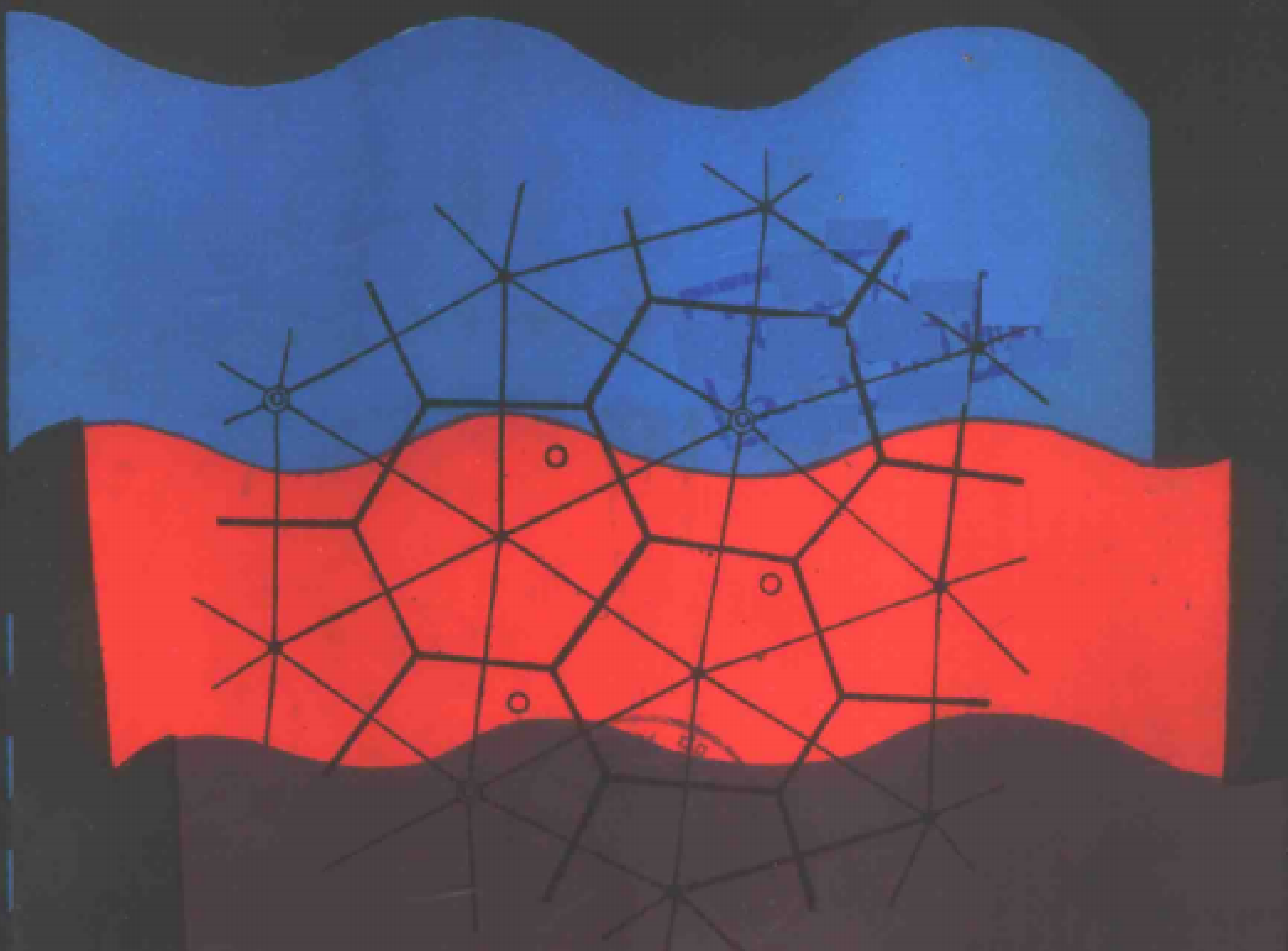
高 等 学 校 教 材

# 地下水流数值模拟

李俊亭 主编



地 质 出 版 社

ISBN 7-116-00515-3/P·440

定　价：　1.60 元

高 等 学 校 教 材

# 地下水流数值模拟

李俊亭　主编

地 质 出 版 社

# 前　言

本书为高等学校水文地质及工程地质专业学生的选修课教材，内容选自作者多年从事本门课程教学的教材。编写时充分考虑到学生数理的实际水平和已掌握的专业知识，以适应学生的承受能力。学完本教材的内容，包括上机实习大约需要40—46学时。本书内容除了满足本专业学生的要求，还适当考虑了从事水文地质工作者的实际需要。

本书重点讨论了有限差分法与有限元法。考虑到在解决水文地质实际计算问题时有限元法与有限差分法没有本质的区别，仅是分析问题的思路稍有差异，但有限差分法水均衡概念清晰，易学易懂，因此本书突出了有限差分的基本概念和不规则网格有限差分法的理论与实际应用。为了拓宽学生的知识面，介绍了含水层系统识别方面的一些基本内容，这对学生今后进一步深入研究是有益的。

本书的第一章、第二章及第四章由西安地质学院李俊亭与成都地质学院林士贵编写，第三章由长春地质学院邹立芝编写。全书由李俊亭主编完成。地下水流数值模拟计算通过计算机来完成，西安地质学院和长春地质学院备有BASIC语言程序和FORTRAN语言程序，需要者可向两院索取。

本书的编写，得到杨成田、卫中鼎、刘金山、王家昌、王愈吉等老师的关心和支持，特别是卫中鼎教授详细审阅了全部书稿，提出许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

编写这本教材，数易其稿，但由于编者水平所限，一定会存在许多不妥之处，我们怀着感激的心情接受读者的批评指正。

编者

1988年2月

# 目　　录

# 第一章 绪 论

## 第一节 研究地下水运动的主要方法

研究地下水运动的主要方法可概括为数学模型法与物理模型法。

1．数学模型法

采用数学模型法研究地下水运动规律，首先要把复杂的实际水文地质条件概化为水文地质模型。这个模型一方面对实际地下水流状态具有较高的仿真度，另一方面能够用已知的数学工具进行定量描述。定量描述的结果就构成了水文地质模型的数学模型。对此模型求解，用其解表征研究区域地下水的运动规律。但这个解能否用来表征研究区域地下水运动的规律，关键在于水文地质模型的建立，而数学模型是第二位的。至于数学模型的解算，则纯属于计算方法的问题。当然，计算方法的解决也不能脱离水文地质模型本身的要求，因此一个水文地质计算工作者研究水文地质模型至关重要。

对于同一个水文地质模型，可根据生产实际的不同要求，建立不同类型的数学模型。数学模型一般可分为以下几类：

（1）线性模型与非线性模型

这是根据模型中变量的阶次来划分的。若模型是由线性微分方程（或线性积分方程、线性代数方程）与线性定解条件组成，则称为线性模型，否则称为非线性模型。在地下水饱和流的计算中，一般描述承压水的模型，大都属于线性模型，而描述潜水的则属于非线性模型。只有在某种近似意义下，才把潜水的数学模型视为线性模型。

（2）静态模型与动态模型

这是按模型中的变量是否与时间有关而划分的。若模型中的变量与时间无关，则称为静态模型或静模型，否则称为动态模型或动模型。在地下水饱和流计算中，稳定流的模型属静态模型，而非稳定流的模型则属于动态模型。

（3）集中参数模型与分布参数模型

这是根据模型中是否含有空间（坐标）变量来划分的。若模型中不包含空间变量就称为集中参数模型，否则称为分布参数模型。比如《地下水动力学》中的裘布依模型、泰斯模型、纽曼模型等，都属于分布参数模型；而利用最小二乘法配置的井涌水量与降深之间的经验公式，比如$S=AQ+BQ^2$，则属于集中参数模型。

（4）确定性模型与随机模型

这是根据模型中变量的取值性质来划分的。如果模型中的变量只能取确定的值，则称为确定性模型；当模型中的变量只知其取值的概率，则这类模型称为随机模型。随机模型近年来发展很快，美国在地质学未来十年发展预测中，把随机模型做为一个重要研究方向。

（5）黑箱模型与白箱模型

这是根据模型本身所描述的对象不同而划分的。如果模型只研究实体与外界的信息交换情况，而不研究实体内部的性质与结构，这样的模型称为黑箱模型。如对一个泉域，若不研究泉域含水层的性质与结构，而仅为研究泉域的降雨补给量与泉排泄量之间关系而建立的数学模型就是黑箱模型。对一个泉域，不仅研究其交换条件与规律，而且还要研究其赋存规律，由此而建立起来的模型称为白箱模型。

2．物理模型法

采用物理模型法研究地下水的运动规律，首先要将复杂的水文地质条件概化为简单的水文地质模型，与数学模型法不同之处是，物理模型法是采用相似的物理模型去比拟水文地质模型，通过研究物理模型来认识地下水流的运动规律。例如电模拟法等。

在电子数字计算机问世前及问世而未被广泛应用的时候，物理模拟法成为研究地下水流运动规律的重要方法。但随着数学工具的发展及电子计算机的广泛应用，数学模型法得到了迅速的发展，在研究地下水流运动规律中已占据了统治地位。所谓数学模型法，概括地讲就是通过求数学模型的解来达到研究地下水运动的目的。

地下水流模型的求解方法

1．解析法

解析法就是用数学上的积分法或积分变换等方法直接求数学模型的解，其解称为解析解，它是数学模型的精确解。在《地下水动力学》中学到的裘布依公式、泰斯公式、雅可布公式等都是求相应数学模型的解析解。这种解的最大优点是把表征地下水运动规律的变量与激发条件、时空变化包含在一个表达式内，这样就便于分析地下水运动规律。正如在本章第四节将要讲到的，由于地下水运动的交换条件、赋存条件极为复杂，大大制约了解析解的应用。

2．数值模拟法

数值模拟法就是在电子计算机上用离散化的方法解数学模型，简称为数值法。求得的解为数值解，其解为数值的集合，它是数学模型的近似解。由于数值模拟法可以较好地反映复杂条件下的地下水流状态，具有较高的仿真度，因此在理论和实际应用方面都发展较快。特别是70年代以来，随着微型计算机的出现，数值法的发展和应用已越来越深入广泛了。数值法的研究已从单一含水层到多层含水层，从二维流到三维流，从水量到水质，从饱和流到非饱和流，且已成为当前地下水资源评价中的重要方法，也是本书要研究的主要内容。

## 第二节　地下水运动的基本定律

地下水的运动虽然错综复杂，但它总是服从两条基本原理：质量守恒原理和能量守恒及转换定律。质量守恒原理是客观世界的普遍规律，具体应用到地下水领域中称为水均衡原理。在研究地下水运动时，反映能量守恒及转换定律是由实验而得的经验公式——达西定律。

1．水均衡原理

在地下水资源评价中，经常要建立以地下水盆地为单元的水均衡，它包括上游断面的流入量、下游断面的流出量、垂直入渗与蒸发、抽水与回灌（注水）、盆地内因地下水位

变化而引起的贮存量的增减量等。这些量可概括为两类：地下水的收支量与积累（贮存量的增加或减少）量。收入大于支出，贮存量就增加；反之则减少。因此水均衡原理可概括为

流入量－流出量＝贮存量的变化量 (1—1)

在天然的含水层中，由于地下水的温度变幅甚小，地下水的密度变化不大，因此在绝大多数情况下，可以用体积守恒近似代替质量守恒，即用

流入水量的体积－流出水量的体积＝贮存水量体积的变化量 (1—1)′

代替式（1—1）。

2．达西定律

如以 $Q$ 表示地下水流量，$K$ 表示含水层渗透系数，地下水流在渗流途径长度 $l$ 上水头变化 $\Delta H$，则达西定律为

$$Q=K\cdot\frac{\Delta H}{l}\cdot A \tag{1—2}$$

$A$ 为地下水流的过水断面的面积。现在来分析一下式（1—2）的能量意义。

若以 $\gamma$ 表示地下水的重率，$p$ 代表地下水流在某点处的静水压力，$z$ 表示某点所处的位置高度，$u$ 代表地下水实际流速，$g$ 代表重力加速度，于是可写出伯努里方程

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}+z=\text{const}\ （常数）$$

地下水流的实际流速甚小，$\frac{u^2}{2g}$ 可忽略不计，因此，伯努里方程可简化为

$$\frac{p}{\gamma}+z=\text{const}$$

由于水的重率近似等于1，因此含水层中某一点的静水压力水头可以用该点以上的地下水水柱高度来表示。含水层中某一点上压力水头与标高 $z$ 之和实际上就是该点所测得的地下水水位。由此可知，含水层中任一点地下水能量的大小，可以用该点的水头 $H$ 来表示。由于含水层的孔隙很小，水又具有粘滞性，因此地下水在含水层中运动时受到的阻力是很大的，在运动中要不断克服摩擦阻力作功，从而消耗能量。于是代表能量的地下水水头就要不断减少。达西定律恰好说明水头损失（即能量损失）与渗透速度（$Q/A=q$）及渗流途径长度（$l$）成正比。当渗流途径取微元时，即得达西定律的微分表达式

$$q=K\cdot\text{grad}H \tag{1—3}$$

鉴于达西定律的重要性，下面将从更为一般的情形研究达西定律的表达式。为了方便，以二维流为例，但所得结论可直接推广至三维流。

设地下水流为 $\overrightarrow{oq}$ 方向（图1—1），含水层为各向异性，主渗方向分别为 $\overrightarrow{o\xi}$ 与 $\overrightarrow{o\eta}$，渗透系数分别为 $K_{\xi\xi}$ 与 $K_{\eta\eta}$，计算参考系为 $\{o—xy\}$。由达西定律可得：

$$q_\xi=-K_{\xi\xi}\frac{\partial H}{\partial\xi}$$

$$q_\eta=-K_{\eta\eta}\frac{\partial H}{\partial\eta}$$

对计算参考系来讲，则有

$$q_x = q_\xi \cos\alpha + q_\eta \sin\alpha$$
$$q_y = q_\eta \cos\alpha - q_\xi \sin\alpha$$

进一步写成

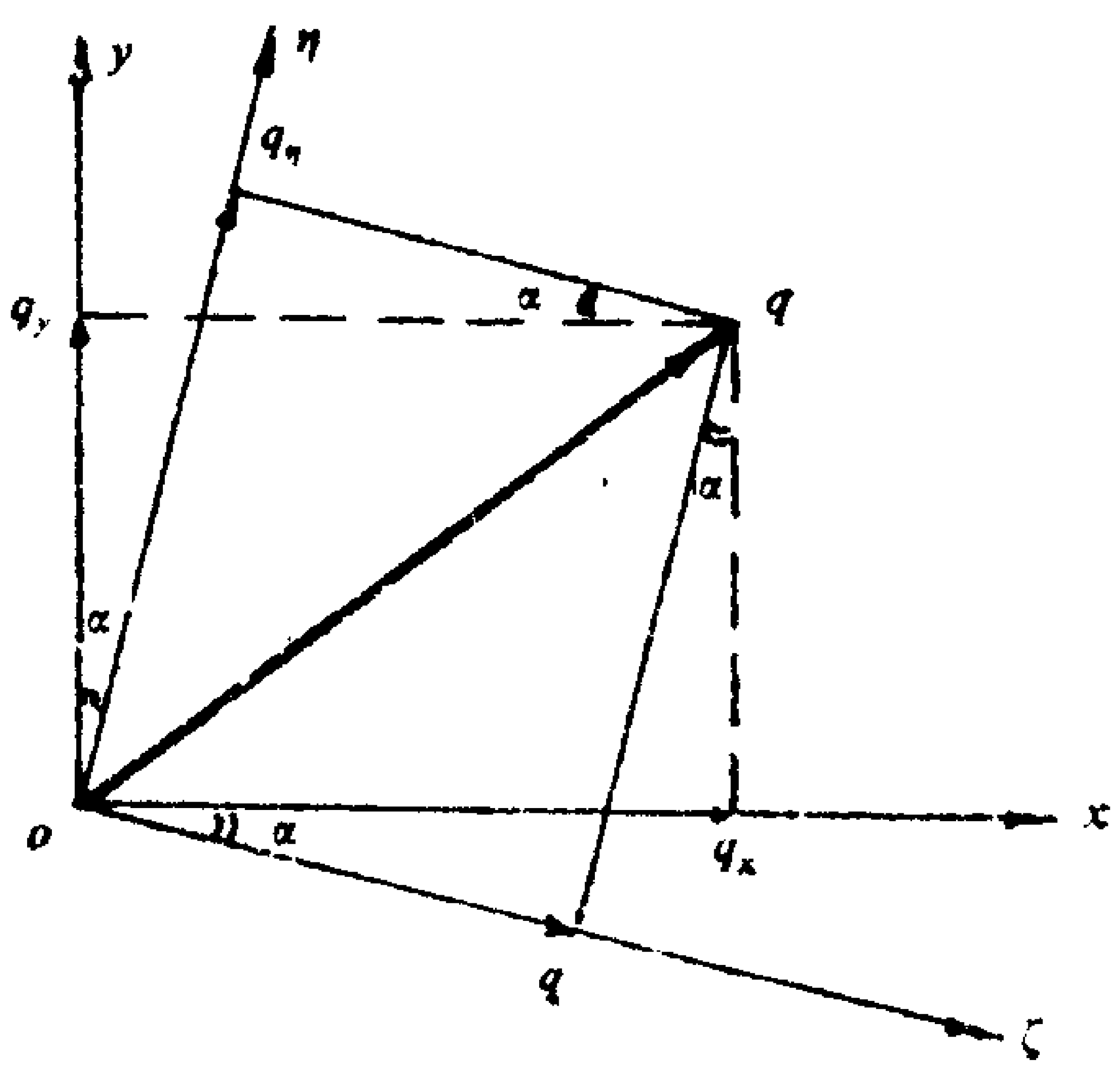



图 1—1

$$\begin{cases} q_x = -K_{\xi\xi}\dfrac{\partial H}{\partial \xi}\cos\alpha - K_{\eta\eta}\dfrac{\partial H}{\partial \eta}\sin\alpha \\ q_y = -K_{\eta\eta}\dfrac{\partial H}{\partial \eta}\cos\alpha + K_{\xi\xi}\dfrac{\partial H}{\partial \xi}\sin\alpha \end{cases} \tag{1—4}$$

根据导数的概念可知

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

于是可得

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\partial H}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial H}{\partial y}\sin\alpha$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial H}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial H}{\partial y}\cos\alpha$$

将其代入式（1—4）中则有

$$q_x = -\frac{\partial H}{\partial x}(K_{\xi\xi}\cos^2\alpha + K_{\eta\eta}\sin^2\alpha)$$
$$-\frac{\partial H}{\partial y}(K_{\eta\eta} - K_{\xi\xi})\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

若令

$$K_{xx} = K_{\xi\xi}\cos^2\alpha + K_{\eta\eta}\sin^2\alpha$$
$$K_{xy} = (K_{\eta\eta} - K_{\xi\xi})\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

进一步简化可得

$$K_{xx} = \frac{1}{2}(K_{\xi\xi} + K_{\eta\eta}) + \frac{1}{2}(K_{\xi\xi} - K_{\eta\eta})\cdot\cos2\alpha$$

于是

$$q_x = -K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x} - K_{xy}\frac{\partial H}{\partial y}$$

同理可求得

$$q_y = -K_{yx}\frac{\partial H}{\partial x} - K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}$$

其中

$$K_{yx} = K_{xy}$$
$$K_{yy} = \frac{1}{2}(K_{\xi\xi} + K_{\eta\eta}) + \frac{1}{2}(K_{\eta\eta} - K_{\xi\xi})\cdot\cos2\alpha$$

按照向量的概念，渗透速度$\boldsymbol{q}$可写成

$$q=\begin{Bmatrix} q_x \\ \\ q_y \end{Bmatrix}=-\begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{1—5}$$

令

$$K=\begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} \tag{1—6}$$

则$K$为一对称矩阵，定义为渗透系数张量。只有当 $\alpha=0$ 时，即计算参考系与实际的主渗方向相一致时，才有 $K_{xy}=K_{yx}=0$，于是

$$q=-\begin{pmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} \end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix} K_{xx}\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ K_{yy}\dfrac{\partial H}{\partial y} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} q_x \\ \\ q_y \end{Bmatrix}$$

由上述分析可知，对于各向异性的含水层，达西定律的一般形式应写成

$$q=-\underset{\sim}{K}\cdot \mathrm{grad}H \tag{1—7}$$

且只有在计算参考系的坐标轴与实际主渗方向一致时，达西定律才能具有通常意义下的数量表达形式。在数值模拟计算中，要特别注意这一点，否则会造成计算上的麻烦。至于在数值模拟计算中如何处理这些问题，在以后的章节中将要讨论。

## 第三节　地下水流的解析解及其应用的局限性

《地下水动力学》的全部内容，都在于研究根据概化的水文地质模型如何建立其数学模型并求其解析解（分析解）。由于解析解可以将描述地下水运动的各种物理量，例如水头（或降深）、水量及各种参数反映在一个表达式中，这样就能用数学分析的方法去研究各个量之间相互联系与相互制约的内在规律。因此，解析解是十分有用的。但由于自然界地下水流运动状态十分复杂，往往与解析解的条件要求相差甚远，致使它的应用受到了极大的限制。

1．难以适应复杂的水文地质几何边界

地下水流的解析解中有两个基本模型，这就是读者已熟知的模型

$$(\mathrm{I})\begin{cases} T\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H}{\partial r}\right)=S\dfrac{\partial H}{\partial t} & t>0,\ r>0 \\ H(r,\ t)=H_0 & t=0,\ r>0 \\ H(r,\ t)=H_0 & t>0,\ r\to\infty \\ \lim\limits_{r\to 0}\left(r\dfrac{\partial H}{\partial r}\right)=\dfrac{Q}{2\pi T}\ (\text{常量}) & t>0 \end{cases}$$

与模型

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}
T\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H}{\partial r}\right)=S\dfrac{\partial H}{\partial t} & t>0,\ 0<r<R \\
H(r,\ t)=H_0 & t=0,\ 0\leqslant r\leqslant R \\
H(r,\ t)=H_0 & t>0,\ r=R \\
\lim\limits_{r\to 0}\left(r\dfrac{\partial H}{\partial r}\right)=\dfrac{Q}{2\pi T}\ (\text{常量}) & t>0
\end{cases}
$$

前一个模型的解为

$$H=H_0-\frac{Q}{4\pi T}\int_u^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du \tag{1—8}$$

其中

$$\int_u^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du=-0.577216-\ln u+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}u^n}{n\cdot n!}=W(u)$$

而后一个模型的解为

$$H=H_0-\frac{Q}{2\pi T}\left[\ln\frac{R}{r}-2W(\bar{r},\ \bar{t})\right] \tag{1—9}$$

其中

$$\bar{r}=\frac{r}{R}$$

$$\bar{t}=\frac{Tt}{SR^2}$$

式（1—8）称为承压非稳定流的泰斯公式，它的近似式为雅各布公式。式（1—9）当$t$足够大时，可获得计算井壁水位的承压稳定流裘布依公式

$$H_w=H_0-\frac{0.366Q}{T}\lg\frac{R}{r_w} \tag{1—10}$$

由上述所给模型可知，式（1—8）适合于无限大定水头补给边界，式（1—9）或式（1—10）则适合于具有圆形（半径为$R$）的定水头补给边界。但在自然界很难找到无限大的定水头补给边界，也难于找到具有半径为$R$的圆形定水头补给边界，而实际的几何边界总是介于二者之间，此时前述两个模型则无法求得解析解。对于有界的含水层，由于前述两个模型都是线性的，因此可以利用叠加原理（即反映法）求解。但在自然条件下也很难找到严格的直线隔水边界、直线供水边界及对扇形含水层应用叠加原理所需要的边界夹角。实际中的水文地质问题，虽然经过一定的概化可以应用式（1—8）、式（1—9）或式（1—10），但大多数的实际水文地质条件将被严重歪曲。因此，对于复杂的几何边界，难以应用解析解。

以上是针对承压含水层而言的。对于潜水含水层，由于基本偏微分方程的非线性，不仅难于适应复杂的水文地质几何边界，而且不作更多的概化，连叠加原理也无法应用。

2．难以描述含水层的非均质性

由于地质环境的变化，自然界的含水层几乎都是非均质的。此时的数学模型，比如（Ⅰ）的基本偏微分方程应写成

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(T\frac{\partial H}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}T\frac{\partial H}{\partial r}=S\frac{\partial H}{\partial r}$$

或者写成

$$T\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\frac{\partial H}{\partial r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{T}{r}\cdot\frac{\partial H}{\partial r}=S\frac{\partial H}{\partial r} \tag{1—11}$$

由于$\frac{\partial T}{\partial r}$的存在，不论是（Ⅰ）的定解条件还是（Ⅱ）的定解条件都无法求得式(1—11)的解析解。

3．难以处理含水层中的线状补给及局部的面状补给

在潜水含水层中，渠道及河流入渗补给（河流与地下水位脱节）可以构成线状补给源；地表水体（湖泊、池塘等）的淋滤式补给及部分地段的渠（井）灌回归水量等都可以构成局部面状补给。在有越流的承压含水层中，由于弱透水层的不稳定与非均质性，也可以构成对目的含水层的线状补给或面状补给。不论何种情形，都将导致在描述地下水运动规律的基本偏微分方程中增加一项关于空间变量与时间（也可以与时间无关）的源汇项。即使定解条件取得非常典型，也难以求得此类水文地质问题的解析解。当然，现有典型模型的解析解也无法用来描述此类复杂条件下地下水的运动规律。

4．难以克服含水层不同地段的各向异性

在研究区域内，如果含水层的主渗方向保持不变，只要将计算参考系的坐标轴选取得与含水层主渗方向相一致，在简单的定解条件下，解析解还是可以求得的。在实际中，由于河流变迁及地质作用，往往在研究区内致使主渗方向随着空间变化。由于解析解要求在一个研究区内只能选择一个计算参考系，因此无法建立描述与空间变量有关的各向异性含水层中地下水运动规律的数学模型。

实际上的水文地质模型要复杂得多，不仅边界条件几何形状复杂，而且物理性质也很复杂（既非单一的定水头边界，也非单一的流量边界，而是交替出现或者是二者的某种组合，比如线性组合）。就含水层本身来讲，既是非均质的，也可以是各向异性的；就源汇来讲可以是线状的，也可以是局部面状的，还可以是二者同时存在。因此，用简单模型的解析解表征复杂条件下地下水的运动规律，其仿真度是很低的。由于这些原因，随着电子数字计算机的发展，数值模拟方法在研究地下水运动规律中得到了广泛的应用，尤其在解决复杂条件下的水文地质问题中，充分显示了数值模拟方法的灵活性与高仿真度。

## 第四节　数　值　模　拟

上节已经指出，只有在一些简单的特殊情况下才能求得地下水流数学模型的解析解。而在解决复杂水文地质问题时，就必须借助于数值模拟方法以求其近似解，或称为数值解。离散化方法就是各种分布参数模型数值解的基本方法。

1．离散化方法

下面通过一个例子说明离散化方法的实质。

假定研究的问题是求一具有均匀垂直补给的矩形区域的入渗补给量，如图1—2所示。设入渗补给量为$Q_渗$，则有

$$Q_渗=\epsilon ab$$

$\epsilon$为入渗强度。

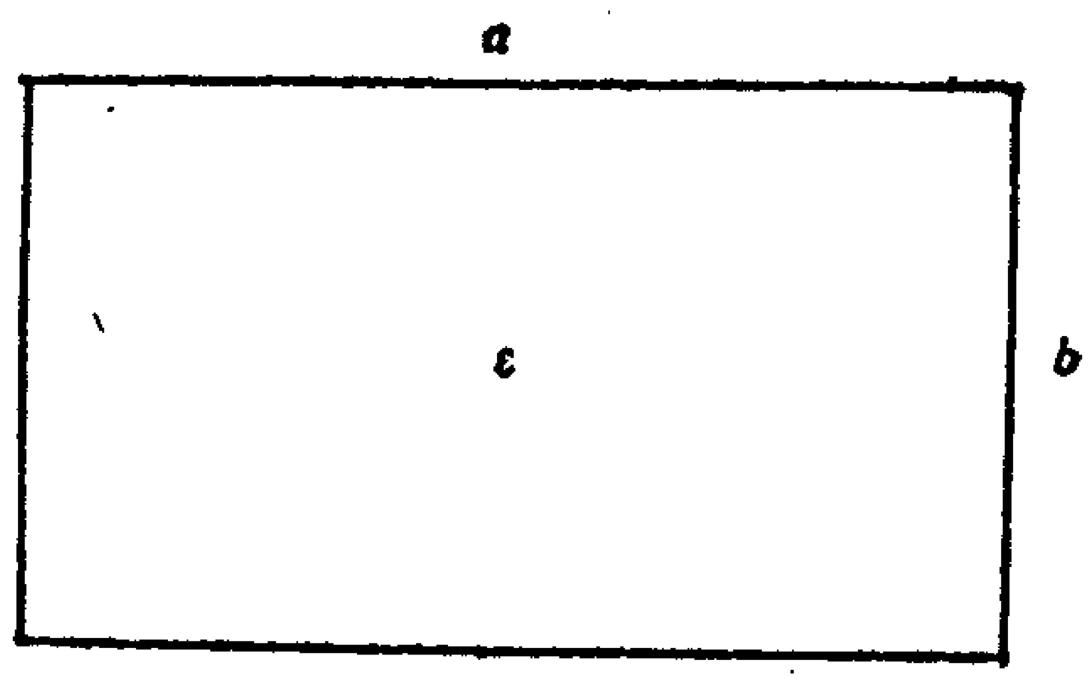



图 1—2

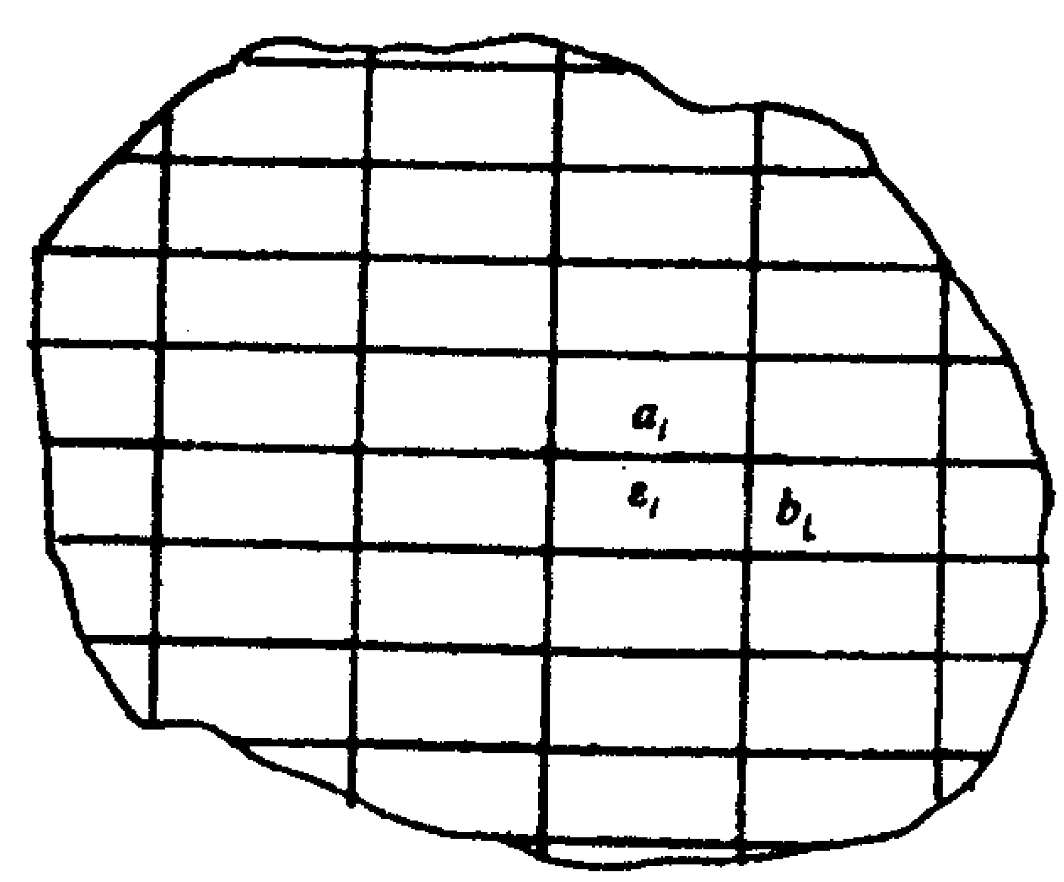



图 1—3

如果问题更复杂一些，比如入渗强度为$\varepsilon(x, y)$，且区域是极不规则的（图1—3），上式将无法应用。对于这样的问题可采用近似的方法处理。做法是用相互正交的直线组将研究区域分成几个小域。只要小域足够小，就可以近似地认为在小域上垂向入渗量为常数。第 $i$ 个小域的面积若记为$a_ib_i$，入渗量记为 $\varepsilon_i$（常量），则全域的垂向入渗补给量可用公式

$$Q_{渗}=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i b_i$$

来计算。

很显然，小区分得越小，其结果越精确。象这种把整体剖分成若干个小区域（或称为小单元），化整为零，经过近似处理后，再积零为整的方法，就称为离散化的方法。

以上是通过一个简单的例子说明离散化的一般方法，但将该法应用于求解地下水流的数学模型，情况要复杂得多，也是本书今后要讨论的主要内容。

2．用离散化方法求解地下水流数学模型的步骤

利用上述离散化的方法求解地下水流模型时，可按以下步骤进行。

（1）将整个研究区域，按照一定的模式进行剖分以形成若干个小单元。对于非稳定流，也要将计算时间按照一定的要求分成若干个小时段。

（2）一个小单元可以看作是一个地下水的小均衡域。之后，再按照一定的模式在小单元上定义一个特征点，这个特征点上的各种物理量，比如水头、渗透系数、给水度、贮水系数、垂向入渗系数、越流系数等作为小单元的代表值。特征点通常称为结点、节点或点元。

（3）在剖分的基础上，从描述地下水运动的基本微分方程出发，通过离散化的方法，建立一个小时段内结点之间制约各种物理量的关系式，这种关系式一般表现为代数方程。

（4）利用定解条件，建立在一个小时段内处于边界上的点元与内部点元间的关系式，这种关系式一般也表现为代数方程。

（5）求解由上述两步构成的方程组，这个方程组一般表现为含有水头的封闭线性方程组。通过求解这个方程组，就可得到某一时刻渗流区域上水头的集合{H}。集合{H}就是渗流区域上某一时刻地下水流场的近似解。小单元剖分得越小，{H}的仿真度越高。

（6）若拟计算下一时刻的水头集合{H}，再重复3、4、5几步即可。

由于建立封闭线性方程组的方法不同，也就产生了各种离散化的方法。本书将重点讨论有限差分法与有限元法。

# 第二章 有限差分法

## 第一节 基本概念

以连续性原理（质量守恒）与达西定律（能量转换）为基础，对任何复杂的地下水流系统都可以建立其相应的数学模型（支配地下水运动的微分方程及决定其解的初、边值条件）。但数学模型（定解问题）怎样求解，常取决于地下水流系统水文地质条件能够概化的程度。一般地讲，只有当渗流区域的几何形状比较简单且含水层为均质的才能获得其解析解。对于一个复杂的地下水盆地，大均衡有助于弄清地下水资源的总量，无疑是十分有用的，但其计算结果却不能反映出地下水盆地流场分布及任一点水头随时间的变化规律。有限差分法（也包括有限元法）在某种近似程度上，是一种能够解决非均质、各向异性及复杂几何边界的地下水流系统的模拟问题，而且计算起来又十分简便。尤其自60年代以来，由于电子数字计算机的应用，使得有限差分法在地下水流系统的资源计算中，得到了迅速发展与广泛应用。

### 一、离散化

有限差分法解地下水流系统的实质，是把要研究的渗流区域（一个地下水盆地或是含水层的某一部份）按一定的方式剖分（离散）成许多但有限的小均衡域。在一定的精度要求下，每个小均衡域内各种参数视为常数，小均衡域内的水头以其中心的水头为其代表，相邻小均衡域间的水头变化近似看作是线性的。把所要研究的渗流区域按一定方式剖分成许多但有限的小均衡域称为对渗流区域的离散化。若以二维渗流区域为例，最简单的剖分是用两组相互正交的平行线把渗流区域剖分成许多矩形小均衡域（图2—1）。在剖分时约定：第一类边界从小均衡域的中心经过；第二类边界与小均衡域的边界重合。小均衡域的中心叫节点或结点，可用适当的方法标定小均衡域及相应节点的编号。习惯作法是，将横向的网格叫行，另一个方向叫列，行与列均顺序编号。于是位于第$j$行与第$i$列相交处的小均衡域及节点统一记为$(i, j)$。沿行与列的网格格距用$\Delta x$、$\Delta y$表示，叫空间步长。对于二维非稳定流来讲，可取第三个坐标为$t$，不妨令其指向自书面向上，若以$\Delta t$表示时间间隔，将二维网格按$\Delta t$向上重复而形成一个三维网格系，此时的小均衡域为一立方体，位于第m层的小均衡域及节点统一记为$(i, j, m)$。

有限差分法所要计算的是$(i, j)$或$(i, j, m)$的近似值，而不是要计算出地下水流系统解析表达式的值（它代表问题的精确解）。换句话讲，有限差分法在于求出地下水流系统离散点$(i, j)$或$(i, j, m)$上的近似值$u_{i,j}$或$u_{i,j,m}$的集合$\{u\}$，而不是精确解$H(x, y, t)$。$\{u\}$与H是有差别的，这种差别不仅取决于计算方法本身的精度，还取决于空间步长$\Delta x$、$\Delta y$及时间步长$\Delta t$的选择。究竟采用多大的空间步长及时间步长才能达到一定的精确度，通常是以直观和经验为基础的，这是因为在实际工作中进行误差估计是难以办到的（当然在理论上是可以做到的）。如果在计算前无法确定出合理的空间步长与时间

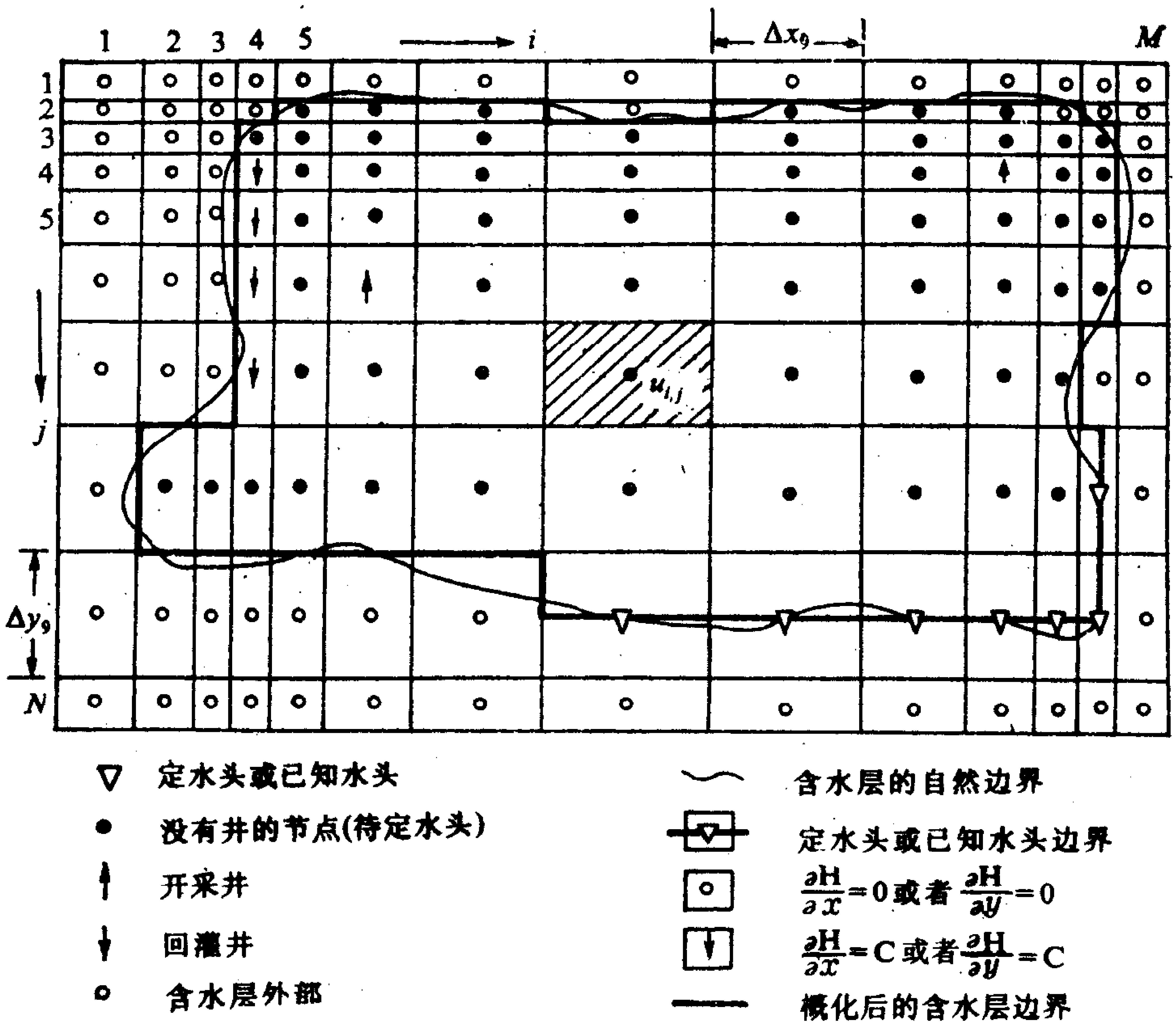



图 2—1

步长，不妨先采用两套不同网格（其中一套是另一套的加密）分别计算其相应节点上的近似解，且比较相同离散点上的值。假若两种网格点近似值之差是计算要求所允许的，那就表明所选网格与时间步长是合适的，否则应加密网格或缩短时间步长，直到满足要求为止。

## 二、地下水流的有限差分方程

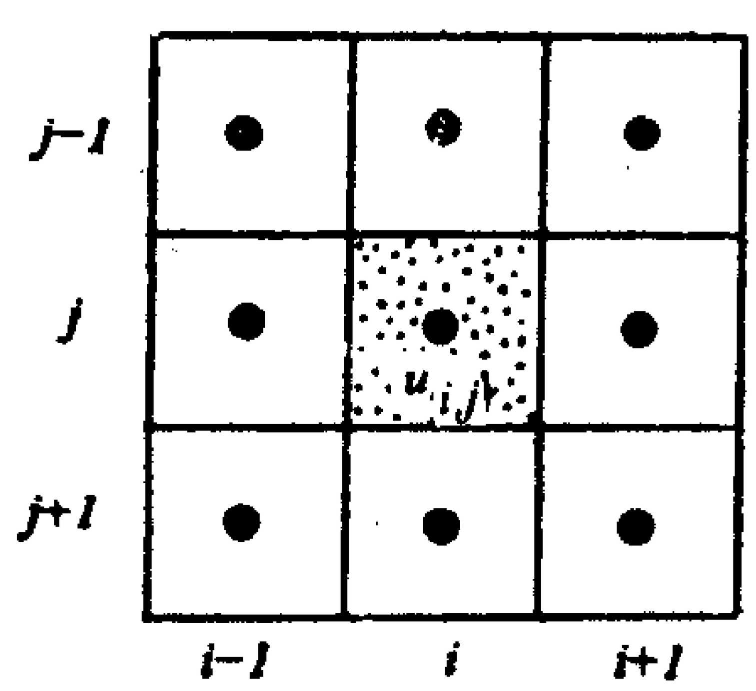



图 2—2

现从图2—1中取出一个小均衡域如图 2—2 所示。在不影响弄清基本概念的前提下再做如下假定：(1) 地下水流为承压的；(2) 小均衡域除侧向径流外，无其它流量交换；(3) 网格沿行及列分别为等距的，但行距与列距可以不等，且分别记为 $\Delta x$ 与 $\Delta y$；(4) 离散点上的近似水头值以 $u$ 表示。根据达西定律可算得小均衡域 $(i,\ j)$ 在某瞬时的四个侧向径流量分别为

沿右侧流入： $$K_{i+\frac{1}{2},j}\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}\Delta y\cdot M_{i+\frac{1}{2},j}$$

沿左侧流入： $$K_{i-\frac{1}{2},j}\frac{u_{i-1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}\Delta y\cdot M_{i-\frac{1}{2},j}$$

另外两个方向的侧向流入量分别为$K_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta y}\Delta x\cdot M_{i,j+\frac{1}{2}}$

及 $K_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j-1}-u_{i,j}}{\Delta y}\Delta x\cdot M_{i,j-\frac{1}{2}}$

其中$K$、$M$分别表示小均衡域边界上的渗透系数与含水层厚度的平均值，其乘积为导水系数$T$。于是某瞬时流入小均衡域的总侧向径流量$Q_t$为：

$$Q_t=T_{i+\frac{1}{2},j}\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}\Delta y+T_{i-\frac{1}{2},j}\frac{u_{i-1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}\Delta y$$

$$+T_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta y}\Delta x+T_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j-1}-u_{i,j}}{\Delta y}\Delta x$$

假定包含某瞬时在内的$\Delta t$时段内，由于$Q_t$的存在，小均衡域的水头抬高$\Delta u$，相当于贮存量的增加值$Q_s$为

$$Q_s=S_{i,j}\frac{\Delta u_{i,j}}{\Delta t}\Delta x\Delta y$$

其中$S_{i,j}$为小均衡域（$i$，$j$）的贮水系数。

根据质量守恒（由于在常温条件下地下水的密度可近似为1，所以质量守恒也可以看作是体积守恒）应有$Q_t\approx Q_s$，于是可得连续性方程的近似式

$$S_{i,j}\frac{\Delta u_{i,j}}{\Delta t}\approx T_{i+\frac{1}{2},j}\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{(\Delta x)^2}+T_{i-\frac{1}{2},j}\frac{u_{i-1,j}-u_{i,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$+T_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j-1}-u_{i,j}}{(\Delta y)^2}+T_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{(\Delta y)^2} \tag{2—1}$$

此式称为非均质各向异性的承压含水层二维非稳定流有限差分方程的基本形式。

显然，当$\Delta x\to 0$、$\Delta y\to 0$及$\Delta t\to 0$时，离散点上地下水头的近似值$u$将趋近于真实值$H$，于是得

$$S\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\right) \tag{2—2}$$

这是非均质各向异性承压含水层二维非稳定流的基本偏微分方程。

由此可以看出，有限差分方程实际上是基本偏微分方程的近似表达式，其近似的程度可通过泰勒级数来加以研究。由于地下水头曲面一般来说是连续而光滑的，于是在剖分网格中根据泰勒公式可以写出

$$H_{i+1,j}=H_{i,j}+\Delta x\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{i,j}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_{i,j}+\cdots+\frac{(\Delta x)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n H}{\partial x^n}\right)_{i,j}+\cdots \tag{2—3}$$

$$H_{i-1,j}=H_{i,j}-\Delta x\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{i,j}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_{i,j}+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{(\Delta x)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n H}{\partial x^n}\right)_{i,j}+\cdots \tag{2—4}$$

由式（2—3）可得

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{i,j}=\frac{H_{i+1,j}-H_{i,j}}{\Delta x}+o(\Delta x) \tag{2—5}$$