小学数学课程与教学

XIAOXUESHUXUE
KECHENG
YUJIAOXUE

杨庆余 编著

上海科技教育出版社

序　言

在以前很长一段时间内，事实存在或至少在老百姓中流传过这样的看法：小学教学是比较容易的，小学数学教学更是十分简单。在那时候，只要你认识阿拉伯数字、会做四则运算，就能当小学数学教师。然而，随着我国近二三十年来关于基础教育重中之重战略地位的确立，小学数学教学改革发展到今天，现有的大量资料（尤其是来自于现在从事小学数学教学或研究的报告）显示：事情已经改变了。儿童如何学数学？教师如何教数学？从观点到行为已经出现深刻的转变，已经走向一个高度专业化、具有科学规范以及极富创造力的复杂过程。

一个平衡的取向同时需要知识和智慧，就是说，优秀的小学数学教师既需要了解什么是最基础的数学（它的内容、方法和意义），又需要明白小学教学自身的价值，并熟悉究竟是怎样的过程才使小学数学教学得以成功。研究者们所产生的知识是铸造所有教育成功的一种力量，这当然包括针对教师所做的有益探索。这样的知识会改变教师应如何设计、如何行动的广泛期望。至于教师从经验中所习得的智慧，虽然很难诉诸规则说理的文字或语言，但是，由经验而生的理解却可提供教师一个重要的方向。在当今一些为未来或现任教师制订的学习计划中，专业的智慧已得到相当的重视与发展，常常通过叙事式的情境描绘、开放式的分析与讨论，从而分享来自于课堂经验的智慧，这已成为一种艺术。

如上所述，一个是关注小学数学教学专业化发展的深刻转变，另一个是采纳知识与智慧相平衡的教师学习取向，其实这也正是杨庆余先生积十几年心力编写此书的显著特点，其中至少体现在

如下几个方面：

1. 从本书的论述模式看，本书作者力图跳出原来中等师范学校的小学数学教材教法的框架，站在专业化的高度，从对小学数学学科性质的认识出发来阐述小学数学课程的基本性质与主要任务，并以发展的眼光、现代的教育理念来论述小学数学课程的变革与发展，结合国际小学数学前沿发展以及我国新一轮基础教育课程改革来分析今天的小学数学课程与教学。

2. 从本书的论述角度看，作者始终将目光聚焦于儿童的学习，以此为轴心来诠释课程目标、分析课程内容、解剖课堂活动、描述学习类型、归纳教学模式、介绍新的研究成果，处处关注学生学习方式的转变和积极主动的认知发展，侧重于围绕着“学”而不是“教”来展开。

3. 本书在论述小学数学课程与教学的有关理论与知识的同时，还举出了不少具体的案例，有生动的“故事”，也有疑难的“问题”，这些故事和问题既是教学智慧的结晶，具有叙事的魅力，又是开放式讨论的“靶子”，可为进一步思考与探索留出较大空间。正如本书作者所说：“小学数学教师的任务不仅仅是接受新的模式，而是要去不断丰富和发展教学模式。”

有特点的书总是难写的。这是因为，所谓特点就是要有自己的东西，别人的东西可以抄，自己的东西全凭“做”和“想”，更何况要做和想的是一个过去尚未成熟的专业。做没有尽头，想更无止境。全书存有一定的不足甚至误漏是情理中的事，我想这应当在日后不断的讨论和再版修订中臻于完善。

顾泠沅

2003 年 1 月 22 日

目　　录

第一章
小学数学教育的性质和任务

数学是什么？它究竟有哪些性质和特征？而作为学校课程的数学(或称作为学科的数学)又有哪些性质和特征？数学教育，尤其是小学数学教育的本质又是什么？这些问题都是构成数学课程与教学的基本的认识问题。

第一节 数学及其数学学科

一、数学的本质及其特征

1. 数学是什么

数学(Mathematic)是什么？多少年来，人们一直试图从哲学层面思考这个问题。追溯到公元前4世纪，柏拉图(Plato)及其学生亚里士多德(Aristotle)等就认为，数学的对象就是存在于思想之外的客观世界。一直到了19世纪的中叶，非欧几何的确立，促使人们开始认识到，数学除了存在于客观的外部世界之外，还存在于人类的头脑中，因为人类的头脑具有构造新的数学的能力。于是，数学开始逐渐摆脱对现实世界(实验的或感觉的)的依赖，走向对逻辑体系的依赖。

厄尔内斯特(P. Ernest)指出[①]，对数学知识本质的认识，2000多年来，我们一直是从知识的哲学的角度来这样考量的，认为知识可以依照对其进行论证的依据来分类，分为“先验知识”和“后验知识”。所谓先验知识，就是“由仅仅根据推理而断定的那些命题所组成，而不依赖对现实世界的观察”，而“这里的推理由逻辑演绎及词语的涵义构成”。所谓后验知识，是指“由依据经验确定的命题组成”，它“依赖对世界的观察”[②]。从而推断出，“数学知识归属于先验知识，因为它只由基于推理而断定的命题而构成。推理包括演绎逻辑和所用的定义，连同我们所假定的数学公理或公设，构成了推断数学知识的基础。由此，数学知识的基础，即确定数学命题

① 参阅 Paul Ernest:《数学教育哲学》，上海教育出版社，1998年版，第4页。

② 同①，第5页。

真理性的依据，是由演绎证明所组成的”。

而一些建构主义者认为，虽然人类的知识、规则和约定对数学真理的确定和判定起着关键的作用，但是数学知识和概念本身是发展和变化的，是在猜想和反驳中得到发展的。他们认为，从数学知识的生成角度看，可能一个新的数学知识从主观知识（个体创造的知识）开始，在生成过程中，个体可能是先去“再建构”那些客观知识，同时，在某些方面的制约下（如个体的理解力、深层的判断以及推理等），使知识的呈现具有一定独特性的主观表征，并再对这些具有主观表征的知识进行某些“再创造”，从而建构具有自己独特性的数学知识。这些知识通过发布与共享，在更多群体间的审视、修正等活动后再形成并被接受，就成为客观知识。而在数学学习中，这种新的客观知识又被个体内化和建构，成为个体的主观知识，为个体的数学再创造和新的建构提供条件。

弗兰登塔尔（H. Freudenthal）认为：“普通常识的经验被结合成为规律，并且这些规律再次成为普通的常识，即较高层次的常识，作为更高层次数学的基础。”[①]赫什（P. B. Hirsch）也认为[②]，数学的对象虽然是由人类发明和创造的，但是它们不是任意被创造的，而是在已经存在着的数学对象的活动中以及从科学或日常生活的需要中产生的。数学知识一旦被创造，其所具有的性质的确定性就是明确的，虽然有时可能我们难以发现这些性质，但它们却是独立于我们的知识而存在的。可见，从数学由其发生（即生成）的角度看，它的体系实际上是由“发现性知识”和“构造性知识”两部分所构成的。前者是指存在于现实世界中的具有确定性的“事实”，而后者则是指通过一定的逻辑规则“创造”的具有确定性的

① 参阅弗兰登塔尔：《数学教育再探》，上海教育出版社，1998 年版，第 14 页。

② 参阅 D. A. 格劳斯：《数学教与学研究手册》，上海教育出版社，1998 年版，第 87 页。

"性质"。

实际上，只要我们考察一下数学的历史，就可以看到它的发展存在着两个起点：

一个是以实际问题为起点，即是为了了解客观存在的内部性质的需要，用以解决实践上的问题。例如，力学中要研究抛物体的运动轨迹，需要用图形来描述，从而帮助分析，但如何作出这些曲线图形呢？笛卡尔用代数方法来研究这些曲线的特点，于是解析几何就产生了。

另一个是以理论问题为起点，即是为了了解思想存在的内部性质的需要，用以解决理论上的问题。例如，5世纪的普多克罗斯(Pudkyols)注意到，一个圆的直径可以将整个圆分成两半，但由于圆的直径有无限多，因此，必定存在着两倍于直径的半圆。而伽利略却注意到，每个正整数与它的平方能建立一一对应的关系，而这些正整数的平方的集合应是正整数集合的真子集，这样就构成了一个整体和它的部分相等的悖论(史称伽利略悖论)。为了解决这个悖论，康托(Kant, I.)等作了研究，创立了集合论，并创造性地提出了"超越数"的概念。

当然，数学的最终起点还是现实世界，它更多地来自于人类的问题提出和问题解决，是人类力图对现实世界的最本质的和最一般的反映。超越现实世界的数学的产生，其目的还是为了获得对现实世界更合理、更准确的最一般的反映。那么，这个最一般的反映又是什么呢？

恩格斯曾对数学的这种性质作过如下的描述[①]："数学就是研究现实世界的空间形式和数量关系的一种科学。"而近来，人们逐渐开始发现，数学不仅仅是研究空间形式，也研究空间关系。同时，数学也不仅仅是研究数量关系，也研究数量形式。

① 参阅恩格斯：《反杜林论》，人民出版社，1970年版，第3页。

综合各种观点，不妨借鉴前苏联的《哲学百科全书》中关于数学本质的描述①，对什么是数学作这么一个回答：数学是一门撇开内容而只研究形式和关系的科学，而且首先主要是研究数量的和空间的关系及其形式。一般说来，数学的研究对象可以是客观现实中的任何形式或关系，只要这些关系和形式在客观上能完全独立于它们的具体内容，而又能精确地表达它们的概念。因此，数学就可以定义为：是关于逻辑上是可能的、纯粹的（即抽去了具体内容的）形式科学，或者说是关于关系系统的科学。

为此，我们似乎就可能获得这么一个简单的结论：数学是研究存在的（或称客观的、现实的）的形式或关系的科学，即是对现实世界的研究。同时，数学还是研究思想的（或称主观的、先验的）的形式或关系的科学，即是对数学世界的研究。数学还具有这样几个性质②：第一，数学的对象是由人类发明或创造的；第二，数学的创造源于对现实世界和数学世界研究的需要；第三，数学性质具有客观存在的确定性；第四，数学是一个发展的动态体系。

2. 数学有哪些特征

一般认为，数学具有抽象性、逻辑严谨性和运用的广泛性这三个特征。

2.1 抽象性

我们知道，任何一门科学都不是直接处理现实对象，而是用一定的方法去处理其抽象的反映，这些方法就是我们通常所说的“模型”。而数学则是处理所有这些模型的抽象，是这些模型的一般模式。数学抽象性的最显著的特征，就是往往用模型来概括同类对

---

① 参阅张永春：《数学课程论》，广西教育出版社，1999 年版，第 16～17 页。

② 参阅唐瑞芬主编：《数学教学理论选讲》，华东师范大学出版社，2001 年版，第 6 页。

象或同类对象关系。显然，数学是抽去了具体内容的一种形式，是作为一个独立的客体而存在的，它是用形式化、符号化和精确化的语言来表现的一种“抽象的抽象”或“概括性的抽象”，它是以“一切存在的抽象的模型的模型[①]”而呈现的，是一种不具有任何物质的和能量特征的抽象。例如，数学研究的“直线”，是一种没有长短、粗细、轻重和颜色等任何能量特征的“理想化”的对象。

2.2 逻辑严谨性

数学具有严密的逻辑严谨性，即数学的结果是从一些基本概念（或公理）出发并采用严格的逻辑推论而得到的。这种推论（推理）对于每一个懂得这样的规则并拥有一定数学基础的人来说，都是无需争辩的和确信无疑的。在这里，经验能起到一定的作用，但经验本身却不是获得数学推论的依据。数学的逻辑严谨性还带来了数学的精确性，也就是说，数学的表述具有相当严密的惟一性。而且数学语言常常反映在其他学科（尤其是自然学科）之中，用来准确地表述概念或由经验所获得的发现。

数学的逻辑严谨性还表现在它的系统性。数学体系本身是一个精确的自然结构，而且是所有自然结构中最具有完美模型特征的。它是以最简洁、最精确、最稳定的模型来揭示最本质、最抽象的关系系统的理论。通常认为，科学的逻辑结构要素是原则、法则、基本概念、理论、思想等，而数学尤为注重法则（规则）。从算术的角度看，其知识的主要逻辑结构的要素是概念、性质、定理、法则、公式、基本方法、基本思想等等。

正如弗兰登塔尔所说[②]，数学与其他思维相比，有一个最大的特点，那就是对任何一个陈述都可以确定其对或错。因为只有数

---

① 参阅弗利德曼：《中小学数学教学心理学原理》，北京师范大学出版社，1987 年版，第 49 页。

② 参阅弗兰登塔尔：《作为教育任务的数学》，上海教育出版社，1999 年版，第 136 页。

学可以加上一个强有力的演绎结构。这就是所谓数学的逻辑严谨性。当然，当数学科学变得很严谨的时候，它就表现出一种不可忽视的人为的特性，以至于它忘掉了自己的历史起源，如常常只显示出问题是如何解决的，却没有显示出问题是如何提出的，以及是为什么提出的，等等。

2.3 运用的广泛性

数学的对象领域涉及到整个客观世界。数学是解决我们生活和生产中所碰到的问题的主要工具。因为没有一个物质的领域不呈现出数学可以研究的现象或规律，尤其是科学技术发展到今天，数学已经渗透到人们的所有生活之中，所以，数学可以运用到各个方面。同时，数学还在其他的科学中占有特殊的地位，因为无论是自然科学、社会科学还是思维科学，都可借用数学的逻辑严密性和抽象性来做更为精确的研究或描述。

二、数学学科

“学科”是一个教育学的概念，是学校课程内容中的一定科学领域的总称。当数学成为学校的教育教学对象时，就被称之为“数学学科”。它源于数学科学，又有一定的独特性。

1. 数学学科的特定性

数学学科自然是由数学知识构成的，因此它也具有明显的结构性和层次性。构成数学学科的知识，有的属于构造性知识，如一些公理性知识，像几何系统中的“点”、“线”这样的知识，往往是构成知识系统的基础，是一些基本的元素；有的属于常规性知识，如“十进位制计数法”、“除法运算法则”等，这些知识往往是构成数学推理或数学语言的基础，使得某些逻辑运算有可能按一个同一的规则来进行；有的属于特构性知识，如“等势”等，用来解释或描述一些关系；更多的是属于发现性知识。所谓构造性知识，即非依赖

于对观察自然界而客观存在的知识。所谓发现性知识，即是一种客观性事实或规律，数学的任务是将这些客观性事实或规律抽象成一个个的模型。

2. 数学学科的逻辑性

数学学科的课程从产生开始，就显示出知识内容之间很强的逻辑性。因为数学学科的课程是在研究人类数学科学的基础上逐步演化而来，而数学科学的形成与发展又是在严密的逻辑推理上建立的，所以说，数学学科课程秉承了数学科学的固有特征。同时，由于数学学科所面对的人群的特定性的不同，这种逻辑性体现在数学学科的内容上就有两个明显的特征，即显示数学科学内在的逻辑性和适应学生心理发展的逻辑性。

2.1 显示数学科学内在的逻辑性

对数学学科的内容来说，它与数学科学一样，其内在知识的逻辑联系是十分紧密、层层相连、缺一不可的。往往前面阶段学习的知识是后面学习的基础，而后面学习的知识又是前面知识的发展。例如，小学数学中的加法交换律，学生从一年级起在认识 10 以内的数时，教材就开始渗透两个数位置交换，它们的值不变的意识；在二年级学习两位数加法时，又渗透这种意识；直至三年级教材才安排讲解这一定律概念。而在五、六年级的教材编排中，又安排了用小数和分数来进一步强化认识加法的交换律。这前后之间具有很强的逻辑关系，如果没有低年级的具体数据的渗透，那么高年级学生就不能理解抽象的定律。

2.2 适应学生心理发展的逻辑性

虽然数学科学是不依附于任何人而独立存在的，但是数学学科是依附于受教育者而存在的。因此，数学学科的知识除了遵循其自身的内在逻辑之外，还必须遵循学生的心理发展的逻辑性，要按学生心理发展的规律来组织学习内容。这种逻辑性体现在其内

容体系上，一般都是按由易到难、循序渐进的程序排列的，这种排列可以有序地发展学生的心智技能。

如上面所说的加法交换律，课程之所以安排三年级学生才正式学习加法交换律概念，就是根据儿童心理发展的规律来设计的。通常，儿童在三年级的年龄阶段，思维发展水平才逐步从形象思维过渡到抽象思维，守恒概念才开始真正建立。只有在这一阶段他们才有能力来理解、接受抽象的数学定律。而如果将加法交换律放在一年级阶段直接向学生讲解，那么就不符合小学生的心理发展规律，儿童也就无法理解，更不可能发展他们的心智技能。

当然也应该看到，当数学学科的课程过于依赖数学科学固有的注重逻辑性和惟一性特征时，在课堂学习过程中，就容易对儿童思维品质的形成产生一定的负面影响，特别是对培养他们的创造性思维影响更大。“可以想象，当一门学科经过专家、学者的专门整理，成为一种最经济的继承科学知识的学习框架时，它就有可能转化为一种难以完全按照学习者的需求，以及学习者现有的经验和认知水平的发展规律来思考的课程策略。”[①]学生在课堂中，他们的思考方向、学习过程和结果，很容易被专家们精选组织的教材内容和形式所左右，学生们往往很难按照自己观察到的方式去解释自然现象和社会现象，很难按照自己思考的方式去获得发现。当我们“让儿童面对的是那些大量的、由成人自上而下地从文化中选择或编造出来的，而往往又仅是社会的数学精英们谙熟的，却与儿童的生活相割裂的，以生疏的符号、概念、命题或公式为主要呈现方式的那些数学主题、语言和材料[②]”时，我们就把学习者的学

---

① 参阅孔企平等：《小学数学教学原理与方法》，华东师范大学出版社，2002 年版，第 12 页。

② 参阅杨庆余：小学数学教育中 hands-on 的一些断想与尝试，《2001 海峡两岸小学教育学术研讨会文集》，高雄复文图书出版社。

习活动与认识世界的过程割裂开了。

第二节 对小学数学的再认识

作为教育的数学和作为科学的数学是不完全相同的。首先，从知识体系看，作为科学的数学，是一个完整的、独立于任何人的任何知识结构而存在的特定的知识和思想体系。而作为教育的数学，则是一个经过人为的加工和提炼的，依据某一特殊人群（作为获得基础的人类文化遗产的学生）的特殊需要（即数学教育的目标）和经验、知识与能力结构而设计的知识和思想体系。第二，从数学活动看，作为科学的数学，是一类专门的人（可以称之为“数学家”的那些人）的一个完全独立的探索、发现与创造的活动过程。而作为教育的数学，则是一类专门的人（可以称之为“学生”的那些人）在某些专门的人（可以称之为“教师”的那些人）的引导和帮助下的一个模仿探索、发现与创造的活动过程。第三，从对象看，作为科学的数学，其对象是一个完全由符号、概念和规则等构成的和完全开放的逻辑结构系统。而作为教育的数学，其对象则是含有经验、直观的和几乎是封闭的逻辑结构系统。最后，从活动的目的看，作为科学的数学活动，是为了获得发现和创造数学。而作为教育的数学活动，是为了“接受”已经发现和创造的数学。

一、生活数学观

长期以来，我们一直认为，作为教育的数学，就是指存在于数学科学体系中的，并经专业人士或专家加工和重新组织的一部分——被精简了的和形象化了的最基础的那一部分。正像厄尔内斯特描述的那样，我们一直认为，“数学是由人造就并惟一地存在于人的大脑，因此，学习数学的人的大脑造就或再造就数学就是必

然的。在这个意义上，学习数学的人正是造就数学的人"[①]，即学习数学就是为了在大脑中"再造就"系统的和严密的数学知识。因此，我们往往将学校数学和科学的数学一样，也看作是一种形式数学。

而生活数学，是一种存在于生活实践活动中的非形式数学，是人们在社会生活实践活动中获得交流和理解的数学。长期以来，人们一直将生活数学排斥在数学科学之外，认为它是一种纯经验的、非精确化了的、没有一个自然结构和严密逻辑体系的知识群。于是，人们就认为，作为科学的数学，是一种抽象符号的数学，更多运用的是逻辑和推理；而作为生活的数学，则是一种经验符号的数学，更多运用的是语言和直觉。

正因如此，长期以来，我们是将儿童在学校的数学学习活动与他们在生活中的经验活动割裂开的。实际上，儿童在日常的生活实践中，也有许多的有意识的经验活动（被认为是形成"日常科学"的途径），并通过这种活动形成了许多的"日常概念"（也称为前科学概念——一种由经验而形成的非精确化的概念）。如果儿童的数学学习成为"日常概念"与科学概念交互作用的过程，那么这种学习是将儿童日常的生活或经验与数学科学结合起来的最好的桥梁。可惜，在数学教学中，我们常常不是去利用儿童已有的生活经验，而是可能会去用规范的数学概念将他们已有的生活经验与数学科学割裂开来。

长期的研究已经表明，儿童常常是通过探索他们自己的生活世界和精神世界来了解并获得学习的，是通过自己的大量的实践活动来获得数学知识的，是通过许许多多的问题解决过程来发展自己的数学认知能力的。儿童认识数学的起点并不是符号所组成的逻辑公理，而是他们自己的生活实践所形成的经验。儿童的数

---

① 参阅 Paul Ernest:《数学教育哲学》，上海教育出版社，1998 年版，第 244 页。

学活动也不是从观察符号开始,用逻辑推理来进行的,而是从观察现象,用特征归纳来进行的。

例如,一个儿童,两只手上都有几块糖果,他想知道有多少,就会用数数的方式,从一只手上的糖果开始数起,依次数到第二只手上的最后一块糖果。这样的活动进行了几次以后,他突然会将两只手上的糖果一起倒在桌上,然后再来数。于是,他就构建了基本的“加法”思想。

事实上,在儿童的生活中处处有着数学,数学就在他们所有碰到的现象中,在他们所有遇到的问题中,在他们所有采取的行为方式中。因此,“应该使数学成为儿童生活中的一个部分。我们要让儿童认识到,数学知识就是源于他们普通的社会生活的常识,他们当中的每一个人都有可能在一定的指导下,通过自己的实践活动来获得这些知识。要让儿童在接触属于他们自己的物质世界和接触其他儿童的过程中发现问题,并能用数学的思想和方法去解决问题,从而有可能去建立数学概念,形成数学结构,发展数学素养。这就是儿童学习数学的实践价值所在”①。

尼斯(Niss)指出:“数学教育的目的应该使学生能够认识、理解、判断、运用数学,并能经常在社会中运用数学,特别要在对学生的个人、社会及职业生活有实际意义的背景中运用数学。”②厄尔内斯特也认为③:“数学是社会的建构,它的发展来自人的创造和人的决断,因此,中小学数学不应是外在的知识,让学生感到陌生,而要处于学生的文化和生活现实中。”正如杜威(Dewey)所说④,必须填平儿童兴趣和经验与科学之间的鸿沟,儿童的经验和文化应

① 参阅杨庆余:我们应该怎样教数学,《学科教育》,2001年第12期。

② 转引自 Paul Ernest:《数学教育哲学》,上海教育出版社,1998年版,第245页。

③ 同②,第247页。

④ 同②,第240页。