



GT

贺玲凤 刘 军 编著

声弹性技术

21 世 纪 固 体 力 学 丛 书



科学出版社

www.sciencep.com

21 世纪固体力学丛书

声 弹 性 技 术

贺玲凤 刘 军 编著



科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统地介绍了声弹性技术的理论及其应用。全书共分9章,首先叙述了连续介质力学的基本知识,即连续介质运动的几何分析与力学分析;然后论述了弹性波的传播和声弹性理论,包括波速与介质特性的关系、波的偏振状态、波在界面上的反射、折射、面波等;最后介绍了声弹性技术及其应用,包括声换能器、声速测量方法及大量的应用实例。书末附有必要的数学公式,以便参考。

本书注重理论与实际应用相结合,是一本既有基本原理阐述又有技术进展的综合、全面系统的技术应用专著。

本书可供工程力学、机械强度、工程结构等专业的高年级学生和研究生及从事无损检测、实验应力分析等科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

声弹性技术/贺玲凤等编著. —北京:科学出版社,2002
(21世纪固体力学丛书)

ISBN 7-03-010368-8

I. 声… II. 贺… III. 声-弹性力学-研究 IV. 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 026236 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年9月第 一 版 开本:720×1000 B5

2002年9月第一次印刷 印张:11 3/4

印数:1—3 000 字数:272 000

定价:25.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈兰各〉)

《21 世纪固体力学丛书》编委会

主 编 黄培彦

副主编 韩 强

编 委 (以姓氏笔画为序)

汤立群 陈国华 罗 毅

贺玲凤 贾乃文 曾庆敦

总 序

自从产业革命以来,在工业技术的发展中,力学曾大显身手。特别是 20 世纪中叶以来,近代力学基础性、探索性的超前研究曾对当代产业例如航空、航天工业的发展起到过主导的作用。从中固体力学取得了令人瞩目的成就。

随着知识经济和信息时代的到来,21 世纪我国经济建设将会加速发展。一大批高新技术产业和跨世纪骨干产业的形成,将会带来许多新的复杂的工程实际问题,这不仅为固体力学提供了大量的新课题,而且亦成为固体力学学科发展的新动力。固体力学既要适应生产实际的发展,面向工程实际,解决生产难题,同时亦应从工程实际中提炼出具有普遍性的问题进行系统的研究,促进各分支学科的成长,从而推动整个固体力学学科的发展。

中青年学者尤其青年学者是 21 世纪我国固体力学研究领域的主力军。目前,一大批优秀的青年学者已经成长为新一代的学科带头人,活跃在固体力学的诸多前沿研究领域。由他们联合撰写的固体力学系列专著,从各自不同的研究角度出发,反映了最新的研究成果及其发展趋势,对该学科的发展具有重要的影响和参考价值。毫无疑问,《21 世纪固体力学丛书》在这方面做了一个很好的尝试。

《21 世纪固体力学丛书》围绕固体力学的若干前沿研究领域,基于近代固体力学理论的最新研究成果,在结构的疲劳设计、概率断裂力学、复合材料强度理论、非线性力学以及新的实验测试技术等方面进行了系统的总结。该丛书不仅阐述了基本概念、基本理论、基本方法,而且有许多内容是作者们多年来卓有成效的研究成果,具有理论与应用并重的特色。丛书有助于初次涉足这一领域的学生和研究人员在较短的时间内从较高的起点上开展固体力学的研究工作。

我相信,《21 世纪固体力学丛书》的出版将会对固体力学的理论研究和工程应用发挥积极的促进作用。

高镇同

2001 年 12 月

前 言

声弹性技术的内容非常丰富,它涉及连续介质力学、弹性动力学、声弹性理论以及超声无损检测等方面的内容。通常我们容易查阅到有关连续介质力学、弹性动力学和超声无损检测方面的书籍或专著,然而遗憾的是有关声弹性方面的书籍却很少,这不利于声弹性技术的推广和应用。

本书的目的就是要使一般工程技术人员、本科生和研究生能在较短的时间内学习声弹性的理论,并初步掌握声弹性技术。基于以上考虑,本书编写的原则是简单、明了、实用,既要反映声弹性的主要内容,又要将繁琐、复杂的内容写得容易理解,并列举大量的实例。

全书内容可分为四个部分。第一部分包括前四章,主要介绍了连续介质力学基础,包括直角坐标系中的有限变形和应力理论,连续介质力学的基本方程及各向同性体和各向异性体的本构方程。第二部分即第五章,讲述了波的传播理论,包括弹性波传播的基本概念,均匀无限弹性体的波动特性,以及有界弹性体内波的传播问题。第三部分即第六章,介绍了声弹性理论,主要包括声弹性方程及其在某些特定条件下的解、声弹性双折射理论和声弹性表面波理论等。第四部分包含了第七~九章,主要介绍声弹性检测技术,包括声换能器、声速(时)测量方法及声弹性技术在实际中的应用实例。

本书的总体布局及第四~九章由贺玲凤编写,第一~三章及附录部分由刘军编写。感谢潘桂梅帮助作者打印了部分手稿,感谢张子龙为本书绘制了部分插图。

由于作者水平有限,错误和不当之处在所难免,希望读者和专家们指正。

目 录

第一章 变形与运动	1
1.1 拉格朗日坐标和欧拉坐标	1
1.2 均匀变形	3
1.3 应变张量、应变张量的不变量.....	4
1.4 变形梯度和位移梯度.....	13
1.5 小变形情况下的变形协调条件.....	16
1.6 物质导数与传运公式.....	18
第二章 应力理论	22
2.1 基本概念.....	22
2.2 柯西(Cauchy)应力	23
2.3 柯西应力张量.....	24
2.4 主应力、主方向、应力张量的不变量.....	29
2.5 最大与最小剪应力.....	33
2.6 Piola-Kirchhoff 应力张量.....	35
第三章 连续体基本方程	39
3.1 质量守恒、连续方程	39
3.2 动量原理、运动方程	41
3.3 动量矩守恒、动量矩方程	45
3.4 用比奥拉-克希霍夫应力张量表示的运动方程、动量矩方程.....	47
第四章 弹性体	49
4.1 本构方程构成的基本原理.....	49
4.2 胡克型弹性体.....	50
4.3 各向同性体.....	52
4.4 各向异性体.....	55
第五章 弹性波的传播	60
5.1 一维波动方程的求解,波传播的一些概念	60
5.2 弹性动力学基本方程与无界面弹性波.....	65
5.3 晶体中的波.....	70
5.4 弹性波的平面波.....	73
5.5 P 波在弹性半空间表面的反射	75
5.6 SV 波在弹性半空间表面的反射	80

5.7	瑞利波	84
5.8	SH 波在弹性半空间的反射	87
5.9	P 波和 SV 波在界面处的反射和折射	90
第六章	声弹性理论	94
6.1	有初始应力物体中的波动	94
6.2	声弹性方程	97
6.3	弱正交异性体中的平面波	99
6.4	声弹性双折射	104
6.5	表面波声弹性方程	107
第七章	超声波换能器	110
7.1	压电效应和压电材料	110
7.2	压电方程和压电参数	114
7.3	压电圆片的厚度振动	118
7.4	压电超声换能器	122
7.5	电磁声技术	127
7.6	激光超声技术	129
第八章	超声波测量方法	134
8.1	声速测定法	134
8.2	频谱测定法	140
第九章	应力的超声测量	142
9.1	声弹性应力测定公式	142
9.2	声弹特性	145
9.3	加载应力的测定	151
9.4	残余应力的测定	153
9.5	在其他领域的应用	158
附录 A	指标符号	159
A.1	指标符号	159
A.2	克罗内克记号(Kronecker deltas)和排列符号	160
附录 B	笛卡儿张量	163
B.1	坐标变换	163
B.2	笛卡儿张量	164
B.3	笛卡儿张量的性质	164
B.4	张量判别定理	165
附录 C	二阶实对称张量的主值与主方向	166
C.1	二阶实对称张量的不变量	166
C.2	二阶实对称张量的重要性质	167

附录 D 哈密顿算子.....	169
附录 E 雅可比行列式.....	170
参考文献.....	173

第一章 变形与运动

连续介质的变形和应变是一个与连续介质性质及引起变形的原因完全无关的、纯粹几何学的问题。它要确定变形所引起的连续介质各部分在空间位置和方位的变化以及各邻点相互距离的变化,它还要讨论各种运动学变量随时间的变化。在讨论中假设位移和应变是有限的,无限小位移情况则是它的特例。

1.1 拉格朗日坐标和欧拉坐标

在连续介质力学中,可以把连续体的一个微小部分(体元)称为质点,而把整个连续体叫做物体。任一物体在空间都占据一定的区域,构成一个空间几何图形,这个空间图形称为物体的构形。物体的空间位置随时间的变化称为运动,物体运动时,其构形也发生变化。变形是指物体的某个初始形状与随后的另一个形状之间发生的差异。物体的变形和运动是绝对的,但对物体运动的认识和描述只能是相对的,只能从一定的参考坐标来描述。

1.1.1 描述连续介质运动的方法

1. 拉格朗日描述

物体是质点的集合,简称为质点系。每个质点可用一个大写矢量 $\mathbf{X}$ 或其分量 X_i 来识别和标记。最简单的是选该质点的初始位置为 X_i ,称为拉格朗日坐标,也叫物质坐标或随体坐标。不同质点有不同的物质坐标,不同的物质坐标代表着不同的质点。

如把物体开始变形和运动的时刻称为初始时刻,那么,拉格朗日坐标就是变形和运动开始之前质点的坐标,所以拉格朗日坐标具有原位(原时)的特点。

以拉格朗日坐标作为自变量,把各个物理量表示为拉格朗日坐标的函数,并研究这些函数变化的规律,这就叫拉格朗日描述,简称拉氏描述。

2. 欧拉描述

质点 X_i 因物体变形和运动,不同时刻将占据空间不同位置。用小写的矢量 $\mathbf{x}$ 或其分量 x_i 来表示该空间位置,称为欧拉坐标,也叫空间坐标。所以欧拉坐标表示的是变形和运动过程之中质点的坐标,因此具有现位(即时)的特点。

以欧拉坐标作为自变量,把各物理量表示为欧拉坐标 x_i 和时间 t 的函数,并研究它们变化规律的,就叫欧拉描述,简称欧氏描述。

3. 两种坐标的关系

同一时刻,不同质点占据空间的不同位置,反之,不同位置(由连续性假设)都有不同质点占据。因此,拉格朗日坐标和欧拉坐标之间有确定的对应关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), & X_i &= X_i(x_1, x_2, x_3, t) \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), & x_i &= x_i(X_1, X_2, X_3, t) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

前式表示在时刻 t 位于空间位置 $\mathbf{x}$ 处的是那个质点,后式表示在时刻 t 质点 $\mathbf{X}$ 占据着空间的那个位置。连续力学认为,这种坐标变换是连续和一一对应的,即变形和运动之前的邻域,在变形和运动过程中仍保持为邻域,对每个时刻 t ,一个质点 $\mathbf{X}$ 只对应一个位置 $\mathbf{x}$,一个位置 $\mathbf{x}$ 也只有一个质点 $\mathbf{X}$ 占据,所以 $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ 都是单值连续函数,两者互为反函数。

以后一律取 $t=0$ 时质点的空间坐标为物质坐标,即

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, 0), \quad X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, 0) \quad (1.1.2)$$

由于固体变形前各质点有明确的位置,因此,固体力学一般都采用拉格朗日坐标。

1.1.2 质点的位移

不同质点的位移一般不同,形成位移场。以 u_i 代表质点 X_i 的位移,(见图 1.1),若使位移向量与初始位置的每一个质点相联系,可写出:

$$\text{L:} \quad u_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(X_1, X_2, X_3, t) - X_i \quad (1.1.3a)$$

若使位移向量与变形后位置的质点相联系,则:

$$\text{E:} \quad u_i(x_1, x_2, x_3, t) = x_i - X_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.1.3b)$$

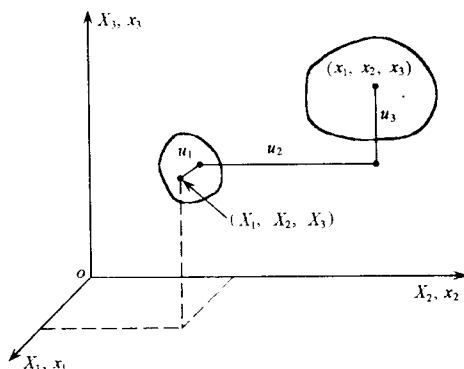


图 1.1

即

$$\text{L:} \quad x_i(X_1, X_2, X_3, t) = X_i + u_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad (1.1.4a)$$

$$\text{E:} \quad X_i(x_1, x_2, x_3, t) = x_i - u_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.1.4b)$$

式中, $i=1, 2, 3$, 所以上面每个式子都代表着 3 个方程。 u_i 是 X_i 在时刻 t 相对于 $t=$

0 时的位移。各式左侧的 E, L 分别代表欧氏描述和拉氏描述(以下均同)。由于研究变形的几何性质时总是在固定瞬时 t 进行分析, 因此 t 只是一个参数, 为简单起见, 可将 t 略去, 即:

$$\text{L:} \quad x_i(X_1, X_2, X_3) = X_i + u_i(X_1, X_2, X_3) \quad (1.1.5a)$$

$$\text{E:} \quad X_i(x_1, x_2, x_3) = x_i - u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (1.1.5b)$$

1.2 均匀变形

所谓均匀变形是指物体中取任意两个相同的平行六面体, 其变形都相同, 也就是说物体内部各点的变形都一样。用张量表示即均匀变形时物体各点的应变张量相同, 即应变张量的各分量都不是点的坐标的函数, 也就是常应变张量场。

因此, 每个质点在变形前后的坐标间有如下线性代数变换关系:

$$x_i = A_{ij}X_j, \quad X_j = A_{ij}^{-1}x_i \quad (1.2.1)$$

均匀变形情况下 A_{ij} 为常数。

如果在物体中任取一个微小正六面体, 那么, 均匀变形后它将变成微小平行六面体(见图 1.2)。变形前的两个平行平面:

$$C_i X_i = D_1, \quad C_i X_i = D_2$$

式中, i 是哑指标; C_i, D_1, D_2 都是常数。在均匀变形后, 分别变为

$$E_j x_j = D_1, \quad E_j x_j = D_2$$

其中

$$E_j = C_i A_{ij}^{-1}$$

E_j 为常数。说明均匀变形原来平行的两个平面仍是平行平面。

数学上总可以把 A_{ij} 分解为两部分, 即从 A_{ij} 中分出一个 δ_{ij} , 剩下部分记为 B_{ij} :

$$A_{ij} = \delta_{ij} + (A_{ij} - \delta_{ij}) = \delta_{ij} + B_{ij}$$

于是(1.2.1)式变成

$$(\delta_{ij} + B_{ij})X_j = x_i \quad (1.2.2)$$

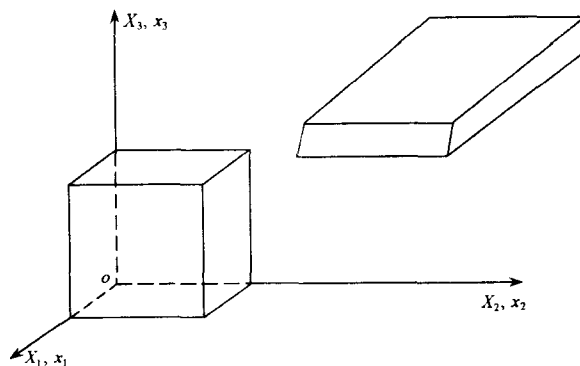


图 1.2

与(1.1.5)式比较,可知

$$B_{ij}X_j = u_i \quad (1.2.3)$$

均匀变形是一种经常遇到的重要基本变形,在研究一点邻域的变形时需要用到这个概念。它使直线仍变为直线,但可伸缩,它使平面仍变为平面,原来平行的平面仍保持平行,但线段间的夹角可以改变。

1.3 应变张量、应变张量的不变量

1.3.1 拉格朗日应变张量和欧拉应变张量

物体不论何种变形形态,都有一个共同点,就是质点间距离改变,所以可用质点间距离的变化来度量变形。

试考察物体在两个时刻的位置,一是初始时刻,这时拉格朗日坐标和欧拉坐标重合,另一个是给定时刻,例如变形结束时。由于时间给定了,因此 t 不再是变量,于是,取笛卡儿坐标时

$$\left. \begin{aligned} X_i &= X_i(x_1, x_2, x_3) \\ x_i &= x_i(X_1, X_2, X_3) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.1)$$

考虑初始时物体内相邻的两个质点 $P(X)$ 和 $Q(X+dX)$, 这两点间的距离(即线段 $\overline{PQ}$ 的长度)用 ds_0 表示,在时刻 t , $P(X)$ 变到了 $P'(x)$, $Q(X+dX)$ 变到了 $Q'(x+dx)$, P' 和 Q' 两点间的距离(即线段 $\overline{P'Q'}$ 的长度)用 ds 表示(见图 1.3)则:

$$ds^2 \equiv (ds)^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (1.3.2a)$$

$$ds_0^2 \equiv (ds_0)^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 \quad (1.3.2b)$$

由式(1.3.1)和式(1.1.5),在引入克罗内克符号后,有

$$\begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial}{\partial X_j} (X_i + u_i) dX_j = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) dX_j, \\ L: \quad \frac{\partial x_i}{\partial X_j} &= \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \end{aligned} \quad (1.3.3a)$$

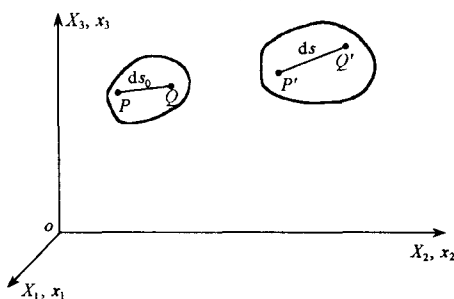


图 1.3

$$\begin{aligned} \text{E:} \quad dX_i &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i - u_i) dx_j = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j, \\ \frac{\partial X_i}{\partial x_j} &= \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (1.3.3b)$$

所以

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j = \delta_{ij} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k \right) \left(\frac{\partial x_j}{\partial X_l} dX_l \right) \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_j}{\partial X_l} dX_k dX_l \end{aligned} \quad (1.3.4a)$$

$$\begin{aligned} ds_0^2 &= dX_i dX_i = \delta_{ij} dX_i dX_j = \delta_{ij} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k \right) \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_l} dx_l \right) \\ &= \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} dx_k dx_l \end{aligned} \quad (1.3.4b)$$

为明显对比和区别两种描述,可将下标也分为大写和小写,但一般无需对比时仍一律用小写。

于是长度元素之差可写为

$$\begin{aligned} \text{L:} \quad ds^2 - ds_0^2 &= \left(\frac{\partial x_i \partial x_i}{\partial X_K \partial X_L} - \delta_{KL} \right) dX_K dX_L \\ &= \left(\frac{\partial x_k \partial x_k}{\partial x_I \partial x_J} - \delta_{IJ} \right) dX_I dX_J \end{aligned} \quad (1.3.5a)$$

$$\begin{aligned} \text{E:} \quad ds^2 - ds_0^2 &= \left(\delta_{kl} - \frac{\partial X_I \partial X_I}{\partial x_k \partial x_l} \right) dx_k dx_l \\ &= \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_K \partial X_K}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_i dx_j \end{aligned} \quad (1.3.5b)$$

现在定义应变张量

$$\xi_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_I} \frac{\partial x_k}{\partial X_J} - \delta_{IJ} \right) \quad (1.3.6a)$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \frac{\partial X_K}{\partial x_j} \right) \quad (1.3.6b)$$

所以

$$\text{L:} \quad ds^2 - ds_0^2 = 2\xi_{IJ} dX_I dX_J \quad (1.3.7a)$$

$$\text{E:} \quad ds^2 - ds_0^2 = 2\eta_{ij} dx_i dx_j \quad (1.3.7b)$$

ξ_{IJ} 叫 Green (格林) 有限应变张量, 常称为拉格朗日有限应变张量; η_{ij} 叫 Almansi (阿尔曼希) 有限应变张量, 常称为欧拉有限应变张量。

这样定义的 ξ_{IJ} 和 η_{ij} 分别是在坐标系 X_i 与 x_i 内的张量, 根据商法则可知 ξ_{IJ} 和 η_{ij} 张量是对称的。方程 (1.3.5) 的一个直接结果是 $ds^2 - ds_0^2 = 0$, 它意味着 $\xi_{IJ} = \eta_{ij} = 0$, 反之亦然。但是每个线元素长度保持不变的变形是刚体运动。因此, 物体变形为刚体运动的必要与充分条件是: 在整个物体内部, 应变张量 ξ_{IJ} 或 η_{ij} 的所有分量为

零。

将(1.3.3a)式代入(1.3.6a)式,得到以位移梯度函数表达的拉格朗日有限应变张量的表达式

$$\begin{aligned}\xi_{IJ} &= \frac{1}{2} \left[\left(\delta_{KI} + \frac{\partial u_K}{\partial X_I} \right) \left(\delta_{KJ} + \frac{\partial u_K}{\partial X_J} \right) - \delta_{IJ} \right] \\ &= \frac{1}{2} (u_{J,I} + u_{I,J} + u_{K,I} u_{K,J})\end{aligned}\quad (1.3.8a)$$

同理,将(1.3.3b)式代入(1.3.6b)式,得

$$\begin{aligned}\eta_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \left(\delta_{ki} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left(\delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j} - u_{k,i} u_{k,j})\end{aligned}\quad (1.3.8b)$$

可以把 ξ_{IJ} 和 η_{ij} 分别分解为线性和非线性两部分,即:

$$L: \quad \xi_{IJ} = \epsilon_{IJ} + \frac{1}{2} u_{K,I} u_{K,J} \quad (1.3.9a)$$

$$E: \quad \eta_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad (1.3.9b)$$

其中线性部分为

$$\epsilon_{IJ} = \frac{1}{2} (u_{J,I} + u_{I,J}) \quad (1.3.9c)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.3.9d)$$

交换下标即可知

$$\xi_{JI} = \xi_{IJ}, \epsilon_{JI} = \epsilon_{IJ}$$

$$\eta_{ji} = \eta_{ij}, \epsilon_{ji} = \epsilon_{ij}$$

以小写希腊字母 ξ 表示分量为 ξ_{IJ} 的二阶张量, η 表示分量为 η_{ij} 的二阶张量, ϵ 表示其分量为 ϵ_{IJ} 的二阶张量, ϵ 表示分量为 ϵ_{ij} 的二阶张量, 则有

$$\xi^T = \xi, \quad \epsilon^T = \epsilon, \quad \eta^T = \eta, \quad \epsilon^T = \epsilon$$

因此,它们全都是二阶对称张量,并非只有线性部分才是对称张量。

1.3.2 沿坐标轴的线元的伸长率

设变形前沿 X_1 的线元

$$d\mathbf{X}(dX_1, 0, 0) = d\mathbf{X}(ds_0, 0, 0)$$

变形后其长度为 ds , 则该线元的伸长率(即相对伸缩)为

$$L: \quad \epsilon_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$$

反之,若取变形后沿 x_1 的线元

$$d\mathbf{x}(dx_1, 0, 0) = d\mathbf{x}(ds, 0, 0)$$

设此线元变形之前的长度为 ds_0 , 则该线元的伸长率为

$$E: \quad \epsilon_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds}$$

所以

$$L: \quad ds = (1 + \epsilon_{11}) ds_0 \quad (1.3.10a)$$

$$E: \quad ds_0 = (1 - \epsilon_{11}) ds \quad (1.3.10b)$$

于是

$$L: \quad ds^2 - ds_0^2 = [(1 + \epsilon_{11})^2 - 1] ds_0^2$$

$$E: \quad ds^2 - ds_0^2 = [1 - (1 - \epsilon_{11})^2] ds^2$$

与(1.3.7)两式比较可知

$$L: \quad (1 + \epsilon_{11})^2 - 1 = 2\xi_{11}$$

$$\text{即} \quad \epsilon_{11} = \sqrt{1 + 2\xi_{11}} - 1 \quad (1.3.11a)$$

$$E: \quad 1 - (1 - \epsilon_{11})^2 = 2\eta_{11}$$

$$\text{即} \quad \epsilon_{11} = 1 - \sqrt{1 - 2\eta_{11}} \quad (1.3.11b)$$

同理

$$L: \quad \epsilon_{22} = \sqrt{1 + 2\xi_{22}} - 1$$

$$\epsilon_{33} = \sqrt{1 + 2\xi_{33}} - 1$$

$$E: \quad \epsilon_{22} = 1 - \sqrt{1 - 2\eta_{22}}$$

$$\epsilon_{33} = 1 - \sqrt{1 - 2\eta_{33}}$$

1.3.3 沿两个坐标轴的线元间夹角的变化

在拉格朗日描述法中, 在变形前的物体上, 沿 X_1 和 X_2 各选取线元

$$d\mathbf{X} = d\mathbf{X}(dX_1, 0, 0), \quad dX_1 = ds_0$$

$$d\mathbf{X}' = d\mathbf{X}'(0, dX_2, 0), \quad dX_2 = ds'_0$$

变形后分别为 $d\mathbf{x}$ 和 $d\mathbf{x}'$, $d\mathbf{x}$ 的长度记为 ds , $d\mathbf{x}'$ 的长度记为 ds' , $d\mathbf{x}$ 与 $d\mathbf{x}'$ 间的夹角记为 θ 。

欧拉描述法是在变形后的物体上, 沿 x_1 和 x_2 轴各取线元

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{x}(dx_1, 0, 0), \quad dx_1 = ds$$

$$d\mathbf{x}' = d\mathbf{x}'(0, dx_2, 0), \quad dx_2 = ds'$$

设此两线元是变形前物体上长度分别为 ds_0 和 ds'_0 而夹角为 θ_0 的两线元 $d\mathbf{X}$ 和 $d\mathbf{X}'$ 变来的。于是

$$E: \quad d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' = ds ds' \cos \theta = dx_k dx'_k = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right) dX_i dX_j$$

$$= \frac{\partial x_k}{\partial X_1} \frac{\partial x_k}{\partial X_2} ds_0 ds'_0 \quad (1.3.12a)$$

$$\begin{aligned} \text{L:} \quad d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}' &= ds_0 ds'_0 \cos \theta_0 = dX_k dX'_k = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} dx_i \right) \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx'_j \right) \\ &= \frac{\partial X_k}{\partial x_1} \frac{\partial X_k}{\partial x_2} ds ds' \end{aligned} \quad (1.3.12b)$$

由(1.3.6)两式可知

$$\text{L:} \quad \frac{\partial x_k}{\partial X_1} \frac{\partial x_k}{\partial X_2} = 2\xi_{12}$$

$$\text{E:} \quad \frac{\partial X_k}{\partial x_1} \frac{\partial X_k}{\partial x_2} = -2\eta_{12}$$

所以(1.3.12)两式可分别写为

$$ds ds' \cos \theta = 2\xi_{12} ds_0 ds'_0$$

$$ds_0 ds'_0 \cos \theta_0 = -2\eta_{12} ds ds'$$

将(1.3.10)两式和(1.3.11)两式代入,则

$$(\sqrt{1+2\xi_{11}} ds_0)(\sqrt{1+2\xi_{22}} ds'_0) \cos \theta = 2\xi_{12} ds_0 ds'_0$$

$$(\sqrt{1-2\eta_{11}} ds)(\sqrt{1-2\eta_{22}} ds') \cos \theta_0 = -2\eta_{12} ds ds'$$

所以

$$\cos \theta = \frac{2\xi_{12}}{\sqrt{1+2\xi_{11}} \sqrt{1+2\xi_{22}}} \quad (1.3.13a)$$

$$\cos \theta_0 = \frac{-2\eta_{12}}{\sqrt{1-2\eta_{11}} \sqrt{1-2\eta_{22}}} \quad (1.3.13b)$$

以 γ_{12} 代表 dX_1 与 dX_2 原来的夹角(90°) 在变形后的变化, 以 γ_{12} 代表 dx_1 与 dx_2 的夹角(90°) 与它们变形之前的对应两线元夹角的变化, 即

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \gamma_{12} = \theta_0 - \frac{\pi}{2}$$

于是, 取正弦可得

$$\sin \gamma'_{12} = \cos \theta = \frac{2\xi_{12}}{\sqrt{1+2\xi_{11}} \sqrt{1+2\xi_{22}}} \quad (1.3.14a)$$

$$\sin \gamma_{12} = -\cos \theta_0 = \frac{2\eta_{12}}{\sqrt{1-2\eta_{11}} \sqrt{1-2\eta_{22}}} \quad (1.3.14b)$$

推导以上各式时都未用过小变形的要求。

1.3.4 小变形理论

因坐标变化引起的位移变化, 即位移对坐标的一阶偏导数 $u_{i,j}$, 叫位移梯度。连续介质力学的所谓小变形理论的基本要求是位移梯度远小于 1, 即对所有的 i, j ,