数学物理方程

第二冊

吳新謀等編著

科学出版社

数学物理方程

第二册

吳新謀等編著

科学出版社
1958年·北京

內 容 提 要

本書系由原来吳新謀編数学物理方程講义扩充改写而来，除原講义內容外，加上連續介質力学一章及偏微分方程之近代成就若干章及其他，內容相当齐备．本書共分三册，兹將第二册目录列举如下：1．双曲型方程，2．橢圓型方程，3．拋物型方程，4．綫性二級偏微分方程一般理論．

数学物理方程

第 二 册

吳新謀等編著

*

科学出版社出版（北京朝陽門大街117号）

北京市書刊出版業營業許可証出字第061号

北京西四印刷厂印刷 新华書店总經售

*

1958年8月第一版 書号：1328 字數：256,000

1958年8月第一次印刷 开本：850×1168 1/32

（京）0001—1,000 印張：9 11/16

定价：（10）1.60元

目　录

第　二　册

第五章　双曲型方程

§1. 拉普拉斯(Laplace)双曲型方程和某些定解問題

我們知道对於兩个自变量的綫性双曲型方程

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$

$$+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=G(x,y),$$

总能通过某一个确定的(实的、非異的)自变量变换化为标准型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y), \quad (1)$$

这就是本节中所要討論的拉普拉斯双曲型方程。从实际和理論方面提出了各种各样的定解問題，在这一节里我們將考虑某一些比較基本的同时也是比較古典的定解問題。

I. 第一問題(特征問題)[1] 与畢加(Picard)方法：

$$\begin{cases}(1),\\ u(x_0,y)=\varphi_1(y) \quad y_0\leqslant y\leqslant b,\\ u(x,y_0)=\varphi_2(x) \quad x_0\leqslant x\leqslant a,\end{cases} \quad (2)$$

其中 $\varphi_1(y_0)=\varphi_2(x_0)$；$\varphi_1,\varphi_2$ 分別在 $[y_0,b]$，$[x_0,a]$ 上有連續的一級微商；$a(x,y)$，$b(x,y)$，$c(x,y)$，$f(x,y)$ 在 $[x_0,a;y_0,b]$ 上是連續的。我們要証明：問題(2)在 $[x_0,a;y_0,b]$ 上是适定的。

証　設 u 是(2)的解。命 $\frac{\partial u}{\partial x}=v$，$\frac{\partial u}{\partial y}=w$，則(1)就可写成

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial x}=f(x,y)-a(x,y)v-b(x,y)w-c(x,y)u.$$

因之就有

---

1) 在兩条特征綫上給定 u 的值的定解問題称为第一問題，或称为特征問題。

$$
\begin{cases}
v=v\,(x,y_0)+\int\limits_{y_0}^{y}[f(x,y)-a(x,y)v-b(x,y)w-c(x,y)u]\,dy, \\
w=w(x_0,y)+\int\limits_{x_0}^{x}[f(x,y)-a(x,y)v-b(x,y)w-c(x,y)u]\,dx, \\
u=u\,(x,y_0)+\int\limits_{y_0}^{y}w(x,y)\,dy,
\end{cases}
$$

其中

$$
v(x,y_0)=\frac{\partial u}{\partial x}\,(x,y_0)=\frac{du(x,y_0)}{dx}=\varphi_2'(x),
$$

$$
w(x_0,y)=\frac{\partial u}{\partial y}\,(x_0,y)=\frac{du(x_0,y)}{dy}=\varphi_1'(y).
$$

这是一組綫性积分方程，屬於佛尔得拉(Volterra)型，因此这里不会有固有值和固有函数的問題[1)]. 把 $v(x,y_0)$, $w(x_0,y)$ 和 $u(x,y_0)$ 的值代入，就得

$$
\begin{cases}
v=\varphi_2'(x)+\int\limits_{y_0}^{y}[f(x,y)-a(x,y)v-b(x,y)w-c(x,y)u]\,dy, \\
w=\varphi_1'(y)+\int\limits_{x_0}^{x}[f(x,y)-a(x,y)v-b(x,y)w-c(x,y)u]\,dx, \\
u=\varphi_2(x)+\int\limits_{y_0}^{y}w\,dy.
\end{cases}
\tag{3}
$$

反之，設 u, v, w 是(3)的解，則

$$
\frac{\partial u}{\partial y}=w,
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial w}{\partial x}=f(x,y)-a(x,y)v-b(x,y)w-c(x,y)u,
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_2'(x)+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial w}{\partial x}\,dy=\varphi_2'(x)+\int\limits_{y_0}^{y}[f(x,y)-
$$

$$
-a(x,y)v-b(x,y)w-c(x,y)u]\,dy=v,
$$

---

1) 参看第二章.

所以 u 一定是(1)的解. 同时

$$u(x,y_0)=\varphi_2(x).$$

$$u(x_0,y)=\varphi_2(x_0)+\int_{y_0}^{y}w(x_0,y)dy=\varphi_2(x_0)+\int_{y_0}^{y}\varphi_1'(y)dy=\varphi_1(y),$$

所以 u 是(2)的解.

現在用逐次逼近法解(3),取

$$v_0=\varphi_2'(x),\quad w_0=\varphi_1'(y),\quad u_0=\varphi_2(x).$$

並根据下列循环式由 $v_{n-1}, w_{n-1}, u_{n-1}$ 計算 v_n, w_n, u_n:

$$\begin{cases} v_n=\varphi_2'(x)+\displaystyle\int_{y_0}^{y}[f(x,y)-a(x,y)v_{n-1}- \\ \qquad -b(x,y)w_{n-1}-c(x,y)u_{n-1}]dy, \\ w_n=\varphi_1'(y)+\displaystyle\int_{x_0}^{x}[f(x,y)-a(x,y)v_{n-1}- \\ \qquad -b(x,y)w_{n-1}-c(x,y)u_{n-1}]dx, \\ u_n=\varphi_2(x)+\displaystyle\int_{y_0}^{y}w_{n-1}dy. \end{cases} \tag{4}$$

因为方程都是綫性的,所以不必再加其余条件,这种手續就可能無旁尽地繼續下去. 而問題則在証:这样得来的函数串 $\{v_n\}$, $\{w_n\}$, $\{u_n\}$ 在 $[x_0,a;y_0,b]$ 上是一致收斂的.

f,a,b,c 旣在 $[x_0,a;y_0,b]$ 上是連續的, $\varphi_2'(x)$, $\varphi_1'(y)$, $\varphi_2(x)$ 旣分別在 $[x_0,a]$ 和 $[y_0,b]$ 上是連續的,則我們一定能求得适当大的常数 A, K,使

$$|v_1-v_0|\leqslant A,\quad |w_1-w_0|\leqslant A,\quad |u_1-u_0|\leqslant A,$$

並有 $|a(x,y)|+|b(x,y)|+|c(x,y)|\leqslant K$. 我們現在来証明 $|u_n-u_{n-1}|$, $|v_n-v_{n-1}|$, $|w_n-w_{n-1}|$ 滿足不等式:

$$|v_n-v_{n-1}|\leqslant K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$|w_n-w_{n-1}|\leqslant K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{5}$$

$$|u_n - u_{n-1}| \leqslant K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

当 $n=1$ 时(5)显然是正确的。然而，从(4)我們有

$$\begin{cases} v_{n+1}-v_n = -\int\limits_{y_0}^{y} [a(x,y)(v_n - v_{n-1}) + \\ \qquad + b(x,y)(w_n - w_{n-1}) + c(x,y)(u_n - u_{n-1})] dy, \\ w_{n+1}-w_n = -\int\limits_{x_0}^{x} [a(x,y)(v_n - v_{n-1}) + \\ \qquad + b(x,y)(w_n - w_{n-1}) + c(x,y)(u_n - u_{n-1})] dx, \\ u_{n+1}-u_n = \int\limits_{y_0}^{y} (w_n - w_{n-1}) dy. \end{cases} \tag{4'}$$

因此，假若当 $n=k$ 时(5)成立，那末从(4')就有

$$|v_{k+1} - v_k| \leqslant \int\limits_{y_0}^{y} (|a| + |b| + |c|) K^{k-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{k-1}}{(k-1)!} dy \leqslant$$

$$\leqslant AK^k \int\limits_{y_0}^{y} \frac{(x+y-x_0-y_0)^{k-1}}{(k-1)!} dy =$$

$$= AK^k \left[\frac{(x+y-x_0-y_0)^k}{k!} - \frac{(x-x_0)^k}{k!}\right] \leqslant$$

$$\leqslant AK^k \frac{(x+y-x_0-y_0)^k}{k!},$$

完全同样的可以估計其余兩个。於是，我們也就証明了对於任何 n 式(5)的正确性。同时这也就証明了 $\{v_n\}$, $\{w_n\}$, $\{u_n\}$ 都是在 $[x_0, a; y_0, b]$ 上是一致收歛的。設这三个函数串 $\{v_n\}$, $\{w_n\}$, $\{u_n\}$ 分别以 v, w, u 为限。命(4)兩端的 n 趋於無穷，就足以証明 v, w, u 是(3)的解。所以(2)的解存在。

要証明(3)的解的唯一性，只須証明：若 $f(x,y) \equiv 0$, $\varphi_1(y) \equiv 0$, $\varphi_2(x) \equiv 0$，則必有 $v \equiv w \equiv u \equiv 0$。此則誠然，$v, w, u$ 旣在 $[x_0, a; y_0, b]$ 上是連續，則必能求得一正数 A，使 $|v| < A$, $|w| < A$, $|u| < A$。如是，無論 n 怎样大我們將恆有

$$|v| \leqslant K^n A \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!},$$

$$|w| \leqslant K^n A \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!},$$

$$|u| \leqslant K^n A \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}.$$

如是則非 $v \equiv w \equiv u \equiv 0$ 不可。所以(2)的解也是唯一的。

解的連續性易証。証畢。

II. 第二問題(郭西問題)[1] 与黎曼(Riemann)方法:

$$\begin{cases} (1) \\ u[x, \mu(x)] = \varphi_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}[x, \mu(x)] = \varphi_1(x). \end{cases} \tag{6}$$

我們假定:

1° $\mu'(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續並有定号;

2° $\varphi_0(x)\varphi_1(x)$ 在 $[a, b]$ 上有連續微商;

3° a, b, c, f 在 $[a, b; \mu(b), \mu(a)]$ 上有連續一級微商。

我們要証明問題(6)(郭西問題)在 $[a, b; \mu(b), \mu(a)]$ 上是适定的。令

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u,$$

$$M(v) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(av) - \frac{\partial}{\partial y}(bv) + c(x, y)v.$$

我們称 $M(v) = 0$ 是 $L(u) = 0$ 的伴随方程[2]。我們容易証明若

---

1) 定解条件是在一条曲線上給定 u 和 $\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}$ (α 方向不与支柱相切)的值的定解問題称为第二問題,亦称为郭西問題.

2) 伴随方程的一般定义可敘述如下:

設

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{k=1}^{m} b_k u_{x_k} + cu \qquad (a_{ik} = a_{ki}),$$

$$M(v) = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2 (a_{ik} v)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial (b_k v)}{\partial x_k} + cv,$$

其中 a_{ik}, b_k, c 均为 $x_1, \cdots, x_m$ 的函数,我們称 $M(v) = 0$ 就是 $L(u) = 0$ 的伴随方程.

$M(v)=0$ 是 $L(u)=0$ 的伴随方程，則 $L(u)=0$ 亦必就是 $M(v)=0$ 的伴随方程.

A. 黎曼函数. 我們考虑一个特殊的第一問題

$$\begin{cases} M(v)=0, \\ v(x,y_0)=e^{\int_{x_0}^{x} b(x,y_0)dx}, \\ v(x_0,y)=e^{\int_{y_0}^{y} a(x_0,y)dy}. \end{cases} \tag{7}$$

由 I 所述这个問題的解 $v(x,y;x_0,y_0)$ 显然是存在而且唯一的，我們称之为(1)的黎曼函数.

B. 問題(6)的适定性. 首先要注意在支柱 $y=\mu(x)$ 上，根据定解条件，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 的值也將可能求得. 誠然，由

$$\frac{\partial u}{\partial x}[x,\mu(x)]+\frac{\partial u}{\partial y}[x,\mu(x)]\cdot\mu'(x)=\varphi_0'(x),$$

我們就有

$$\frac{\partial u}{\partial x}[x,\mu(x)]=\varphi_0'(x)-\varphi_1(x)\mu'(x).$$

現在在 $[a,b;\mu(b),\mu(a)]$ 内任取一点 $M(x_0,y_0)$，由 M 作 Ox 軸的平行綫交 $y=\mu(x)$ 於 P，由 M 作 Oy 軸的平行綫交 $y=\mu(x)$

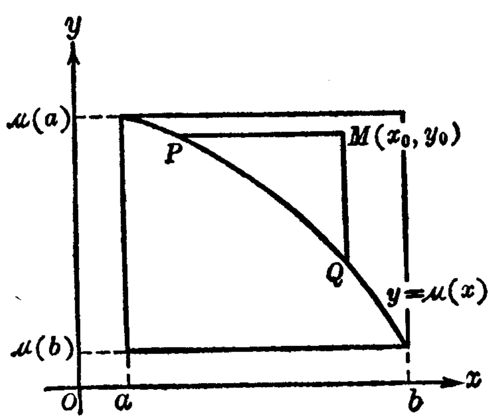

圖 1

於 Q，取 S 为 MP, MQ 和支柱上的弧 $\widehat{PQ}$ 所成的閉曲綫，它所圍成的域取为 Ω。

我們不难驗証下述微分恆等式

$$2[vL(u)-uM(v)]=(u_xv-uv_x+2buv)_y+ + (u_yv-uv_y+2auv)_x \tag{8}$$

对任何正則函数 u 和 v 皆成立。

假定 u 是問題(6)的解，v 是(1)的黎曼函数，代入恆等式(8)，並在 Ω 上作积分。应用格林(Green)公式我們就有

$$2\iint_{\Omega} v(x,y;x_0,y_0)f(x,y)dxdy=2\iint_{\Omega}[vL(u)-uM(v)]dxdy=$$

$$=\int_S (u_yv-uv_y+2auv)dy-(u_xv-uv_x+2buv)dx=$$

$$=\int_{\overline{QM}}(u_yv-uv_y+2auv)dy-\int_{\overline{MP}}(u_xv-uv_x+2buv)dx+$$

$$+\int_{\widehat{PQ}}(u_yv-uv_y+2auv)dy-(v_xv-uv_x+2buv)dx.$$

利用分部积分法，並注意到黎曼函数所滿足的定解条件，我們就有

$$\iint_{\Omega} vf(x,y)dxdy=u(x_0,y_0)-\frac{1}{2}(uv)\Big|_P-\frac{1}{2}(uv)\Big|_Q+$$

$$+\int_{\widehat{PQ}}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(v\varphi_1-\varphi_0\frac{\partial v}{\partial y}\right.+a\varphi_0v\right]dy-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{2}\left(v\varphi_0'+v\varphi_1\mu'-\varphi_0\frac{\partial v}{\partial x}\right)+b\varphi_0v\right]dx\right\}.$$

所以

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(uv)\Big|_P+\frac{1}{2}(uv)\Big|_Q-$$

$$-\int_{\widehat{PQ}}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(v\varphi_1-\varphi_0\frac{\partial v}{\partial y}\right)+a\varphi_0v\right]dy-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{2}\left(v\varphi_0'-v\varphi_1\mu'-\varphi_0\frac{\partial v}{\partial x}\right)+b\varphi_0v\right]dx\right\}+\iint_{\Omega} vf(x,y)dxdy. \tag{9}$$

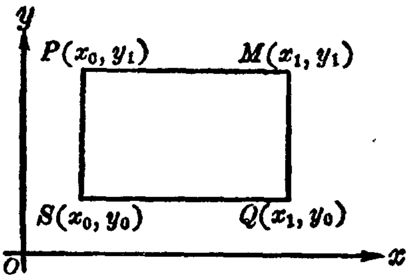

圖 2

这就是黎曼公式．它供給我們(6)的解应有的形式．这就表示若(6)有解那么这个解就一定是唯一的．而問題就在証(9)的右端确是(6)的解，为此，我們只須証明問題的解是存在的．首先我們来証明一条定理(黎曼函数的对称定理)．我們同时假設有兩个第一問題：問題(7)及

$$\begin{cases} L(u)=0, \\ u(x,y_1)=e^{-\int_{x_1}^{x} b(x,y_1)dx}, \\ u(x_1,y)=e^{-\int_{y_1}^{y} a(x_1,y)dy}. \end{cases} \tag{10}$$

定理

$$u(x_0,y_0;x_1,y_1)=v(x_1,y_1;x_0,y_0).$$

証明 將 u, v 代入恆等式(8)並沿長方形 $SQMP$ 作积分．应用格林公式就有

$$0=\int_P^S\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+auv\right]dy-$$

$$-\int_S^Q\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+buv\right]dx+$$

$$+\int_Q^M\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+auv\right]dy-$$

$$-\int_M^P\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+buv\right]dx.$$

化簡，得

$$(uv)\Big|_S-\frac{1}{2}(uv)\Big|_P-\frac{1}{2}(uv)\Big|_Q-$$

$$-\int_P^S v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+au\right)dy+\int_S^Q v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right)dx=$$

$$=(vu)\Big|_M-\frac{1}{2}(vu)\Big|_Q-\frac{1}{2}(vu)\Big|_P-$$

$$-\int_Q^M u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right)dy+\int_M^P u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right)dx.$$

由(6),(10)的边界条件就得

$$u(x_0,y_0;x_1,y_1)=v(x_1,y_1;x_0,y_0).$$

証畢.

这定理説明:若在(1)的黎曼函数 $v(x,y;x_0,y_0)$中把动点(x,y)看作定点,定点(x_0,y_0)看作动点,則我們就得(1)的伴随方程$M(v)=0$的黎曼函数. 也就是:在(1)的黎曼函数$v(x,y;x_0,y_0)$中,若把x,y看作变数,則它适合$M(v)=0$;若把x_0,y_0看作变数,則就适合$L(v)=0$.

注意:若(10)改为一般的第一問題;問題(2),則从上面的討論,易知它的解为

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\varphi(x_0)v(x_0,y_0;x,y)+\\&+\int_{y_0}^{y}v(x_0,y;x,y)(\varphi'(y)+a\varphi(y))dy+\\&+\int_{x_0}^{x}v(x,y_0;x,y)(\varphi'(x)+b\varphi(x))dx+\\&+\iint\limits_{\substack{P\quad M\\ S\,\square\, Q}}v(t,\tau;x,y)f(t,\tau)dtd\tau.\end{aligned}$$

其中v是(1)的黎曼函数,而P,S,Q,M的座标分别为(x,y_0),(x,y),(x_0,y),(x_0,y_0).

現在我們来証明問題(2)的解存在. 为了較簡單地証明这一層,我們作代換

$$w=u-\varphi_0(x)-[y-\mu(x)]\varphi_1(x),$$

如是(6)就变为

$$
\begin{cases}
L(w)=f_1(x,y), \\
w[x,\mu(x)]=\dfrac{\partial w}{\partial y}[x,\mu(x)]=0.
\end{cases} \tag{6'}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y)=&f(x,y)-\varphi_1'(x)-a(x,y)\{\varphi_0'(x)+\\
&+[y-\mu(x)]\varphi_1'(x)-\mu'(x)\varphi_1(x)\}-b(x,y)\varphi_1(x)-\\
&-c(x,y)\{\varphi_0(x)+[y-\mu(x)]\varphi_1(x)\}.
\end{aligned}
$$

我們假定早先已經做过这个代換，那末(9)就將是

$$u(x_0,y_0)=\iint_\Omega vf(x,y)dxdy. \tag{9'}$$

当 $M(x_0,y_0)$ 趋近 $y=\mu(x)$ 时，Ω 收縮成一点，所以 $u(x_0,y_0)$ 就趋於零. 同时

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}=\int_Q^M vf(x_0,y)dy+\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_0}f(x,y)dxdy; \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_0}=\int_P^M vf(x,y_0)dx+\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial y_0}f(x,y)dxdy. \tag{12}$$

当 $M(x_0,y_0)$ 趋近於 $y=\mu(x)$ 时，右端各积分趋於零，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x_0}, \dfrac{\partial u}{\partial y_0}$ 都趋於零. 定解条件旣經适合，只須証(9')适合(1). 由(11)有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_0\partial y_0}=&v(x_0,y_0;x_0,y_0)f(x_0,y_0)+\int_Q^M \frac{\partial v}{\partial y_0}f(x_0,y)dy+\\
&+\int_P^M \frac{\partial v}{\partial x_0}f(x,y_0)dx+\iint_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_0\partial y_0}f(x,y)dxdy.
\end{aligned}
$$

由上面所証的黎曼函数对称定理就有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x_0\partial y_0}+a(x_0,y_0)\frac{\partial u}{\partial x_0}+b(x_0,y_0)\frac{\partial u}{\partial y_0}+c(x_0,y_0)u=\\
&=f(x_0,y_0)+\int_Q^M\left(\frac{\partial v}{\partial y_0}+av\right)f(x_0,y)dx+\int_P^M\left(\frac{\partial v}{\partial x_0}+bv\right)f(x,y_0)dx+
\end{aligned}
$$

$$+\iint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial y_0}+a(x_0,y_0)\frac{\partial v}{\partial x_0}+b(x_0,y_0)\frac{\partial v}{\partial y_0}+\right.$$

$$\left.+c(x_0,y_0)v\right]f(x,y)dxdy=f(x_0,y_0).$$

解的連續性直接可从黎曼公式看出。証畢。

注意：1) u 在 $M(x_0,y_0)$的值只和 φ_0,φ_1 在 $\widehat{PQ}$ 弧上之值有关。因之，已与(1)的解 u 在一域 $\mathfrak{D}$ 内是定义的，在 $\mathfrak{D}$ 内作一綫 l 把 $\mathfrak{D}$ 分割为 $\mathfrak{D}_1$ 和 $\mathfrak{D}_2$，若我們在 $\mathfrak{D}_1$ 内保持 u 不变，而在 $\mathfrak{D}_2$ 内可能由他一函数代 u，而如此定义的函数仍在 $\mathfrak{D}$ 内是(1)的解，则 l 一定是特征綫 $x=c_1$ 或 $y=c_2$，对已与在 MPQ 内定义的(1)的解沿着特征綫，一般地，可以和不同的解結合起来而互为拓展。这說明为什么沿着特征綫的郭西問題一般地說是不可能的。

2) 条件 $\mu'(x)$有定号是重要的。若 $\mu'(x)$ 在$[a,b]$内变号，则問題(6)就不一定有解。誠然，若 $\mu(x)$ 如圖示的 $\widehat{PQ}$ 弧，则問題(6)就不一定有解。因为当M趋於弧上 Q 点时，面积不趋於零，因此就不一定滿足定解条件。

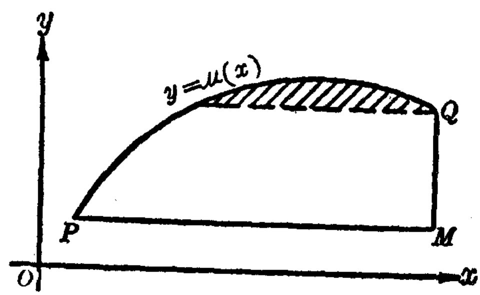

圖 3

3) 条件$\frac{\partial u}{\partial y}[x,\mu(x)]=\varphi_1(x)$ 可以换为

$$\alpha[x,\mu(x)]\frac{\partial u}{\partial x}[x,\mu(x)]+\beta[x,\mu(x)]\frac{\partial u}{\partial y}[x,\mu(x)]=\varphi_2(x).$$

但須假定：对 $[a,b]$ 上的x都有

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu'(x) \\ \alpha[x,\mu(x)] & \beta[x,\mu(x)] \end{vmatrix} \neq 0.$$

4) 公式(9)适用於 PQM 三字母按逆时針順序（圖 4 a）的情况。若 PQM 次序是按順时針順序（圖 4 b）則重积分前之符号应改为負。

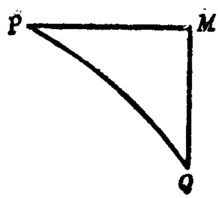

圖 4a

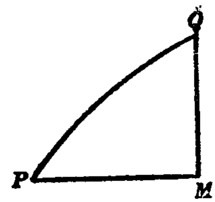

圖 4b

例　我們現在来找方程 $L(u)\equiv u_{xy}+cu=0$（c 为常数）的黎曼函数；按照黎曼函数的定义，我們就是要找下述問題的解：

$$\begin{cases} v_{xy}+cv=0, \\ v(x_0,y;x_0,y_0)=e^{\int_{y_0}^{y}0dy}=1, \\ v(x,y_0;x_0,y_0)=e^{\int_{x_0}^{x}0dy}=1. \end{cases}$$

令 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=w$，於是問題就化为綫性积分方程組

$$\begin{cases} v=1+\int_{x_0}^{x} w\,dx, \\ w=-\int_{y_0}^{y} cv\,dy. \end{cases}$$

$v_0=1, w_0=0$，此时循环公式为

$$\begin{cases} v_n=1+\int_{x_0}^{x} w_{n-1}dx, \\ w_n=-\int_{y_0}^{y} cv_{n-1}dy. \end{cases}$$

故

$$v_1=1; \qquad w_1=-c(y-y_0),$$
$$v_2=1-c(y-y_0)(x-x_0); \quad w_2=-c(y-y_0),$$

設

$$v_{2n+1}=1-c(y-y_0)(x-x_0)+\cdots+ \\ +(-1)^n\frac{c^n}{(n!)^2}(x-x_0)^n(y-y_0)^n+\cdots,$$