微积分

清华大学基础課《微积分》編写組

科学出版社

微 积 分

清华大学基础课《微积分》编写组

科 学 出 版 社

1 9 7 1

内 容 简 介

本书力求从劳动人民的生产斗争和科学实验的实际经验出发，以分析微分、积分这对矛盾的发生、发展和转化为线索，阐述了微积分的基本分析方法，研究了微积分的计算和应用问题，初步打破了微积分教材的旧体系，“一把大锉捅破了窗户纸”，破除了微积分的神秘感。

本书共分四章，书中收集了一定数量的实例和练习。

本书可供初中以上文化水平的工农兵自学和理工科大学教学参考。

微 积 分

（只限国内发行）

科学出版社 出版

北京西直门外三里河路2号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

※

1971年4月第一版 1971年4月第一次印刷

定价： 0.38 元

毛主席語录

让哲学从哲学家的课堂上和书本里解放出来，变为群众手里的尖锐武器。

马克思主义的哲学辩证唯物论有两个最显著的特点：一个是它的阶级性，公然申明辩证唯物论是为无产阶级服务的；再一个是它的实践性，强调理论对于实践的依赖关系，理论的基础是实践，又转过来为实践服务。

事物矛盾的法则，即对立统一的法则，是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则。

毛主席語录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学军，也要批判资产阶级。

学制要缩短。课程设置要精简。教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

为什么人的问题，是一个根本的问题，原则的问题。

前　　言

微积分数学是客观规律的一种反映，它来源于劳动人民的长期生产实践．但是，旧的微积分教材中，却被那些资产阶级数学家们用唯心主义的世界观把它与实践割裂开来，变成纯粹抽象的概念，凭空构造出一整套脱离实际的所谓“公理化体系”，向人们灌输资产阶级形而上学、唯心主义．旧大学中一些工农学生就是因为过不了数学这一关而被迫退学．资产阶级把数学变成了对劳动人民实行思想统治和文化专制的工具．伟大领袖毛主席教导我们：“**无产阶级必须在上层建筑其中包括各个文化领域中对资产阶级实行全面的专政．**”经过无产阶级文化大革命的锻炼，我们在工人阶级的领导下，向资产阶级这块世袭领地发起了进攻，开展了轰轰烈烈的教育革命．编写这份《微积分》教材，就是我们参加这场斗争的一个初步尝试．

《微积分》的编写得到了工农兵的大力支持，实行了工人、革命技术人员、革命师生的三结合．我们以毛主席的《实践论》、《矛盾论》两篇光辉哲学著作为武器，揭露矛盾，分析矛盾，批判旧教材的唯心主义和形而上学，注意从具体的实践经验中抽象出数学的概念和规律，注意突出微分与积分这对基本矛盾的辩证关系和数学为实践服务的思想，努力使微积分新教材成为劳动人民认识世界和改造世界的工具．这份《微积分》教材经过初步试教，收到了一定的效果．革命实践使我们更加深刻地体会到：毛主席的光辉哲学思想，是我们编写

新教材的根本指导思想；工农兵的需要，是我们编写新教材的出发点；火热的三大革命运动，是我们编写新教材的源泉.

在我国伟大的社会主义革命和社会主义建设的新高潮中，如何使数学更好地为三大革命实践服务，为赶超世界先进水平服务，是摆在我们面前的重大课题.《微积分》虽然与读者见面了，但由于我们活学活用毛泽东思想不够，教改实践还很少，难免有不少缺点和错误，我们热诚地希望广大工农兵读者和革命知识分子提出批评意见，以便使我们更好地遵照毛主席关于“**教材要彻底改革**”的伟大教导，继续高举革命大批判的旗帜，把数学教材的改革进行到底，夺取无产阶级教育革命的更大胜利.

清华大学基础课《微积分》編写組

一九七〇年十二月

目　　录

毛主席語录

科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。

第一章　微积分的研究对象

第一节　运动、变量和函数

一、基本的数量分析(实例)

自然界中"**没有什么事物是不包含矛盾的**"，一切事物由于内部矛盾的存在，总是处在不停的变化或者说是运动过程中. 各种运动形式，譬如机械的、电的、热的……，虽然性质是千差万别的，但是，都表现为一定的数量的变化. 伟大领袖毛主席教导我们："**对情况和问题一定要注意到它们的数量方面，要有基本的数量的分析. 任何质量都表现为一定的数量，没有数量也就没有质量.**"对于自然规律的掌握也是这样，就是说，要做到胸中有"数".

下面通过几个例子讨论一下，如何从这些运动形式的数量关系方面掌握它们的变化规律，帮助我们分析和解决实际问题.

例 1　水文资料——月流量记录

某河流的水文站，记录了该河历年的月流量 V（即一个月流过的水量的总和），现将 40 年的平均月流量列表如下页，并画成图 1-1.

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月流量 V (亿立方米)	0.39	0.40	0.57	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

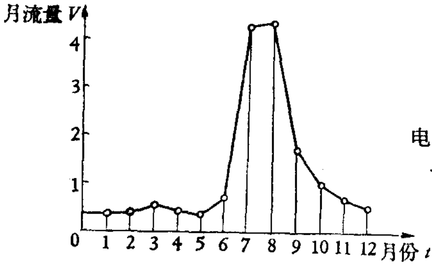


图 1-1

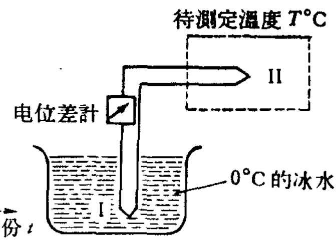


图 1-2

上面的表及图 1-1，表示了月流量 V 与月份 t 的关系，掌握这个关系，对于设计水库时考虑库容是有帮助的。

例 2 用热电偶测量温度

如图 1-2 将两种不同材料的金属导线焊接在一起，把接点 I 放在 0℃ 的冰水中(称冷端)，另一个接点 II 放在待测温度 T℃ 的地方(称热端)，导线两端就有电压 U 产生. 热端温度不同，产生的电压就不同. 电压的数值可由电位差计读出. 根据这个道理制成的热电偶测温元件，在钢铁、化工、电子等工业部门有着广泛的应用.

用精确的实验可以预先测量出各种热电偶的热端温度和电压的对应关系. 铂铑-铂热电偶的热端温度和电压的对应关系如下表所示.

温度 T(℃)	……	950	1000	1050	1100	1150	1200	……
电压 U (毫伏)	……	8.943	9.538	10.120	10.693	11.298	11.895	……

用热电偶测温时，要根据电压U的数值，推算出温度T来．工人同志常常使用的一种既简单、又能保证足够精确的方法，是根据上页表中温度和电压的每一对数值，在方格纸上画出一个点，过各点连出一条线(大致上是一条直线，如图 1-3)．利用这个图就能很快地由电位差计读出的电压毫伏数，知道热端温度．在实际应用中，可以将图 1-3 中要用的那一部分图形放大，得到较精确的结果．如读出$U=10.5$毫伏，则$T=1083.16$℃．热电偶测温是一种由热转化为电的运动，上面的表和图 1-3 就是从数量关系方面反映了这种运动的规律．

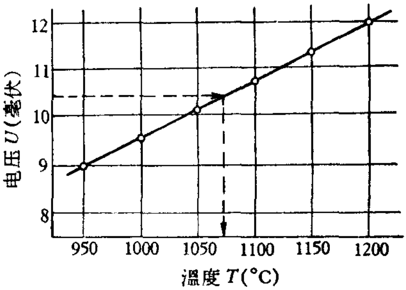


图 1-3

上面两个例题都是用观测或实验的方法找到表现变化规律的数量关系，用图形或表格表示出来，利用它们来帮助我们解决实际问题．我们看到，要表现变化规律就要遇到变化的数量，例 1 中的平均月流量V和月份t、例 2 中的温度T和电压U都是变化的数量，这种可以取不同数值的量称为**变量**．

自然界中每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着，各种运动变化的规律通过变量间的互相联系、互相影响而表现出来．在实践中，这样的例子是很多的．例 2 中，图 1-3 表示了温度T和电压U的数值对应关系，它说明两个变量T和U是互相联系和互相影响的，反映了热电偶中由热转化为电的运动规律．变量在变化过程中的数值对应关系叫做**函数关系**．例 2 中，T和U之间的函数关系通过图 1-3 表示出来．

表现变化规律的数量关系——函数关系，与我们在算术、代数中所见到的不同，它是一个新的数学对象．算术中主要是研究不变的数量的运算规律，例如：$2+2=4$，这里2、4都是不变的数．从代数方程解未知数，这个未知数也是固定不变的数．这种固定不变的数量叫做常量．常量的数学只能反映相对地不变的现象．而客观世界是充满矛盾和不断变化的，这就要求数学从研究常量发展到研究变量、研究表现实际运动的函数关系．如何找出表现实际运动的函数关系？实验和观测是一个基本的方法．但是，实践还要求我们在实验观测的基础上，运用分析的方法，找出用公式表示的函数关系．下面以两种最简单的机械运动为例，来说明这一点．

例 3　等速运动的运动规律

速度不变的运动叫等速运动．火车离站后的正常行驶阶段；车床自动进刀时，刀架在导轨上的移动都可看做等速运动．等速运动是最简单的机械运动．现以车床刀架的移动为例，分析一下等速运动的运动规律．

刀架的移动表现为刀架在导轨上的位置随时间 t 的变化．用导轨上某一固定点作为计算刀架位置的起始点，即图 1-4 中的 O 点，刀架的位置就用刀架到 O 点的距离即坐标 s 表示．假定开始时 $(t=0)$ 刀架距 O 点 5 毫米．自动进刀后，刀架以每秒 1.5 毫米的速度移动(记为速度 $v=1.5$ 毫米/秒)，那么，很容易得出在各个时刻 t 刀架的坐标 s，如下页表．

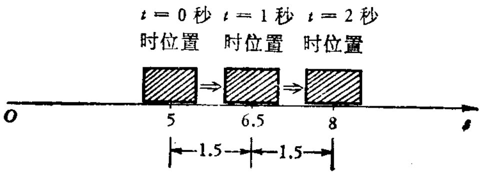


图 1-4

时 间 t（秒）	0	1	2	3	4
坐标 s（毫米）	5	6.5	8	9.5	11

上表表示了 s 与 t 的函数关系，还可以更清楚地用式子表示出来：因为刀架每秒移动 1.5 毫米这个速度不变，所以，经过 t 秒钟移动的距离是 $1.5t$（毫米），加上开始时的 5 毫米，则 t 秒时刀架的坐标就是

$$s = 5 + 1.5t.$$

由上式可以算出，在任意时刻 t，刀架的坐标 s. 如 $t=2.5$ 秒时，$s = 5 + 1.5 \times 2.5 = 8.75$（毫米）. 因此说，上式表示了刀架的运动规律. 这个规律也可以用图形表示. 根据上表中 t 和 s 的各对数值，在直角坐标系中描点连线，得一条直线（图 1-5）.

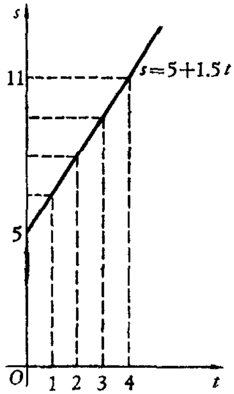


图 1-5

一般，速度为 v、初始位置坐标为 s_0 的等速运动，其运动规律是

$$s = s_0 + vt.$$

例 4 自由落体的运动规律

从空中掉下来的物体越落越快，就是说，它的速度不断增加，这种运动叫加速运动. 实验证明，如果不考虑空气的阻力，并且物体开始下落时的速度为零，那么 1 秒末它的速度是 9.8 米/秒，2 秒末的速度是 $9.8 \times 2 = 19.6$（米/秒），… t 秒末的速度是 $9.8t$（米/秒）. 即落体速度每秒钟增加 9.8 米/秒，这个数值叫落体的加速度，记为 $g = \dfrac{9.8\ \text{米/秒}}{1\ \text{秒}} = 9.8$ 米/秒^2（g 又叫重力加速度）. 因为这个加速度是常数，所以落体运动又叫等加速运动. 由此，落体速度 v 随时间变化的规

律可以写成

$$v = gt = 9.8t\ (\text{米/秒}).$$

如何计算落体运动下落的路程，譬如计算落体 5 秒内下落的路程，能不能象等速运动那样用速度乘 5 秒这段时间得到呢？不能！因为在这 5 秒内，落体的速度是不断变化的．我们必须遵照毛主席关于"**不同质的矛盾，只有用不同质的方法才能解决**"的教导，认真分析这种运动特有的矛盾，找出解决的方法．下一章将看到，微积分方法正是解决这一类问题的工具．这里，先给出结果．

在忽略空气阻力和初速为零的情况下，落体下落的路程 s 和时间 t 的函数关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = 4.9t^2.$$

由上式可以算出各个时刻落体下落的路程，如下表

时间 t（秒）	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
路程 s（米）	0	1.225	4.9	11.025	19.6	30.625	44.1

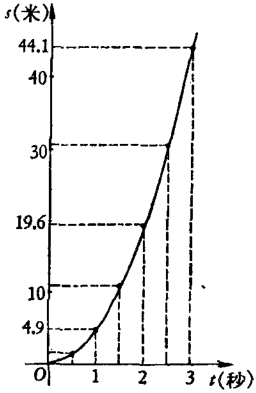


图 1-6

在直角坐标系中，画出 s 和 t 的函数关系的图形，是一条曲线(图 1-6)．上面的公式、表及图 1-6，都表示了自由落体的运动规律．

小　　结

毛主席教导我们："**就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物．**"从例 1 到例 4，它们虽是不同形式的运动问题，但共同的一点，都是研究在某变化过程中变量间的数值对应关系．从这里，

我们抽象出函数的一般概念.

二、函数概念

某变化过程中有两个变量 x 和 y, 如果对于 x 在变化过程中取得的每一个值, y 就按照一定的规律,有一个确定的对应值,那么我们就叫 y 是 x 的函数. 记为 $y(x)$ 或 $y=f(x)$. x 叫自变量, y 叫因变量. 记号 $y=f(x)$, f 表示 y 与 x 的对应关系,不是 f 乘 x.

如: 例 4 中, s 是 t 的函数,记为

$$s=s(t)=4.9t^2.$$

当 $t=1.5$ 时,对应的函数值就是

$$s(1.5)=4.9\times 1.5^2=11.025,$$

有时也记为: $s\big|_{t=1.5}=11.025$.

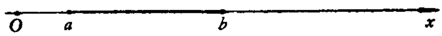
又如: $$y=f(x)=2x^2-1,$$

则 $$y\big|_{x=3}=2\times 3^2-1=17.$$

函数关系可以用表格、图形或公式表示出来. 由于函数图形直观地表示出因变量随自变量变化的情况, 常将表格或公式表示的函数画出图来,帮助分析问题.

在函数关系中,自变量取值的范围叫做函数的定义域. 如例 4 中,自变量时间 t 不取负值,因此函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的定义域就是 $t\geqslant 0$, 即右半 t 轴(如图 1-6).

一般用数轴上的区间来表示变量的取值范围. 如 x 取 a 和 b 之间的所有数: $a<x<b$, 可用下图中 x 轴上的区间表示,记作 (a,b).



如果 x 的取值范围还包括区间端点 a 和 b,即 $a\leqslant x\leqslant b$,

就叫做闭区间,记为 $[a, b]$, 而 (a, b) 叫做开区间.

研究实际问题提出的函数关系,存在着各种辩证关系.在同一个问题中,两个变量间的函数关系,从数量方面反映了这两个变量间的相互联系和相互影响, 两个变量的地位并不是一成不变的. 例如落体运动中, 通常是由自变量 t 的数值变化去分析计算因变量 s 的数值变化;但是,有时也需要从落体下落的距离 s 推算下落的时间 t, 这样, t 又成了 s 的函数.

毛主席教导我们说: "**科学研究的区分,就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性.**"现在的数学对象是反映实际运动的函数关系,这种数学对象具有什么特殊的矛盾性,这是我们应该十分注意的问题. 下面, 就以运动规律为例来分析这个问题.

从例 3 和例 4 可以看出, 用初等数学的方法就可找到等速运动变化规律的函数关系式,但是, 在研究加速运动时, 就遇到了初等数学不能解决的矛盾. 这两种运动规律的根本区别就在于,一个运动速度是常量,一个运动速度是变量.

等速运动的情形: 速度 v 是常量.如例 3 中,已知 $v=1.5$ 毫米/秒, 刀架初始位置 $s_0=5$, t 秒末刀架的位置是 $s=5+1.5t$, 从 t 秒到 $t+\Delta t$ 秒内走过的路程(记为 Δs)就是 $v\cdot\Delta t$, 即

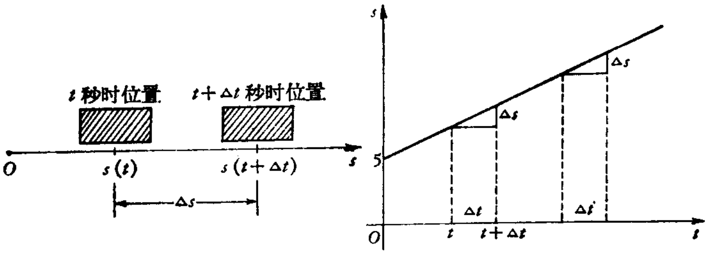
$$\Delta s = 1.5 \cdot \Delta t.$$

这个关系可通过计算得出, Δs 表示位置改变的大小 [图 1-7(a)],它等于 $t+\Delta t$ 秒时的位置与 t 秒时的位置之差, 即

$$\begin{aligned}\Delta s &= s(t+\Delta t) - s(t)\\ &= [5+1.5(t+\Delta t)] - (5+1.5t)\\ &= 1.5\Delta t,\end{aligned}$$

这说明函数 $s=5+1.5t$ 具有这样的性质: Δs 与 Δt 之比值是常数 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=1.5$. 简单地说, Δs 与 Δt 成正比. 这种性

质表现了等速运动的特点：在任何相等的时间间隔里，走过的路程也相等[图 1-7(b)].



(a) 实际运动情况示意图　　(b) 函数 $s=5+1.5t$ 的图形

图 1-7

变速运动的情形：速度 v 是变量，上述的性质是不成立的. 如例 4 中，已知自由落体运动的速度 $v=gt$，用微积分法可求出，经过 t 秒下落的距离是

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

从例 4 中的表可以看出：t 从 1 秒变到 1.5 秒时，s 从 4.9 米变到 11.025 米；t 从 2 秒变到 2.5 秒时，s 从 19.6 米变到 30.625 米. 这两段时间间隔都是 0.5 秒（记为 $\Delta t=0.5$ 秒），但两段时间内下落的距离，一个是 $\Delta s_1=11.025-4.9=6.125$ 米，另一个是 $\Delta s_2=30.625-19.6=11.025$ 米. 从不同的时刻开始，经过同样长的时间，走过的路程却不同，这正表现了运动速度是变化的(图 1-8).

正是由于这种关系本身的特点，就不能形式地不加分析地套用等速运动的计算方法. 比如，已知速度 $v=gt$，形式地套公式：路程 = 速度 × 时间，就是错误的，不符合实际的，因为上述公式是以速度不变为前提的.

上面的分析告诉我们，由于等速运动和变速运动的区别，