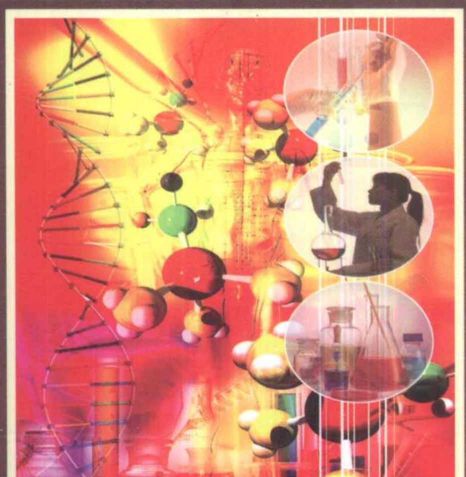
21世纪高等教育标准教材

线性代数教程

贺明峰 白同亮 任连伟 编著



东北财经大学出版社
Dongbei University of Finance & Economics Press

21世纪高等教育标准教材

XIAN XING DAI SHU
JIAO CHENG

线性代数教程

唐志宏 吴立文 审定

贺明峰 白同亮 任[illegible] 编著

东北财经大学出版社
大连

图书在版编目（CIP）数据

线性代数教程 / 贺明峰等编著 .— 大连 ：东北财经大学出版社，2003.2
21 世纪高等教育标准教材
ISBN 7－81084－212－9

Ⅰ.线… Ⅱ.①贺… ②白… ③任… Ⅲ.线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 097969 号

东北财经大学出版社出版
（大连市黑石礁尖山街 217 号 邮政编码 116025）
总 编 室：（0411）4710523
营 销 部：（0411）4710711
网　　址：http：//www.dufep.com.cn
读者信箱：dufep @ mail.dlptt.ln.cn
大连业发印刷有限公司印刷 东北财经大学出版社发行

幅面尺寸：148mm×210mm 字数：175 千字 印张：6
印数：1--5 000 册

2003 年 2 月第 1 版 2003 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑：谭焕忠 责任校对：孙 平
封面设计：钟福建 版式设计：丁文杰

定价：16.00 元

21 世纪高等教育标准教材

编委会

（按姓氏笔划排序）

21世纪高等教育标准教材

总 序

我国高等教育改革经过几年的努力，已经取得了阶段性进展，一个新型的高等教育体制的轮廓、雏形展现在我们面前。主要表现在：(1) 改革不适应社会主义市场经济体制走向的教育管理体制，改革了过去高等教育管理体制条块分割、单科性学校较多的格局。除少数几个部委继续管少数院校外，国务院的四十多个部委已不再管理学校。(2) 为体现优势互补、强强联合的精神，改善科类过于单一的现象，一些院校合并到综合大学，包括财经类的金融和财政类比较近类的学校也做了合并；1998 年教育部颁布实施了新的《普通高等学校本科专业目录》，专业做了很大调整，数量有所减少。(3) 1999 年党中央、国务院召开全国教育工作会议。会议动员全党全国人民以提高民族和创新能力为重点，全面推进素质教育，将推进素质教育提高到政府行为的高度。教育部在制定“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系计划”时，也提出了加强素质教育的思想内容。

教育管理体制改革打破了原来高等教育教材编写体

制和教材出版发行市场体制；学校合并和专业调整使高等教育课程设置和课程体系发生变化，教材会出现过剩和短缺并存的现象，结构必须调整；培养目标模式的转变，要求高等教育教材内容体系不但要重视知识的传授，而且要重视能力的培养和素质的提高。

为了适应高等教育改革的需要，我们组织编写了“21 世纪高等教育标准教材”。本系列教材注意吸收国内外学和科研的最新研究成果，充分体现科学性、思想性、先进性和稳定性，并努力在教材内容和体系上有所创新，力求较原有同类教材有较大的提高。

我们期望，本丛书的出版能对我国高等教育质量的提高，为培养更多更好适应社会经济发展和社会主义市场经济新形势人才做出一定的贡献。

21 世纪高等教育标准教材
编写组
2002 年 12 月

前言

线性代数课程是高等教育相关专业的一门重要的基础理论课程。

编写本书的目的是要使学生获得应用科学中常用的行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值等方面的基本理论、基本知识和基本方法，具有熟练运算能力和运用相应方法解决一些实际问题的能力，并在抽象思维、逻辑推理等方面也得到一些训练和提高。通过线性代数课程的学习，为学生学习后继课程并进一步扩大知识运用能力打下必要的数学基础。

本书力求叙述简明清楚、深入浅出，便于读者自学。特别是将初等变换的应用单列一章，以期将有关运算统一处理，这有利于读者掌握有关的基本计算方法，还针对线性代数内容特点，精选习题和例题，方便学生对基本理论和基本知识的学习和理解，并在书末附有参考答案和必要的提示。

本书参考了有关教材，书后只列出了主要参考书目，

对没有列出的一些参考书目在此也一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中定有不当之处，希望各位同仁和读者批评指正。

编著者

2002 年 12 月

目录

第一章

行列式

行列式作为一个重要的数学工具在数学的许多分支中有广泛的应用.本章通过二阶和三阶线性方程组的求解结论,先介绍二阶与三阶行列式,然后用归纳定义方法引入一般 n 阶行列式的定义并研究其性质,举例说明了行列式的计算方法,介绍了求解 n 阶线性方程组的克莱姆法则及消元法.

本书中所指的数,一般均指实数.

第一节 二阶与三阶行列式

1.1 二阶行列式

1.1.1 二阶线性方程组

设 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},b_1,b_2$ 为常数,则称

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases} \tag{1—1}$$

为二阶线性方程组,其中 x,y 为变量,对方程(1—1),当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,可经简单的消元法得出惟一解:

$$\begin{cases} x=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ y=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1—2}$$

为了便于记忆式(1—2),引入二阶行列式概念.

1.1.2 二阶行列式

定义 1 设 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为四个数,记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列

式.它的值定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1—3}$$

其中 a_{11},a_{12}称为行列式的第一行元素;a_{21},a_{22}称为第二行元素;a_{11},a_{21}称为行列式的第一列元素;a_{12},a_{22}称为第二列元素;a_{11}称为第一行第一列元素,依此类推.

有了二阶行列式定义后,若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,则 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 即 $D \neq 0$ 时,方程组(1—1)的解可用二阶行列式简记为

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_1}{D} \\ y = \dfrac{D_2}{D} \end{cases} \tag{1—4}$$

容易看出 D 是将方程组(1—1)的系数按原相对位置构成的行列式,称为方程组(1—1)的系数行列式;D_1,D_2 是分别将 D 中的第一列与第二列换成 b_1,b_2 而得到的行列式.

1.2 三阶行列式

1.2.1 三阶线性方程组

设 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$,$b_i(i=1,2,3)$为常数,称

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{1—5}$$

为三阶线性方程组.

对于方程组(1—5),当

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \neq 0$$

时,可经过消元运算求得其惟一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+b_2a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-a_{23}a_{31}b_1}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{31}b_3a_{13}-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{23}b_3a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}} \\ x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+a_{21}a_{32}b_1-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-b_2a_{32}a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}} \end{cases}$$

上述解的表达式非常复杂,且涉及的分子分母共 4 个不同的表达式中都是关于 9 个数的运算.为了便于记忆,也为了进一步推广的需要,给出三阶行列式的概念.

1.2.2 三阶行列式

定义 2 设 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$是 9 个数,记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式,它的值定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}$$

其中 a_{ij}的第一个下标 i 表示 a_{ij}所在的行数,第二个下标 j 表示 a_{ij}所在的列数.a_{ij}称为 i 行 j 列的元素.

例 1 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 按定义

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\times2\times(-2)+2\times2\times3+(-1)\times1\times3-3\times2\times3$$

$$-2\times(-1)\times(-2)-2\times1\times1=-19.$$

利用三阶行列式定义,记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则 $D\neq 0$ 时，方程组(1—5)的惟一解可表示为

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D} \\ y=\dfrac{D_2}{D} \\ z=\dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ -x+y-2z=1 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=3$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-6$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-5$$

所以方程组的惟一解为

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{3},y=\frac{D_2}{D}=-2,z=\frac{D_3}{D}=-\frac{5}{3}$$

第二节 n 阶行列式

2.1 二阶、三阶行列式的关系

现在我们来考察二阶行列式与三阶行列式之间的关系，由三阶行列式与二阶行列式的定义，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1\text{—}6)$$

由此式可以看出，三阶行列式等于它的第一行每个元素分别乘以一个二阶行列式的代数和.

为了进一步了解这三个二阶行列式与原来的三阶行列式的关系，我们引入余子式和代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，把元素 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$所在的第 i 行与第j 列删除，剩下的元素保持原来的相对位置不变构成的二阶行列式称为元素 a_{ij}的余子式，记作 M_{ij}. 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij}称为元素 a_{ij}的代数余子式.

例如，在三阶行列式 D 中，元素 a_{12}的余子式 M_{12}是在 D 中划去第 1 行和第 2 列后所构成的二阶行列式

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

而元素 a_{12}的代数余子式为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

应用代数余子式的概念,(1—6)式可以写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

即三阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式的乘积之和.这个表达式通常称为:行列式按第一行展开的展开式.

例 3　计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解　将行列式按第一行展开,即得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &\quad +2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2\times 12-(-22)+2\times(-18)=10.\end{aligned}$$

行列式按第一行展开的结果还可以进一步推广为如下定理.

定理 1　三阶行列式等于它的任一行或任一列的每个元素与它的代数余子式的乘积之和,即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3} \\ &= \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \qquad (i=1,2,3) \end{aligned} \tag{1—7}$$

或

$$\begin{aligned} D &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j} \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \qquad (j=1,2,3) \end{aligned} \tag{1—8}$$

证　证(1—8)式中 $j=2$ 的情况,其他情况可类似证明.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21}$$

$$= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})$$

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

此定理叫做行列式的展开定理，(1—7)式称为行列式按第 i 行展开的展开式，(1—8)式称为行列式按第 j 列展开的展开式.

如果我们定义一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$，那么三阶行列式的展开定理对于二阶行列式同样适用，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}|. \tag{1—9}$$

例 4　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解　把 D 按第二行展开，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4 + 18 - 4 = 10,$$

或把 D 按第 3 列展开，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -36 - 4 + 50 = 10.$$

例 5　计算三阶行列式