $90°$ （b） $120°$ （c） $150°$ （d） $240°$ （e） $330°$
（f） $360n°$

（2） （a） $\frac{\pi}{15}$ （b） $\frac{14\pi}{45}$ （c） $\frac{3\pi}{4}$ （d） $\frac{5}{4}\pi$

（e） $5°37'30''=5°+\frac{37°}{60}+\frac{30°}{60\times60}=\frac{45°}{8}$ $\therefore$ $\theta=\frac{45\pi}{8\times180}=\frac{\pi}{32}$

（f） $22.9°=\frac{229\pi}{10\times180}=\frac{229\pi}{1800}$

（3） （一） $D=\frac{180°\times R}{\pi}=\frac{180}{3.1416}=57.29578°=57°17'45''$

（二） $R=\frac{D\pi}{180}=\frac{3.1416}{180}=0.01745$ 徑

（4） 設所求的弧長爲 l 公尺，$80°=\frac{\pi}{180}\times80=\frac{4\pi}{9}$ 弧度

$\therefore$ $l=4\times\frac{4\pi}{9}=5.5850\cdots\cdots\cdots$（公尺）

（5） 月之直徑（弧長）$=238793\times1868\times\frac{\pi}{180\times60\times60}=2162$哩

（6） 此三和爲 $\frac{B}{A}+\frac{C}{A}$，$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}$，$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}$，故

$$\left(\frac{B}{A}+\frac{C}{A}\right)-\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{B}\right)=\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{B}\right)-\left(\frac{A}{C}+\frac{B}{C}\right)$$