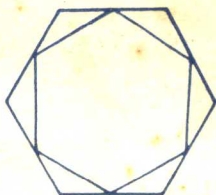
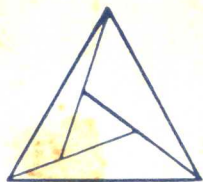
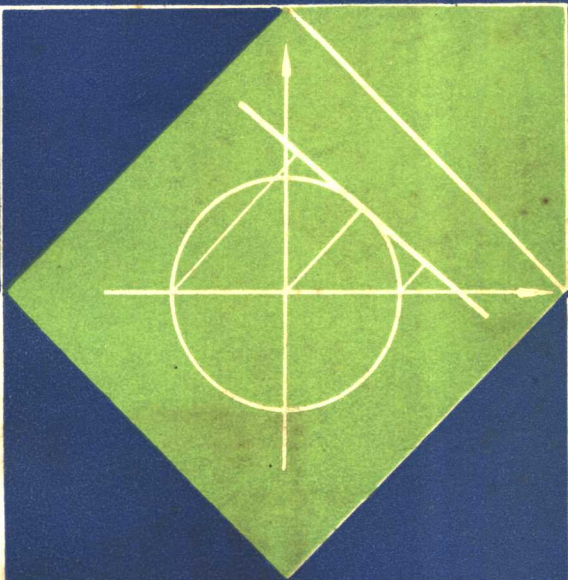
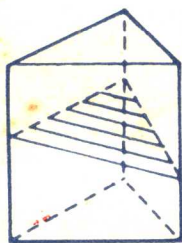


数学教学中 如何培养能力

韩家渠 编著



科学普及出版社

数学教学中如何培养能力

韩家桀 编著

科学普及出版社

内 容 提 要

当好一个数学教师，应该有意地培养学生的观察、理解、记忆和运用能力，运算、推理证明和空间想象能力，以及自学、抽象和探究能力。作者自1963年起，在中学数学课教学中对培养上述能力进行了试验，本书就是这些年经验的总结。

本书不但有作者的心得体会，还提出有关数学教学的建设性意见，并通过具体的例题一一加以阐明。

书中引用的例题和习题均附有解答或提示。

本书可作为中学数学教师、中学生和自学青年的学习参考读物。

数学教学中如何培养能力

韩 家 弼 编著

责任编辑：吴之静

封面设计：窦桂芳

科学普及出版社出版（北京白石桥紫竹院公园内）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国科学院印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/32 印张：8 字数：177千字

1982年5月第1版 1982年5月第1次印刷

印数：1—58,500册 定价：0.76元

统一书号：13051·1292 本社书号：0410

三个值得讨论的问题(代前言)

从1963年开始,我和我的同事就注意研究“在数学教学中如何培养能力”的问题。通过高中三年的教学试验,我们看到,如果在教学中既注意讲授知识,又注意培养能力,不但可以提高教学质量,而且可以减轻学生的学习负担。

1965年秋天,我们又在新的高一年级进行第二轮教学试验,希望取得进一步的经验。可惜,不到一年,“文化大革命”开始,课都不上了,还谈什么培养能力呢?!

1972年春天,我们再次进行“数学教学中如何培养能力”的试验。不久,这一次试验又被迫中断。

粉碎“四人帮”,全国得解放,特别是党的十一届三中全会之后,全国工作的着重点转移到四化建设上来,“数学教学中如何培养能力”的试验又继续进行了。

当前,“如何培养学生能力、发展智力”的问题已经成为国际和国内教育改革中最引人注目的课题。我想,为了提高数学教学质量,为了替四化建设培养人材,认真总结一下近廿年来的经验和教训是十分有意义的。下面先提出三个问题供讨论。

(一) 数学教学中为什么要培养能力

1. 从数学教学的目的来看

建国以来,我们曾有过五个“数学教学大纲”。在1952年的大纲里,仅提到“基础知识”与“基本技能”的“双基”要求,“能力”这个词都没有在大纲中出现。在1955年的大纲里,在

“双基”的同时，第一次明确提出了要培养运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力。在1961年的大纲里，则提到五种能力，增加了绘图与测量能力的要求。在1965年的大纲里，又只有三种能力的要求了。现在我们正在试行的是1977年的大纲，关于能力的要求是这样写的：“具有正确迅速的运算能力，一定的逻辑思维能力和一定的空间想象能力，从而逐步培养学生分析问题和解决问题的能力”。

通过历史的回顾可以看出，在数学教学中培养能力的要求是在逐渐提高的。在教学第一线的老师们，从亲身体验中也认识到了培养能力的必要性和重要性。近年来，许多老师提出在抓“双基”的基础上，还要培养“能力”。“狠抓双基，着眼能力”，“加强基础知识，注意培养能力”等等新提法，都反映了这个共同的想法：在数学教学中，既要传授知识，又要培养能力，才能达到提高教学质量、培养大批人材的目的。

2. 从知识与能力的关系来看

知识是指人们对事物的认识，是以前经验的总结，而能力则主要是指完成一定活动的本领，包括完成一定活动的具体方式，以及顺利完成一定活动所必须的心理特征，它能帮助人去开拓新知识领域。因此，首先要认识到人的知识与能力是有区别的。有人认为“数学才能只不过是伴随着掌握数学知识的过程自然派生的”。这种认识显然片面，有许多事例都表明，不能单纯用知识的多少来衡量一个人能力的高低。我们不能在知识与能力之间划等号，它们是有区别的，都是需要去培养的。

其次，要认识掌握知识与发展能力是相互联系、相互制约的。学生的能力要通过知识的掌握而形成与发展；学生掌握一定的知识，必须要以一定的能力为前提，已经形成的能力极大地影响着学生进一步掌握知识的难度与速度。有的老师有

一种看法,认为对于学习成绩差的学生,只抓“基础知识”就行了,只有对于学习成绩优秀的学生,才能谈到能力的培养。这种认识也是不恰当的。许多情况表明,不少学习上的后进生,往往缺少最起码的学习能力,所以知识也学不好。例如,一些本来学习上很努力的学生,上高中后却掉队了,分析原因,往往就是他们的学习能力不能适应高中学习的需要。据北京二中的一次统计,原来成绩很好、升入高中后感到有困难的学生占50%。1979年暑假,有一名初三学生四门考试,以370分的优秀成绩升入本校高中,在近300名学生中名列前茅。升入高中两个月后,期中考试,她的成绩竟一落千丈,在班内名列第33。原因何在呢?她说:“就是感到吃力,跟不上”。这就是学习能力差,不能适应高中学习的需要所致。总之,我们对于学习上好、中、差三类学生都应注意既抓掌握知识,又抓培养能力才是全面的。

第三,还要注意能力的形成与发展比知识的获得要慢。在学习中,有时学生运用已有的能力,还可以学习好,但是,等到要他们去掌握更高深的知识时,就会感觉困难,这时再来培养学生的能力就比较迟了。

在实际的教学中,人们往往只注意传授知识的任务完成得好坏,因为它是看得见、摸得着的,考试题目也在这些知识范围之内。但是,为了培养人材,对学生负责,老师教初中学生时,就要考虑到既让他们很好地掌握初中所有的基础知识,又注意培养能力,为他们上高中,学习更复杂、多样的知识作好能力上的准备;教高中学生时,也要有类似的教学目标,以适应升学与就业的需要。

3. 从当前时代的特征来看

首先,科学技术发展速度加快了。有资料统计说:“若1750年人类知识总量计算做二倍,1900年则增长到四倍,

1950 年增长到八倍, 1960 年增长到十六倍”。这就是说, 目前每 8 年至 10 年知识就要翻一番, 如果学生在学校里只会掌握现成的知识, 等到毕业时, 就会远远落后于时代。因此, 必须使学生在掌握知识的过程中培养能力, 发展智力, 以便适应时代发展的需要。

其次, 生产力的提高更多地依赖于科学技术, 这就要求人们能创造性地发现新规律、发明新技术, 要求学生在学习知识的同时就注意培养能力, 发展独立性与创造性。电子计算机的出现和日益广泛的应用, 不仅部分地代替了人们的体力劳动, 也部分地代替了人们的脑力劳动, 这就要求我们很好地研究, 究竟什么能力是我们这个时代需要突出培养的, 而哪些能力则可以不再特意训练。例如, 要用高度注意力和记忆力来进行多位数心算, 可能就不是那么重要的能力了。

(二) 数学教学中应当培养哪些能力

1. 从数学教学的特点来看

数学教学是讲授数学方面基础知识的, 也要培养与数学关系密切的“特殊能力”, 例如通常所说的三种能力, 即运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力。从学校教育看, 主要通过课堂教学的形式来传授知识, 就又不能忽视与各科教学所共需的“一般能力”的培养, 例如观察能力、理解能力、记忆能力和运用能力, 它们都是在教学过程的各个阶段里所需要的“一般能力”。

在传统的数学教学中, 说到培养能力, 往往只谈上述三种“特殊能力”, 这是不全面的。一个人从事任何一种活动, 既要有特殊能力, 又要有一般能力, 而且一个人的一般能力愈发展, 就为特殊能力的发展创造了有利的条件。实际上, 有许多

学生数学学习能力差，主要原因正是他们的一般能力差。因此，在中小学的数学教学中，一定既要培养特殊能力，还要培养一般能力。在低年级，往往应当首先重视发展学生的一般能力，在发展一般能力的基础上逐步发展特殊能力。

2. 从数学教材现代化来看

对于培养运算、逻辑思维和空间想象这三种特殊能力，流行着这样的看法：认为运算是算术和代数的事，逻辑思维是平面几何的事，空间想象是立体几何的事。这也许能够简单地说明数学各分科的特点，但是有片面性和局限性。随着数学教材的现代化，这种片面性和局限性将表现得越来越明显。

认为运算只是算术和代数的事，是因为对于“运算”作了狭义的理解，把运算的意义仅仅局限于通常的加减乘除、乘方开方等代数运算。其实运算还包括代数和三角中的函数，以及极限、微分与积分等分析运算，特别要指出的是几何的平移、旋转、对称、伸缩等“变换”也可称为“几何运算”。在统编新教材高二年级课本中，还简单介绍了逻辑代数知识，“与”、“或”、“非”就是“逻辑运算”。如果对于运算作出广义的理解，认为运算，除了包括通常的代数运算，分析运算，还包括几何运算和逻辑运算等内容，我们就不会片面地说运算只是算术和代数的事了。培养正确和迅速的运算能力，应当是整个中学数学教学中的任务。

认为逻辑思维只是平面几何的事，也是因为对于“逻辑思维”作了非常狭义的理解，把逻辑思维的意义仅仅局限于推理证明，仅仅局限于“几何型”的推理证明。事实上，“运算型”的推理证明也是一种逻辑推理的形式，而且是一种比较先进的逻辑推理形式。如果我们这样较为广义地理解推理证明，就不会认为逻辑思维只是平面几何的事了。在代数和三角中也有大量的推理证明，不过它们多半是采取“运算型”的逻辑推

理形式而已。

再进一步分析,逻辑思维不限于推理证明,更基本的任务还在于概念的形式,概念的定义和分类,都是逻辑思维的基本功。

一般说来,逻辑思维包括概念、判断、推理等基本的思维形式,以及比较、分类、类比、归纳与演绎,分析与综合等常用的思维方法,培养逻辑思维能力绝不是仅由“推理证明”的训练就可以达到的,它应当渗透到教学的各个方面与各个阶段。因此我们认为,应当把逻辑思维能力作为全部能力培养的中心,而将“推理证明”单独提出来,与“运算”和“空间想象”合称为三种与数学关系密切的“特殊能力”。

认为空间想象只是立体几何的事,也是因为对于“空间想象”作了狭义的理解,把空间想象仅仅局限于三维空间之中。如果我们认为空间想象乃是全部数学中的形象思维,它就和逻辑思维相辅相成了。通过逻辑思维,由具体到抽象,又通过空间想象,由抽象回到具体,波浪式地发展着。实际上,在平面几何中,特别在平面解析几何中,时常要想象图形的运动。在代数和三角中,空间想象也扮演着重要的角色,例如:由函数的图象,便易于掌握函数的性质。许多代数和分析中的概念,如果明确了它们的几何解释,就能使本来很抽象的概念,生动、直观、形象起来,例如导数和定积分概念就是这样,特别是,复数的几何意义的获得,对于复数的研究更起了重大的作用。

总之,对于运算、逻辑思维和空间想象不应作狭隘的孤立的理解,要有一定的广度,要注意相互联系,要在中学数学教学的全过程中培养学生具备这三种“特殊能力”。

3. 从“四化建设”的要求看

上面提到了数学教学中应当培养七种能力:四种“一般能力”(即观察能力、理解能力、记忆能力和运用能力),三种

“特殊能力”(即运算能力、推理证明能力和空间想象能力)。这七种能力是对学生的基本要求,它的核心,贯串始终的则是培养和发展学生的思维能力。我们认为,为了适应四化建设,为了培养更多更优秀的人材,对于某些学生,还应当提高对于能力的要求,注意发展他们的智力,发展他们的独立性与创造性。根据实践,下述三种能力是可以在中学阶段对一部分学生进行初级训练和培养的:

一是**自学能力**,主要包括阅读理科书籍、写读书笔记、进行书评等能力。

二是**抽象能力**,例如将一个问题的具体提法抽象为一般提法,进而将它公式化的能力。

三是**探究能力**,例如按照观察、分析、综合、求证的研究程序来探索客观规律的能力。

(三) 数学教学中如何培养能力

根据上面的一些认识,结合多年来数学教学中积累的一些体会,我编成讲义在我院中学数学教师进修班讲授和讨论研究。讲义共有十章,每一章讲如何培养一种能力。关于逻辑思维能力则渗透在每一章之中,作为核心能力来培养,而不另列专门章节介绍。

从1978年至今,我们已经先后举办了四期教师进修班,每一期进修班结束之后,都要对讲义进行一次修改,本书就是在此基础上写成的。由于“培养能力、发展智力”是教学改革中的新课题,更由于我的水平有限,书中难免会有许多不够成熟或错误的地方,欢迎读者多多批评指正,我将不胜感激。

北京教育学院东城分院

韩家驷

一九八一年五月完稿于北京

目 录

三个值得讨论的问题(代前言)·····	ii
第一章: 如何培养观察能力·····	1
第二章: 如何培养理解能力·····	14
第三章: 如何培养记忆能力·····	27
第四章: 如何培养运用能力·····	39
第五章: 如何培养运算能力·····	60
第六章: 如何培养推理证明能力·····	75
第七章: 如何培养空间想象能力·····	131
第八章: 如何培养自学能力·····	198
第九章: 如何培养抽象能力·····	208
第十章: 如何培养探究能力·····	221
结束语·····	233
附: 第八、九、十章习题解答或提示·····	235

第一章 如何培养观察能力

观察是人们认识世界的一个重要途径。要了解和熟悉周围的环境，首先靠观察；要探索 and 发现大自然的奥秘，也要靠观察。一个人如果“视而不见”、“目无物”，他的精神世界也一定是很贫乏的。

通常，老师们批评学生，说他们“思想不集中”、“马虎”、“粗心”以致于作业中出现错误。其实呢，有不少学生，造成错误的原因并不是“粗心”，而是观察力不强。正因为这样，他们做题时看不清题意，学习概念时，不能掌握实质，只会照猫画虎、死记硬背，从而学习成绩差，也缺乏求知欲。如果我们在教学中注意培养学生的观察能力，也就能启发他们的求知欲，因为一个人越是对周围事物进行精细观察，就越能提出许多“为什么”，也就越想去弄清这些问题。

观察能力对于自然科学工作者，尤其是不可缺少的能力，他们不但要勤于观察，而且要善于观察。千百万人都见过苹果落地，唯有牛顿悟出了万有引力定律；许多人都分离过空气，唯有瑞利发现了惰性气体；不少人都有发现X射线的条件，唯有伦琴发现了它。可见善于观察是极为重要的一种能力。达尔文就曾说过：“我既没有突出的理解力，也没有过人的机智，只是在观察那些稍纵即逝的事物，并对其进行精细观察的能力上，我可能在中人之上。”巴甫洛夫的座右铭是：“观察、观察、再观察。”

为了替四化培养人材，我们在教学中，一定要培养学生的观察能力，使他们遇事(或问题)要多看看，多想想。不但要看

看,有哪些客观对象,它们是什么,叫什么,而且要想想,它们有何相同点,不同点,找出它们的联系来;使他们在看到周围的一件事情和现象时既要看整体,又要对细节有丰富而敏锐的“感知”,并能看出什么是非本质的特征,什么是本质的特征,是该事物和现象的本质属性;使他们不但能从一事物和一个现象中“看到”许多的东西,而且善于觉察它们独有的特征,不轻易放过个别与特殊的细节,等等。

在数学教学中如何培养观察能力呢?下面仅侧重研究在课堂教学中可以采用的一些方法与途径。

(一) 在概念教学中培养观察能力

概念教学是数学课堂教学的基本内容,对于概念教学的要求,传统的提法是“讲清概念”、“讲深讲透”,也就是说要使学生明确概念所反映的对象的本质,明确概念所包括事物的范围。

我们认为对于概念教学的教学目的,除了上述“知识要求”之外,还应增加下述“能力要求”,即结合学习概念的过程,培养学生的观察能力。

1° 在概念引入过程中培养学生的观察能力。

在教学中,为了引入新概念,首先就要使学生“感知”新教材。在数学课上,使学生“感知”新教材的途径一般为下列三种:

① 利用教材中提供的或教师补充的基本事实为材料,让学生“感知”它们,了解它们的各个侧面,然后分析、比较其不同点与相同点,从而概括出它们的共同本质,抽象出新的概念来。

【例】统编教材 §4.1 “常量与变量”概念的引入是这样叙

述的:

看下面的例子:

(1) 火车以 60 公里/小时的速度行驶, 它走过的路程 s (公里) 与时间 t (小时) 之间的关系是 $s = 60t$.

(2) 一个圆的面积 A (平方厘米) 与它的半径 r (厘米) 之间的关系是 $A = \pi r^2$.

可以看出: 在(1)中, 利用公式 $s = 60t$ 计算火车在不同的时间内所走过的路程时, t 和 s 可以取不同的数值, 而速度的数值保持不变; 在(2)中, 利用公式 $A = \pi r^2$ 计算不同半径的圆的面积时, r 和 A 可以取不同的数值, 而 π 的数值保持不变.

定义: 在某一过程中可以取不同数值的量, 叫做变量. 如上面例子中的 t 小时, s 公里, r 厘米, A 平方厘米. 在过程中保持一定数值的量, 叫做常量, 如上面例子中的 60 公里/小时. 我们看到, 通过实例而引入概念的观察过程可以分为三步:

1. 感知材料, 即“看下面的例子”这一段, 教学中还可以补充几个实例.

2. 分析比较, 即“可以看出”这一段, 从培养观察能力来说, 这是关键的一步, 一定要采用适当的启发式教学法, 使尽量多的学生确实是“自己独立地看出来”的, 而不是别人代替看出来的, 或者干脆是老师讲出来的.

3. 概括定义, 即“给出定义”这一段, 这是知识教学最后要求落实、要求学生掌握的内容, 在传统教学中, 一般是重视它的.

这样引入概念, 在数学书中是很多的, 如果我们从低年级起就培养学生既掌握概念实质, 又提高观察能力, 不但可以实现“知识”与“能力”两方面的教学目的, 还将有利于学生提高

自学的能力,这一过程虽然较长,但“日久”必能“见真功”。

② 进行复习性练习,将学生已有的旧概念与要学的新概念联系起来,通过“以旧引新”来引入新概念。

【例】统编教材 § 6.3 “对数”概念的引入是这样叙述的:

我们知道,2 的 4 次幂等于 16,可以记作 $2^4 = 16$,这里 2 是底数,4 是指数,16 是 2 的 4 次幂。

反过来,我们要表示 16 是 2 的多少次幂,可以记作 $\log_2 16 = 4$,这里 2 仍然叫做底数,16 叫做真数,4 叫做以 2 为底、真数 16 的对数,这个式子读作:“以 2 为底的 16 的对数等于 4”。

定义:一般地说,设 $a > 0$, $a \neq 1$,那么 a 的 b 次幂等于 N ,记作 $a^b = N$ 。反过来,如果我们要表示 N 是 a 的多少次幂,就可以记作: $\log_a N = b$ 。这里 a 仍然叫做底数(简称底), N 叫做真数, b 叫做以 a 为底的 N 的对数。

我们看到,通过复习而引入概念的观察过程可分为三步:

1. 复习性练习,即“我们知道”这一段,教学中还可以补充几个指数计算题,特别要做为对数“打埋伏”的“反练习”题。

2. 提出新问题,即“反过来”这一段,在新问题解决之后,要做一些巩固性练习,加深新概念的具体形象,为下步抽象作准备。

3. 定义新概念,即“给出定义”这一段。“以旧引新”是教学上经常采用的教法,一般都有较好的教学效果。

③ 为学生提供一些实物和直观教具,让学生亲自看一看,以便直接感知对象,从观察中获得感性认识,形成正确概念。

【例】统编教材 § 5.4 “异面直线”概念的引入是这样叙述的:

观察:六角螺母的棱 AB 和 CD 的位置;

机械部件蜗轮的轴线和蜗杆的轴线的位置，可以看出它们都不在同一平面内。

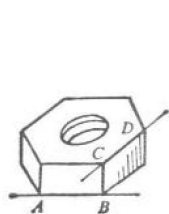


图 1

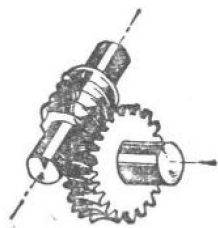


图 2

定义：不在同一平面内的两条直线叫异面直线。

为了通过直观教学，引入概念和培养观察能力，教师应当：

1. 在演示时，要引导学生仔细地观察，适当地边看边讲，指导学生看什么，注意什么问题，防止学生只注意次要部分，而忽略了对主要部分的“感知”。

2. 在演示后，要鼓励学生提出问题，发表观察感想。一般说来，学生越是进行精细观察，就越能提出更多的问题，也就越能弄懂这些问题。

3. 在学生积极思考的基础上，要将感性认识上升为理性认识，适时地引入概念，并结合实物或教具加以巩固。

2° 为了巩固所学的新概念，常常可给学生留一些观察性习题，做这类题目，可以同时达到巩固概念与培养观察能力的双重目的。

【例】1. 电扇旋转时，形成什么平面图形？

2. 把 5 分硬币旋转时，形成什么立体图形？

3. 从一点出发引出 3 条射线，其中可以构成：(1) 小于周角的角有多少个？(2) 小于平角的角最多有多少个？小于直角的角最多有多少个？(4) 如果引出 4 条射线呢？ n 条呢？

4. 观察时钟: (1) 时钟的分针, 1 分钟转多少度的角? 5 分钟呢? 1 刻钟呢? 半小时呢? 1 小时呢? (2) 时钟的时针, 1 小时转多少度的角? 1 分钟呢? (3) 时钟在一点钟时, 时针与分针构成的最小夹角是多少度? 若 3 点钟、6 点钟、7 点钟、12 点钟、3 点 45 分呢? (4) 几点钟时, 时针与分针的最小夹角恰好成直角、平角?

5. 下列哪些图形既是轴对称图形? 又是中心对称图形?

- | | |
|-------------|----------|
| (1) 等边三角形, | (2) 矩形, |
| (3) 等腰梯形, | (4) 菱形, |
| (5) 五角星, | (6) 圆, |
| (7) 一对相交直线, | (8) 线段, |
| (9) 一对平行直线, | (10) 直线. |

3° 在概念的复习过程中培养观察能力.

【例 1】 将下列图形分成两类, 并指出分类的标准; 分成三类, 并指出分类的标准:

- (1) 棱柱、棱锥、棱台、圆柱、圆锥、圆台.
(2) 圆、椭圆、双曲线、抛物线.

在复习中, 善于观察并选定分类标准, 将有利于学生将各种概念系统化.

【例 2】 学习了正比例、反比例、一次函数、二次函数之后, 可以引导学生归纳总结“研究函数的一般步骤是什么”的问题. 通过比较、分析, 虽然研究这四个函数有许多不同之处, 但学习研究它们的一般步骤是相同的, 即按照下列顺序来研究每一个函数: 定义 $\Rightarrow$ 定义域 $\Rightarrow$ 图象 $\Rightarrow$ 性质 $\Rightarrow$ 应用.

有了这种一般性的认识, 不仅有利于总结这四个函数, 而且可以用它来指导学习新的函数. 若训练较好, 完全可以让学学生运用这些能力去自学指数函数、对数函数等新知识.