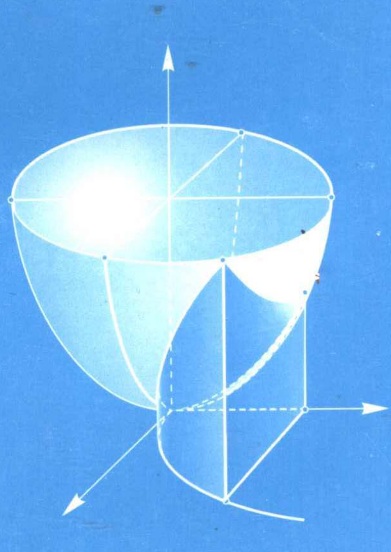
高等学校教学用书

高等数学自考辅导

盛　骤　吴迪光　编



浙江大學出版社

高等数学自考辅导

632

高等学校教学用书

高等数学自考辅导

盛　骤　吴迪光　编

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学自考辅导/盛骤等编.—杭州:浙江大学出版社,2000.6
ISBN 7-308-02285-4

Ⅰ.高... Ⅱ.盛... Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ.013-42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 16864 号

高等学校教学用书

高等数学自考辅导

盛 骤 吴迪光 编

责任编辑 李玲如

* * *

浙江大学出版社出版发行

(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)

(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)

浙江大学出版社电脑排版中心排版

浙江大学玉泉校区印刷厂印刷

浙江省新华书店经销

* * *

850mm×1168mm 32 开 9.5 印张 256 千字

2000 年 6 月第 1 版 2000 年 6 月第 1 次印刷

印数:0001--5000

ISBN 7-308-02285-4/O·243 定价:10.00 元

前　　言

本书旨在帮助读者掌握高等数学的基本内容和解题方法，帮助读者提高学习效率．

全书共十二章，内容包括一元函数的微分学和积分学，多元函数的微分学和积分学、向量代数与空间解析几何、微分方程和无穷级数、傅里叶级数．每章包括三个部分：1. 内容提要，旨在读者复习时，使于读者提纲挈领地掌握课程内容．2. 例题，通过典型例题，指导读者解题，帮助读者掌握解题步骤与方法，指出易犯的错误并究其原因，澄清不正确的想法、做法，帮助读者加深对于基本概念的理解，提高解题的正确率．3. 练习题和自检题，题量不多，但覆盖了全部基本内容．通过解这些练习题，使读者熟悉基本解题方法，并通过自检题的练习，使读者能自我评价对内容的掌握程度，以增强学习效果．

本书适宜于参加高等数学课程自学考试的读者使用，也可供广大自学高等数学的读者使用．

我们诚恳希望读者提出意见．

编　者

2000 年 3 月

目　　录

第一章　函数

一、内容提要

1. 函数概念

设 A 是非空的实数集，若存在一个法则，按照它，对于每一个实数 $x \in A$，都有确定的实数 y 与之对应，则称 **y 是 x 的函数**，记为

$$y = f(x), \quad x \in A$$

实数集 A 叫做函数的**定义域**，x 叫**自变量**，y 也叫**因变量**，y 与 x 的对应关系叫做**函数关系**．

在我们所讨论的函数中，若对于自变量在定义域中的每一个值，函数只有一个确定值与之对应，这种函数叫做**单值函数**．如果多于一个值与之对应，则叫做**多值函数**．

函数 $y = f(x)$ 在 $x = a \in A$ 处的值记为 $f(a)$，简称**函数值**，有时也用记号 $y|_{x=a}$ 来表示．对于函数 $y = f(x)$ 定义域中每一个 x 的值都有 y 的确定的值与之对应，所有这些 y 值所成的集合叫做函数 $y = f(x)$ 的**值域**．

在平面直角坐标系 xOy 中，凡坐标满足方程 $y - f(x) = 0$，$x \in A$ 的点 (x,y) 的集合 $\{(x,y) | y = f(x), x \in A\}$ 称为**函数 $y = f(x)$ 的图形**．

2. 分段函数

在函数的定义域内,用两个或两个以上的数学式分段表示的函数,叫做**分段函数**. 例如

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

便是一个分段函数,定义域是$(-\infty, +\infty)$,对应关系是:当 $x > 0$ 时,$y = 1$;当 $x = 0$ 时,$y = 0$;当 $x < 0$ 时,$y = -1$.

3. 反函数

在函数的定义中,按关系式

$$y = f(x), \quad x \in A, y \in B \tag{1.1}$$

x 是自变量,y 是因变量(函数). 在关系式 $y = f(x)$ 中,反过来,将 y 看成自变量,x 看成因变量(函数),即对每一个 $y \in B$,按 $y = f(x)$ 都有确定的 x 值与之对应,称 **x 是 y 的反函数**. 即(1.1) 的反函数. 在求反函数的表达式时,可将(1.1) 中的关系式 $y = f(x)$ 看成一个方程式,从中将 x 解出,写作

$$x = \varphi(y), \quad y \in B \tag{1.2}$$

这就是反函数的表示式. 习惯上自变量的记号取作 x,故将(1.2) 中 x,y 记号对换(对应关系不变),得

$$y = \varphi(x), \quad x \in B \tag{1.3}$$

它仍是(1.1) 的反函数. 若将 φ 记为 f^{-1},则(1.3) 可写为

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in B \tag{1.4}$$

因此,(1.2)(1.3) 与(1.4) 都是(1.1) 的反函数,只是用作表示的记号不同而已.

例如,$y = 2^x$ 的反函数是 $x = \log_2 y$,或记作 $y = \log_2 x$;若记 $f(x) = 2^x$,其反函数也记作 $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

4. 复合函数

若函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$，且 $u=g(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集为非空集，则变量 y 通过变量 u 与变量 x 建立了对应关系，这个对应关系称为 **y 是 x 的复合函数**，u 是**中间变量**，x 是**自变量**．通常将

$$y=f(u),\quad u=g(x)$$

合并写成

$$y=f[g(x)]$$

5. 初等函数

基本初等函数（常值函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、反三角函数）经过有限次的加、减、乘、除（分母不为零）的四则运算，以及有限次的复合步骤所构成的函数，叫做**初等函数**．

例如　函数　$y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\log_2(2-x)}$ 是一个初等函数．

又如　函数　$y=x^x$，由于 $x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$，因此

$$y=x^x=e^{x\ln x}$$

是由 $y=e^u$，$u=x\ln x$ 复合而成的函数，因而它也是一个初等函数．

二、例题

例 1.1　求下列函数的定义域

(1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(2) $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{4x-x^2}{3}}$

(3) $f(x)=\arcsin\dfrac{x^2+2}{5}$

(4) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<1\\ x+1, & x\geqslant 1\end{cases}$

解 (1) 在$\sqrt{4-x^2}$中,应 $4-x^2\geqslant 0$,$x^2\leqslant 4$,$|x|\leqslant 2$,有 $-2\leqslant x\leqslant 2$;在$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$中,应 $x^2-1>0$,$x^2>1$,$|x|>1$,有 $x<-1$ 或 $x>1$. 因此,取公共部分得 $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域为$[-2,-1)$及$(1,2]$.

(2) 平方根下应非负,即应 $\ln\dfrac{4x-x^2}{3}\geqslant 0$,必须$\dfrac{4x-x^2}{3}\geqslant 1$,整理得$(x-1)(x-3)\leqslant 0$,列表:

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$(x-1)(x-3)$	+	0	−	0	+

知函数 $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{4x-x^2}{3}}$ 的定义域为$[1,3]$.

(3) 对于反正弦函数应有$\left|\dfrac{x^2+2}{5}\right|\leqslant 1$,即应 $|x^2+2|\leqslant 5$,$-5\leqslant x^2+2\leqslant 5$,$-7\leqslant x^2\leqslant 3$,而 $-7\leqslant x^2$ 总成立,故只需要 $x^2\leqslant 3$,得 $|x|\leqslant\sqrt{3}$,亦即 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$. 因此,函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x^2+2}{5}$ 的定义域是$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

(4) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<1\\ x+1, & x\geqslant 1\end{cases}$是分段函数,将各分段表达式给出 x 的变化范围合在一起,即可得该分段函数的定义域. 因此,该分段函数的定义域是$[0,+\infty)$. □

注 1 求函数定义域时,要注意使函数有意义的限制条件:例如

(1) $\sqrt[n]{\varphi(x)}$(n 为偶数),应有 $\varphi(x)\geqslant 0$.

(2) $\dfrac{1}{\log_a\varphi(x)}$ $(a>0,a\neq 1)$,应有 $\varphi(x)>0$ 且 $\varphi(x)\neq 1$.

(3) $\arcsin\varphi(x)$ 或 $\arccos\varphi(x)$，应有 $|\varphi(x)| \leqslant 1$.

(4) $f[\varphi(x)]$. 应有 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集是非空集.

例 1.2 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x < 0 \\ 3, & 0 \leqslant x < 1 \\ \ln(2x-1), & x \geqslant 1 \end{cases}$

求 $f(-3), f(\frac{1}{3}), f(1), f(1+h)$

解 $f(-3) = \sqrt{1-(-3)} = \sqrt{4} = 2, f(\frac{1}{3}) = 3$

$$f(1) = \ln(2 \times 1 - 1) = \ln 1 = 0$$

$$f(1+h) = \begin{cases} \sqrt{1-(1+h)}, & 1+h < 0 \\ 3, & 0 \leqslant 1+h < 1 \\ \ln[2(1+h)-1], & 1+h \geqslant 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{-h}, & h < -1 \\ 3, & -1 \leqslant h < 0 \\ \ln(1+2h), & h \geqslant 0 \end{cases}$$ □

注：应注意分段函数的对应规则，例如本题中，$\frac{1}{3} \in [0,1)$，由题设，按对应规则 $f(\frac{1}{3}) = 3$.

例 1.3 求 $f(x)$，已知

(1) $f(2x-1) = x^2$，(2) $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$

解 (1) 令 $2x - 1 = t$，解出 $x = \frac{1+t}{2}$，由题设，得

$$f(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^2 = \frac{(1+t)^2}{4}$$

由于函数关系与变量的记号无关，将变量的记号 t 换成 x，得所求函数为

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{4}$$

(2) 令$\frac{1}{x}=t$，即$x=\frac{1}{t}(t\neq 0)$，由题设，得

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+(\frac{1}{t})^2}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|}$$

将变量的记号t换成x，得所求函数

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$ □

注：应注意函数关系与变量的记号无关，$f(t)=\frac{(1+t)^2}{4}$与$f(x)=\frac{(1+x)^2}{4}$是同一函数．

例 1.4 设$G(x)=x+\frac{1}{x}$，试证

$$G(x^3)=[G(x)]^3-3[G(x)].$$

解 在$G(x)=x+\frac{1}{x}$中，以x^3代替x，得

$$G(x^3)=x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$$
$$=[G(x)]^3-3[G(x)]$$ □

注：为了证明问题，有时用到代数（或三角）恒等式，这里用到

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

例 1.5 (1) 试设置中间变量，将复合函数$y=\ln\sin\frac{x}{2}$分解成若干个简单函数．

(2) 问将$y=\sqrt{1-u^2}$，$u=x^2+3$复合起来，能否构成一个复合函数？

(3) 问$\sin^2x$与$\sin x^2$的复合关系是否相同？

解 (1) 由内层依次到外层，层层设置中间变量，即令

$$v=\frac{x}{2},\ u=\sin v$$

于是，函数$y=\ln\sin\frac{x}{2}$可写成

$$y = \ln u,\ u = \sin v,\ v = \frac{x}{2}.$$

其中 u,v 是中间变量．

(2) 不能．因 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域为 $|u|\leqslant 1$，而 $u=x^2+3$ 的值域为 $(-\infty,+\infty)$，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，有 $u=x^2+3\geqslant 3$，因而 $y=\sqrt{1-(x^2+3)^2}$ 无意义，故不能构成复合函数．

(3) 由于 $y=\sin^2 x=(\sin x)^2$ 的复合步骤为

$$y=u^2,\ u=\sin x$$

而 $y=\sin x^2$ 的复合步骤为

$$y=\sin u,\ u=x^2$$

它们的复合步骤不相同，这是两个不同的复合函数． □

注：分析复合函数的复合结构，既能拆开，又能合拢．复合时，要认清能复合的条件，因为并不是所有函数都能复合的．同时，还须注意复合的步骤．

例 1.6 (1) 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f[f(x)]$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ 1+\ln x, & x\geqslant 1 \end{cases}$，$\varphi(x)=3x-2$，求 $f[\varphi(0)]$，$\varphi[f(\mathrm{e})]$.

解 (1) 在 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 中，以 $f(x)$ 代 x，得

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-x+1}{x-1}}=x$$

(2) 由 $\varphi(x)=3x-2$，知 $\varphi(0)=-2<1$，故有

$$f[\varphi(0)]=(-2)^2=4$$

因 $\mathrm{e}>1$，此时 $f(x)=1+\ln x$，得 $f(\mathrm{e})=1+\ln\mathrm{e}=2$，故

$$\varphi[f(\mathrm{e})]=\varphi(2)=3\times 2-2=4$$ □

例 1.7 求下列函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$：

(1) $y=f(x)=e^{x+3}$，(2) $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，

(3) $y=f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

解 (1) 从 $y=e^{x+3}$ 中解出 x. 取自然对数得 $\ln y=x+3$，解得 $x=\ln y-3$，再将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\ln x-3$$

(2) 从 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 中解出 x. 由 $(x-1)y=x+1$，整理后得 $x(y-1)=1+y$，解出 $x=\dfrac{y+1}{y-1}$，将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

这里，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 就是函数 $y=f(x)$ 本身.

(3) 从 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 中解出 x. 由于 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$ 即

$$(e^x)^2-2ye^x-1=0$$

解得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$，因 $e^x>0$，故舍去负号，即得 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$，将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$ □

注 由于 $x=f^{-1}(y)$ 是从 $y=f(x)$ 作恒等变形后解出的，故在给定的直角坐标系中，$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 具有同一图形. 但将 $x=f^{-1}(y)$ 中 x,y 对换，变为 $y=f^{-1}(x)$ 后，$y=f^{-1}(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形就关于直线 $y=x$ 对称了.

设函数 $f(x)$，$x\in D$，且定义域 D 关于原点对称，即当 $x\in D$ 时，则有 $(-x)\in D$. 若对任意的 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x) \tag{1.5}$$

则称 $f(x)$ 在 D 上是**奇函数**；若对任意的 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x) \tag{1.6}$$

则称 $f(x)$ 在 D 上是**偶函数**.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称．

例 1.8　容易验证　$y=x^3, y=\sin x, y=x^2\sin x$，以及

$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 都是奇函数；而

$y=x^2, y=\cos x, y=x^3\sin x$，以及 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 都是偶函数．　□

若 $f(x)$ 不满足条件(1.5)也不满足(1.6)，则 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数．例如

$$y=e^x,\quad y=\ln x,\quad y=x^2+\sin x$$

既不是奇函数也不是偶函数．

设函数 $f(x), x\in D$. 若存在非零常数 T，使得对任意的 $x\in D$，及 $(x+T)\in D$，满足

$$f(x+T)=f(x) \tag{1.7}$$

则称 $f(x)$ 在 D 上是**周期函数**，常数 T 称为 $f(x)$ 的**周期**．当 T 是满足条件(1.7)的最小正数时，则称 T 为 $f(x)$ 的**最小正周期**，通常所说周期函数的周期是指它的最小正周期．

例 1.9　设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，验证 $f(\omega x)$(ω 正数)是以 $\dfrac{T}{\omega}$ 为周期的周期函数．

验证　由题设 $f(x), x\in D$，对任意的 $x\in D$ 有 $f(x+T)=f(x)$. 以 $(x+\dfrac{T}{\omega})\in D$ 替换 x，有

$$f[\omega(x+\frac{T}{\omega})]=f(\omega x+T)=f(\omega x)$$

由定义，$f(\omega x)$ 是以 $\dfrac{T}{\omega}$ 为周期的周期函数．

例如　$f(x)=\sin 3x$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{3}$，$f(x)=\sin\dfrac{x}{3}$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{1/3}=6\pi$.　□

例1.10 一正圆锥，其顶角为 2θ，且内接于半径为 a 的球内，试将该圆锥体的体积表示为其半顶角 θ 的函数.

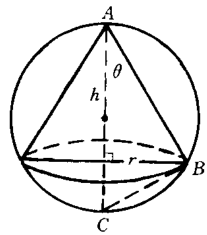


图 1-1

解 设所求圆锥的高为 h，底半径为 r，于是体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

如图1-1，AC 为球的直径，即 $AC = 2a$. 在三角形 ABC 中，$\angle B$ 为直角. 于是

$$AB = 2a\cos\theta$$

又由 $AC \perp DB$，于是

$$r = AB\sin\theta = 2a\cos\theta\sin\theta$$
$$h = AB\cos\theta = 2a\cos^2\theta$$

故得
$$V = \frac{1}{3}\pi(2a\cos\theta\sin\theta)^2 \cdot 2a\cos^2\theta$$
$$= \frac{8\pi a^3}{3}\sin^2\theta\cos^4\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$ □

例1.11 某厂家有某种货物 n 吨，每吨定价 a 元. 若销售量在 $m(m < n)$ 吨以内时，按原价出售；若超过 m 吨，则超过部分按原价的9折出售，试求销售收入与销售量之间的函数关系.

解 设销售量为 x 吨，销售收入为 p 元，则

当 $0 \leqslant x \leqslant m$ 时， $p = ax$；

当 $m < x \leqslant n$ 时， $p = am + a \times 0.9(x - m)$.

故所求函数关系可用分段函数表示为

$$p = \begin{cases} ax, & 0 \leqslant x \leqslant m \\ a[m + 0.9(x - m)], & m < x \leqslant n \end{cases}$$ □

三、练习题

1. 求函数的定义域

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{4-x^2}$

(2) $f(x)=\lg(x-4)+\sqrt{x^2-9}$

(3) $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln(1-2x)}$　　(4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-|x|}$

(5) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0<|x|<1\\ 2, & x=0\\ \sqrt{x^2-1}, & |x|\geqslant 1\end{cases}$

(6) $f(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$

2. 求函数值

(1) $f(x)=\dfrac{1+|x-1|}{x+1}$,求 $f(-2),f(1),f(0)$

(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-2x}, & x<0\\ |\sin x|, & x\geqslant 0\end{cases}$

求 $f(-4),f(\frac{3}{2}\pi),f(x_0+h)$

3. 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x$,求 $f(x),f(x^2)$.

4. 将几个简单函数复合成一个复合函数.

(1) 设 $y=f(u)=\sqrt{u}$,　$u=\varphi(x)=\ln x$,　写出复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式.

(2) 设 $y=f(u)=\arctan u$,　$u=\varphi(v)=\sqrt{v}$,　$v=h(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,写出复合函数 $y=f\{\varphi[h(x)]\}$ 的表达式.

(3) 设 $y=f(u)=e^u,u=u(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$,写出复合函数 $y=f[u(x)]$ 的表达式.

(4) 设 $f(x)=5^x,g(x)=\log_5 x$,写出 $f[g(x)],g[f(x)]$,$f[f(x)],g[g(x)]$ 的表达式.