

基本館藏

131921

統計會計應用數學

譚啓棟編著



立信會計圖書用品社出版

1953

594.01
0134

~~40172~~

131921

統計會計應用數學

譚啓棟編著

立信會計圖書用品社出版

1953

書號 905304

統計會計應用數學

★版權所有★

編著者 譚 啓 棟

出版者 立信會計圖書用品社
上海河南中路三二九號

總經售 中國圖書發行公司

印刷者 蔚文印刷廠
上海吳淞路二五七號

序言	1—2	正文	1—286
----	-----	----	-------

目錄	1—3	附錄	287—293
----	-----	----	---------

(字數 229,000字)

1953年11月初版(科學型) 0001—9000冊(統一訂)

新定價 ¥ 16,000

* 上海市書刊出版業營業許可證出零貳貳號 *

序 言

在我還在學淺學習的時候，當時爲了個人興趣想學習數理統計。爲了打好數學基礎曾經請教過老師，我問“學統計應該學些甚麼數學；微積分上那些地方最有用處？”但沒有得到很滿意的答復。後來我工作了，看到一位多年的數學教員，他將一本葛氏微積分背得很熟。無論是工學院、理學院、商學院…，只要是請他教微積分總是這一本。我當時很懷疑，難道說葛氏微積分就是萬金油！自此後我決定先研究統計，再由我學的數學去配合它。我希望我能自己解決我在學校向老師所提出的問題。

1940年我到了前瀋陽農學院，指給我教的課程是農經系的微積分。同時行政方面及同學們再三的要求：理論與實際配合；理論與應用配合。由於同學們不斷的幫助，我知道雖然是數學，也是要看出是什麼病才吃什麼藥，決不可也拿一本葛氏微積分來應付。我先研究他們的課程表，知道他們需要數學較多的是統計及會計，因此針對這一要求寫了一本講義。教下來的效果很好，把幾個數學程度較差的同學也提高了，這當然與他們自己政治覺悟是分不開的。現在就根據這本講義又增加了一點材料寫成這一本書，這是我寫這本書的緣起。

本書共分十五章，把些統計及會計的問題溶合在數學內講解它的理論根據，但並不混亂數學的體系。我的討論方法，是先提出要解決的問題或能解決的問題，再講解數學理論；由數學理論中討論統計會計中的某些問題。若把它的系統寫出來正是：實際問題→理論→實際問題。

關於數學理論是採用直線式的寫法，在我主觀上認為用處較少的計算技巧及理論，未有提出。因為材料收集比較雜，所以在有些數學證明方面是不嚴密的。我認為數學不只是計算技巧，而數學理論體系及應用更重要，所以我在每章末都附有討論題及練習題。

總而言之，我認為數學是應該因為應用的方向不同，它的內容是有區別的，同時像這樣的參考書又很少。我燒出了這一個大拼盤，它的生熟及口味是否合適，請同志們多提意見。

譚 啓 棟

1953 年國慶節於瀋陽農學院

統計會計應用數學

目 錄

序 言

第一章 函數及作圖.....1

1. 數之分類 2. 常數 3. 複數及函數 4. 顯函數及隱函數 5. 函數之分類 6. 函數表示法 7. 座標 8. 垂直座標 9. 互的座標 10. 極座標 討論題 練習題

第二章 直線曲線及座標變換.....11

1. 解析幾何 2. 兩點間之距離 3. 直線與一次方程式 4. 兩直線間之夾角 5. 由三頂點座標求三角形面積 6. 三點在一直線上的條件 7. 圓及其方程式 8. 圓之切線 9. 橢圓及其方程式 10. 雙曲線及其方程式 11. 拋物線及其方程式 12. 座標變換 13. 圓錐曲線與二次方程式 14. 高次方程式的軌跡 15. 小結 討論題 練習題

第三章 冪數對數及對數座標.....44

1. 冪數 2. 對數及反對數 3. 對數的應用 4. 常用對數 5. 常用對數之分析 6. 對數表的讀法及應用 7. 自然對數 8. 底數的變換 9. 常用對數表的編製 10. 對數函數及冪函數之圖示法 11. 小結 討論題 練習題

第四章 級數與排列組合及二項式定理.....59

1. 等差級數 2. 等比級數 3. 總和公式之應用 4. 排列 5. 組合 6. 二項式定理 7. 高級等差級數 討論題 練習題

第五章 利息及貼現.....72

1. 利率 2. 單利與複利 3. 單利計算 4. 複利計算 5. 利率表之應用 6. 貼現 討論題 練習題

第六章 年金與折舊 83

1. 年金 2. 年金種類 3. 年金終值 4. 年金現值 5. 同時期期初年金與期末年金之關係 6. 其他年金問題 7. 折舊 8. 直線折舊 9. 比率折舊 討論題 練習題

第七章 行列式及聯立一次方程式解法 103

1. 行列式 2. 行列式與子行列式的關係 3. 行列式的性質及其演算 4. 聯立一次方程式的表解法 討論題 練習題

第八章 代數函數的微分法 115

1. 極限 2. 無限小與無限大 3. 函數的極限值 4. 函數之連續性與可微性 5. 函數的導數 6. 代數函數之微分法 7. 高階導數 8. 微分 9. 導數及微分的幾何意義 討論題 練習題

第九章 超越函數之微分法 133

1. 三角函數之微分法 2. 反三角函數之微分法 3. 指數函數及對數函數之微分法 4. 關於微分法的小結 討論題 練習題

第十章 微分及導數之應用 145

1. 增量的近似求法 2. 切線及法線方程式的求法 3. 由導數求隱函數及顯函數 4. 極大極小問題 5. 轉折點 6. 函數作圖 7. 均值定理與不定式 8. 函數展開 討論題 練習題

第十一章 積分法 172

1. 積分常數 2. 基本定理 3. 替換積分法 4. 部分分數積分法 5. 分部積分法 6. 積分表 討論題 練習題

第十二章 定積分及其應用 185

1. 曲線下面積及定積分 2. 廣義積分 3. 面積 4. 體積 5. 平面曲線長 6. 積分值近似求法 7. 衆數分式的求法 8. 千馬函數及白塔函數 討論題 練習題

第十三章 偏微分重積分及其應用 203

1. 立體解析幾何大意 2. 偏導數 3. 偏導數之幾何意義 4. 全微分

5. 高階偏導數 6. 多變數函數之極大極小 7. 重積分 討論題 練習題

第十四章 機率及機率分配 228

1. 機率 2. 機率與二項式定理 3. 算術平均數及均方差 4. 期望值
5. 卜宜生的小數機本分配 6. 常態分配 7. 卜馬分配與 χ^2 分配
8. 白塔分配 9. t 分配及 F 分配 討論題 練習題

第十五章 配合方程式及插補法 254

1. 最小二乘法的配合理論 2. 利用對數函數求配合方程式 3. 配合方程式的經驗求法 4. 週期性資料配合方程式的求法 5. 等間插補
6. 非等間插補 7. 其他插補法 討論題 練習題

附 錄

主要參考書

第一章

函數及作圖

我們研究數學，在算術及代數方面是以數量為出發點；在幾何方面是以空間之關係為出發點。這也就是說數及空間關係是研究數學的基礎。在這章中所討論的主要就是這些基礎問題。

1-1 數之分類 數因其運算之結果可分為下列幾種：

A. 實數 a. 有理數 1. 整數 2. 分數

 b. 無理數

B. 虛數

上列數再分為正負兩種。

1-2 常數 在研究過程中其常保持不變之量稱為常數。如某一固定圓之半徑，有一類常數它們是恆保持不變的。如 $\pi = 3.14159$ 、 $e = 2.71828$ 、及 3、4...等。在慣例中常以 a 、 b 、 c 或 A 、 B 、 C ...代表。

1-3 變數及函數 在研究之範圍內可給予任何值之量稱為變量。因這種變量不受其他變量之限制，亦稱為自變量。一種變量之值若依其他變量而變者稱為依變量。變量在我們習慣上常以 x 、 y 、 z 、 u 、 v 及 w 等代表。

設我們全國種植糧食田地之總面積為 A (常數)，則我國糧食總收穫量就可以根據這一年單位面積產量來估計。我們可以寫成下列的式子：

設

$y =$ 全國總收穫量

$x =$ 單位面積產量

則

$$y = Ax$$

上式之 x 為變量； y 為依變量。因總收穫量是根據單位面積產量而求得的；也就是說 y 是依 x 變而變的。

一個合作社存入人民銀行 B (常數) 元，以單利計息。其利息為：

設

$$z = \text{利息}$$

$$x = \text{時期}$$

$$y = \text{利率}$$

則

$$z = Bxy$$

這一個式中， x 及 y 為自變量， z 為依變量。也就是說，一定的本金之利息是依利率及存入時期長短而決定。

如上例 x 及 y 相關之變量， y 之值乃由 x 而定，則 y 稱為 x 之函數。同樣，下一例稱 z 為 (x, y) 的函數。

在統計、會計中，主要就是研究各個有關數量的關係或由已知數量求出未知的數量。在數學上說就是函數關係。比如利息、年金、相關及代表數等。

1-4 顯函數及隱函數 根據相關變量之方程式的形式可以分為顯函數及隱函數。由方程式中很顯然的看出自變量與依變量之區別者稱為顯函數，反之稱為隱函數。

$$\text{a. } y = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad z = f(x, y)$$

$$\text{b. } x^2 + xy + 1 = 0 \quad f(x, y, z) = 0$$

上式之 (a) 很顯然的看出來 y 為 x_1, x_2 及 x_3 之函數； z 為 x 及 y 之函數。像這樣的方程式所表示的函數就是顯函數。則在 (b) 中就不容易看出那一個是依變量了。像這種表示函數關係的方程式稱為隱函數。

不過話又說回來了，在一件事物中到底誰是自變量，誰是依變量，

那並不是鐵定不移的，乃是看情況而有變異的。比若說我們知道本金，那麼求利息時，則利息是依變量，利率及時期為自變量。若求利率，則利率是依變量，而時期及利息為自變量。

1-5 函數之分類 函數以其運算方法大別分為兩類。一為高等函數，如干馬函數及橢圓函數等是。二為初等函數，因為初等實數函數為我們研究之主要對象，現將它分列在下面：

A. 代數函數

a. 有理函數

1. 有理整函數

2. 有理分數函數

b. 無理函數

B. 超越函數

a. 三角函數 $\sin x, \cos y, \dots$

b. 反三角函數 $\sin^{-1}x, \cos^{-1}y, \dots$

c. 冪函數 $e^x, a^x, \dots$

d. 對數函數 $\log x$

變數關係之演算只要加、減、乘、除及開方等方法能解決的就是代數函數。若變數間之關係要用對數、冪及三角法計算，或其他更進一步的數學方法者稱為超越函數。只有冪、對數或正弦、餘弦中含有變量者才是冪、對數或三角函數。若只含有冪常數就不是冪函數，像： $\log x$ 為對數函數。 $x \log a$ 就不是對數函數。其他的也可據這個例推論出它們的結果。

1-6 函數表示法 在本章第三節中已經談到過，統計及會計上的很多問題，只要是應用到數學的問題，絕大部份都是函數關係問題。怎樣去研究函數關係呢？那麼最先我們要知道函數關係是怎樣表現出來的。用數學方法我們可以用下列三種方法表示函數關係：

A. 用表來表示函數關係 就是將自變量列於第一列，每個自變量對應之依變量列於第二列。這一份表就表示了這兩個變量之關係。

〔例 1〕 若利率為年利六釐(6%)，本金一元以單利計息。問十年中各年之本利和為多少？

本利和是時間的函數，

$$\text{第一年之本利和} = 1 + 0.06 = 1.06$$

$$\text{第二年之本利和} = 1 + 0.06 \times 2 = 1.12$$

...

$$\text{第十年之本利和} = 1 + 0.06 \times 10 = 1.60$$

年數	本利和
1	1.06
2	1.12
3	1.18
4	1.24
5	1.30
6	1.36
7	1.42
8	1.48
9	1.54
10	1.60

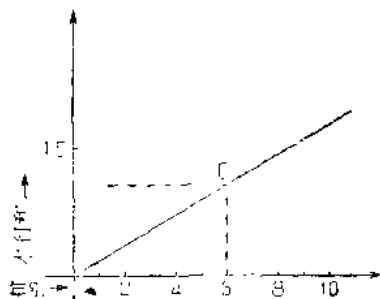
〔例 2〕 將東北 1946 年至 1951 年之水泥產量指數列一關係表
右表乃採自東北工業館，它表示了東北水泥產量突飛猛晉的情況。

東北水泥產量指數

年(t)別	指(P)數
1946	100
47	300
48	500
49	1300
50	2500
51	3300

B. 用圖形表示函數關係 函數關係用圖形也可以表示出來。由圖形中可以看出兩變量間之變化。關於圖示法留待下一節及下一章去詳細討論。現在舉兩個例在下面：

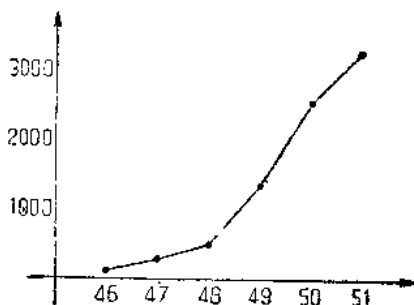
〔例 3〕 將例 1 資料以圖示法表示



以橫軸為年期，以縱軸為本利和，根據例 1 每一年期都有不同的本

利和。如期限為六年時，在橫軸 6 上作一垂直線；六年之本利和為 1.36，在縱軸 1.36 處作一縱軸垂直線；此二垂直線相交於 c ，同樣可得各年及其本利和之對應點；將各點連接起來。這一條線就是表示時間與利率為六釐單利計息之本利和的關係。為什麼道理呢？留待下節討論。

〔例 4〕 以圖形表示例 2 資料之兩量關係



作圖法與例 3 相同。這圖表現各年水泥產量的變動情況。

C. 用數學公式或方程式表示函數關係 變量間之關係除開上述之表列法及圖示法外，另外一種就是代數方法，也就是用一公式或方程式來表示變量間之關係。這一種方法是比較好的，因為它簡單，且能代表變量間無窮盡的變量值。若利用圖或表就不可能了。但這並不是說明用方程式的方法是最良的方法。因為在實際事物之量的變化中，常常有可以作圖、可以作表而不可能用方程式代表的時候。事實上一般經濟及社會現象，是不可能用抽象函數方程式來滿足的。如例 2 資料可以作一個變量關係的表或圖形，但要用一個非常簡單的方程式來完全代表它，是不可能的。

〔例 5〕 用一公式表示例 1 資料之函數關係

設

$$y = \text{本利和}$$

$$x = \text{期限}$$

則：

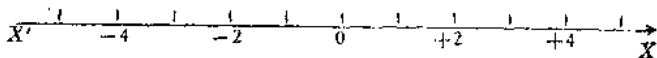
$$y = 1 + 0.6x$$

由所得公式結果很顯然比圖示法及表列法是簡單得多了，它不但代表了 1 至 10 年內之期限的本利和關係，而且表示了至任何期限的關係。

1-7 座標 圖示法在表示實際資料方面有它特有的效用。它能表示方程式不能表示的各種變量間之關係。它所表示的關係因係圖形所以較表列法更清晰易於接受。有時候在統計分析中，繪製統計圖是很重要的工作。它能幫助代數或分析方法解決配合方程式的問題等。

在數學部門中，有一種解析幾何學，就是利用圖形來分析函數關係的。也可以說是用代數方法來分析幾何學（圖形）問題。我們已經談到過，研究代數的最基本問題是數；在研究幾何（圖形）的最基本問題是點。怎樣使這兩個問題能聯繫起來呢？也就是說一組變量的關係數怎樣與點給統一起來呢？不論怎樣一種方法只要它能用數量表示一個點的惟一位置那就可以利用了。因此有垂直座標、斜座標、極座標等。由此我們得到一個新概念，數能表示點在平面或空間的位置。這決定點的位置的數稱為座標。

1-8 垂直座標 怎樣能決定數與點的關係呢？怎樣將它們統一起來呢？我們先談 $X'X$ 方向線段，作一線段 $X'X$ 。取向右為正向左為負，在其右段劃一箭頭表示之。在線段中點處取一點為零。則 $X'X$ 若左右無窮引伸時， x 之任何實數數值皆可以線段上之點表示。



一條方向線只能解決一個變量之點與數的問題。若是含有兩個變量，僅有兩個變量的問題，我們同樣可以劃一由下向上的方向線，代表 y 值稱為 $Y'Y$ 。使 $Y'Y$ 垂直 $X'X$ 以其交點處為零。則任何兩個變量之關係數值皆可在乎平面上之點表示（實數）。若某一問題含有三個變量，僅有三個變量的問題。則作一 $Z'Z$ 方向線向着自己。所有三個變

量之相關的實數值，皆可在空間之點表示出來。這種座標表示方法稱為垂直座標；因為各條方向線是相互垂直的。 $X'OX$ 方向線稱為 x 軸。同樣其它兩條稱為 y 軸，及 z 軸。

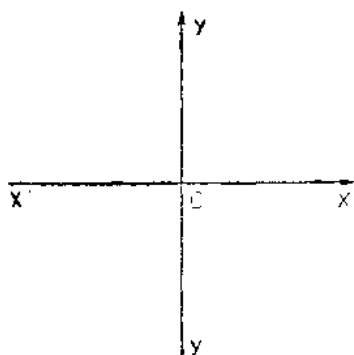


圖 1.

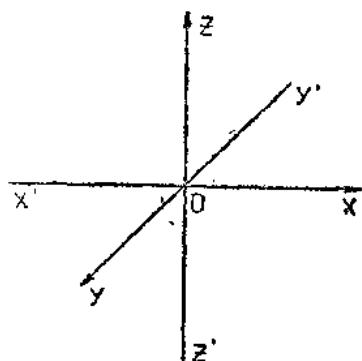


圖 2.

爲了講解便利起見，我們先討論兩個變量的問題，也就是平面的問題。因為只有兩個變量，所以也只需兩個垂直軸就夠了。因 x 軸之零點右方爲正左方爲負。 y 軸之零點上方爲正下方爲負，則此二軸將平面分爲四部份。此四部份 (x, y) 的值爲 $(+, +)$, $(-, +)$, $(-, -)$ 及 $(+, -)$ 我們通常稱此四部份爲第一、二、三及四象限。

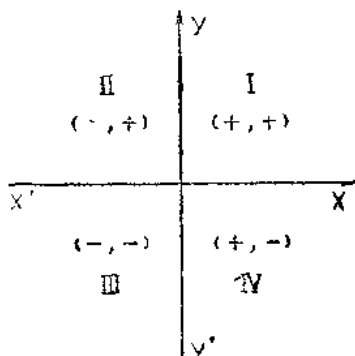


圖 3.

1-9 點的座標 決定點的位置的數量稱為點的座標。在這本書主要研究的是平面問題，所以我們談的點

的座標，就是決定平面上點的位置的數量。我們所應用的座標就是上節所介紹的垂直座標。

〔例 6〕求 (圖 4) A 及 B 兩點之座標

以 A 點作 $A'A$ 垂直於 x 軸 (亦稱橫軸), 量 $A'A$ 線段為 6 單位; 因其橫軸上方, 則其縱標值 (或 y 值) 為正。所以得 A 之縱標為 $+6$ 。再量零點至 A' 之橫標長度 (即 OA') 亦為 6 單位; 因 A 在 $y'y$ 軸之右方, 則其橫標值亦為正, 所以得 A 之標值亦為 $+6$ 。

因 A 之縱座標、橫座標皆為 $+6$ 它的座標寫為 $(+6, +6)$ 。

點的座標寫法是先寫橫座標後寫縱座標即 (x, y) 。

同理得 B 之座標為 $(-4, -6)$ 。

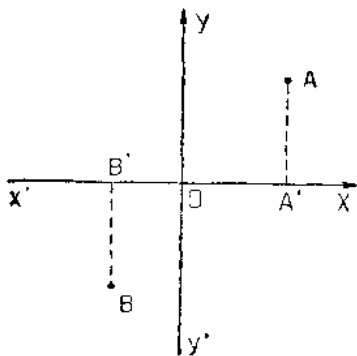


圖 4.

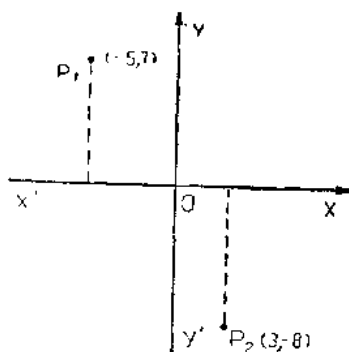


圖 5.

〔例 7〕 已知 P_1 點之座標為 $(-5, 7)$; P_2 點之座標為 $(3, -8)$ 。試求 P_1 及 P_2 之位置。

因為 P_1 之橫座標為 -5 , 在橫軸 O 點左方五單位處為起點, 因其縱標為 $+7$, 則向上引 $X'X$ 之垂直線, 至 7 單位處即為 P_1 之位置 (見圖 5)。

因 P_2 之橫座標為 $+3$, 縱座標為 -8 , 則橫軸 O 點右方三單位向下引橫軸垂直線, 至 8 單位即 P_2 點之位置。

這種繪圖所用之方格紙名為繪圖方格紙 (格藍複紙)。專為垂直座標繪圖用的。

1-10 極座標 由上一節中看出來: 只要有一定位置, 點就有它一

定的座標。決不能有一定位置的點有兩組或更多的座標，也不會沒有座標，或者有座標找不出點的位置來。否則這一座標方法就不能用來解決什麼問題。反過來說，只要一種座標制度能由一定的點的位置找到一定的座標；或由一定的座標找到一定點的位置。這一座標方法，皆可以拿來應用。所以除開垂直座標外，還有其他座標方法，現在介紹一種極座標，因為這本書不常用到它，這裏不多討論。

極座標就是由一定點（極點）及一定向線（極軸）決定某一點之方向及距離；這方向及距離就決定了一點之位置。這點之方向及距離稱為這一點之極座標。如右圖 O 點為極點； OA 為極軸。這種繪圖所用之紙稱為極座標紙（如圖 6）。

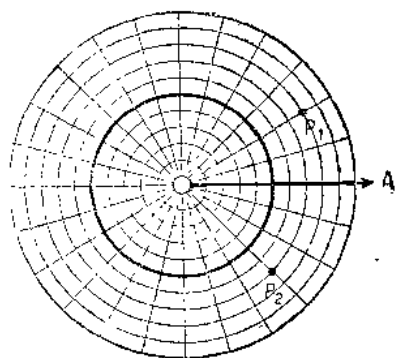


圖 6.

極座標之距離座標普通以 ρ （音日己）代表，乃以極點起算與方向角同方向為正，異方向為負。方向座標以 θ （音級塔）代表。乃以極軸反時針方向計算為正，順時針方向為負。其單位用角度或弧度皆可。

如圖 6 之 P_1 極座標為 $(8, 30^\circ)$ 。 P_2 之極座標為 $(7, -45^\circ)$ 。

討 論 題

1. 數有幾種，它是怎樣分類的？為什麼我們先談它？
2. 什麼樣的是虛數呢？什麼樣的是無理數呢？為什麼？
3. 什麼叫常數，變數及函數？請舉一個函數的例。
4. 函數有那幾種表示方法？試各舉一例說明之。
5. 代數中的數與幾何中的點是怎樣統一起來。試說座標的用途，座標要完成什麼樣的任務？
6. 何謂垂直座標？為什麼可以用作點與數的統一方法呢？它有那些要素。