

电子与通信工程



系列教材

数字信号处理

主编 刘令普

1.72-43

哈尔滨工业大学出版社

355

TN911.72-43
L73

数 字 信 号 处 理

主 编 刘令普
副主编 魏凯丰 于贵江
魏振华 姚远哲

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了数字信号处理的基本原理,并通过一些实例说明其具体实现的方法。全书共分六章,第一章为时域离散信号与系统,介绍数字信号处理的理论基础。第二章为离散傅里叶变换和快速傅里叶变换,这是分析和处理离散时间信号的基本手段。第三章为数字滤波器,是信号处理的核心内容。第四章为数字信号处理的软件实现,介绍 FFT 和数字滤波器的实现方法,提供用软件实现数字信号处理的途径。第五章为数字信号处理中有限寄存长度的影响,详细论述了量化效应对信号的数字处理的影响,为实现高精度数字信号处理系统提供帮助。第六章通过若干实例讲解数字信号处理的具体应用,以利于加深读者对数字信号处理的理论和方法的理解。

本书的最后是习题和习题解答部分,这是正文内容的补充和深化,有益于读者学习。

本书可作为高等院校有关专业的教材,也可供信息、通信、生物医学、雷达、地震等有关领域从事信号处理的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/刘令普主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2002.9

ISBN 7-5603-1567-4

I. 数… II. 刘… III. 数字信号-信息处理-高等学校-教材 IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057852 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号 邮编 150006

传 真 0451-6414749

印 刷 肇东粮食印刷厂

开 本 787×1092 1/16 印张 11.5 字数 267 千字

版 次 2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-5603-1567-4/TN·57

印 数 1~3 000

定 价 20.00 元

前 言

数字信号处理是随计算机技术的发展而迅速发展起来的一门信息类学科,它已广泛应用于科学技术的许多领域。学习和研究这门学科已成为越来越多的学生、教师和工程技术人员迫切需要。尤其在今天,人类已进入信息时代,对信息类学科的先进理论和方法的需求会有增无减。

在教材方面,为适应国民经济和社会发展的需要,教材在内容、方式和质量等方面也发生着变化。例如,传统的出版物正逐渐被多媒体出版物取代,生动的、视声谐和的、远近期结合的传授知识的方式,正向全人类展示无尽的知识宝藏。为适应这种形势,我们在本书出版后将出版本书的电子版。另外,根据教学改革对教学大纲的新要求,本书在编写中对内容做了适当压缩,突出讲授基本理论和基本方法,因此,称本书为“数字信号处理简明教程”更为合适。

本书内容大约可用 48 学时讲授,这对于“检测技术及仪器”、“通信工程”、“自动化”、“自动控制”、“测控技术”和“计算机”等专业的需要是可以满足的;读者只要具备“自控原理”、“工程数学”、“计算机原理”等学科的知识,便可顺利学习和掌握本书内容。

本书主要由哈尔滨理工大学测控技术与通信工程学院(原为仪器仪表学院)的教师编写,具体分工是魏凯丰编写第四、五章,于贵江编写第一章,魏振华编写第三章,刘令普编写第二章、第六章,哈尔滨工业大学博士生姚远哲编写附录。本书由刘令普任主编。

在本书的编写过程中,得到了哈尔滨理工大学王慕坤教授、于晓洋教授和测控系全体教师以及检测专业学生曹丹、常凌燕、邹纯宏、陈家强等同学的大力支持和帮助,编者谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免存在一些缺点和错误,恳请读者批评指正。

编 者

2002 年 8 月

目 录

绪 论	1
第一章 时域离散信号与系统	2
1.1 引言	2
1.2 连续时间信号的取样及取样定理	3
1.3 离散时间信号的表示及运算规则	9
1.4 离散时间线性非时变系统及其分析	11
1.5 离散时间信号和系统的频域分析	18
1.6 序列的共轭对称与共轭反对称和傅里叶变换的关系	21
1.7 Z 变换	22
1.8 Z 变换的定理与性质	31
1.9 Z 变换与傅里叶变换及拉普拉斯变换的关系	36
1.10 系统函数	38
小结	46
第二章 离散傅里叶变换与快速傅里叶变换	47
2.1 引言	47
2.2 离散傅里叶变换	47
2.3 快速傅里叶变换	59
小结	71
第三章 数字滤波器	72
3.1 引言	72
3.2 数字滤波器的结构	72
3.3 无限长单位脉冲响应数字滤波器设计	76
3.4 有限长单位脉冲响应数字滤波器设计	90
3.5 IIR 与 FIR 数字滤波器的比较	100
小结	100
第四章 数字信号处理的软件实现	102
4.1 引言	102
4.2 快速傅里叶变换的软件实现	103
4.3 数字滤波器的软件实现	108

第五章 数字信号处理中有限寄存长度的影响	111
5.1 引言	111
5.2 表数法对量化的影响	111
5.3 模拟信号取样过程中的量化作用	114
5.4 实现无限冲激响应数字滤波器时有限寄存长度的影响	116
5.5 实现有限冲激响应数字滤波器时有限寄存长度的影响	127
5.6 离散傅里叶变换计算中有限寄存长度的影响	130
小结	137
第六章 数字信号处理的应用举例	138
6.1 语音信号处理	138
6.2 雷达信号的数字处理	146
附录 数字信号处理习题与习题解答	151
参考文献	178

绪 论

数字信号处理起源于 17 和 18 世纪的数学,它所采用的各种方法及种种应用已有悠久的历史,就像牛顿和高斯那样“古老”。但是,它又像数字计算机和集成电路那样,以崭新的面貌出现于世,在生物医学工程、声学、雷达、地震学、语音通信、数据通信、核科学等许多领域充分显示其重要作用。现在,科学技术的进步和生产发展的需求的与日俱增,促进了数字信号处理学科的发展,产生了各种各样的巧妙的信号处理算法;更突出的是,计算机技术的飞速发展,为数字信号处理增添了巨大的生命力。

数字信号处理主要研究用数字或符号序列表示信号和处理信号。处理的目的是估计信号的特征参数,也可以是把信号变换成某种更符合需要的形式。例如,通过分析和运算,可以估计脑电图或心电图中的某种特征参数,帮助医生查找病因和分析病情的程度,确定合理的治疗方案;又例如,信号在信道上传输时,要受到各种干扰,其中包括失真、衰落和混入背景噪声等,信号处理要排除这些干扰。数字信号处理并不限于处理一维信号问题。多数图像处理需要采用二维信号处理技术,如 X 射线透视片的图象增强、卫星气象照片分析等均属于二维信号处理。石油勘探、地震测量和核实验监测等的数据分析同样需要多维信号处理。

20 世纪 60 年代中期发现的快速傅里叶变换算法,进一步加强了用数字方法实现数字信号处理的观点,其重要意义不仅是将计算傅里叶变换的速度提高了几个数量级,而且形成了一整套在离散时域上精确成立的特性和数学关系。它的重要作用是促使人们利用离散数学方法重新建立许多信号处理概念和算法,在离散时域上形成一套严格的关系式,从而使人们摆脱那种认为用计算机处理数字信号仅是模拟信号处理的近似的观点。由于这种观点上的改变,进而使人们对新兴的数字信号处理学科表现出了强烈的兴趣。

20 世纪 80 年代兴起的小波分析,为数字信号处理增添了新的活力。它的巨大优越性,将充分弥补傅里叶分析的缺陷,推进数字信号处理乃至整个信息产业跃入一个新的时代。

第一章 时域离散信号与系统

1.1 引言

信号可定义为一个运载信息的函数,可表示为 $f(t, x, y, z, \dots)$, 其中 t 表示时间, x, y, z 表示空间, 省略号“ $\dots$ ”表示信号还可为其它物理量的函数。为便于研究, 通常信号只用 $f(t)$ 表示, 即仅当做时间的函数。

若 t 为连续时间变量, 而 $f(t)$ 即信号的幅值也可连续取值, 则 $f(t)$ 称为模拟信号。如果不要求 $f(t)$ 连续取值, 即允许 $f(t)$ 取离散值, 则 $f(t)$ 称为连续时间信号。因此, 模拟信号可看做连续时间信号的特例。若 t 只能取离散的一组数值的话, 则 $f(t)$ 称为离散时间信号。通常, 这组离散时间信号是等间隔的。如果一个信号 $f(t)$ 的时间离散, 而幅值上是量子化的, 则这样的信号称为数字信号。显然数字信号是离散时间信号的特例。时域离散信号的基本理论适用于数字信号, 所以在建立数字信号处理的基本理论时, 是以时域离散信号的理论为先导的。

数字信号一般是由模拟信号取样和量子化得到的, 如图 1.1 所示。

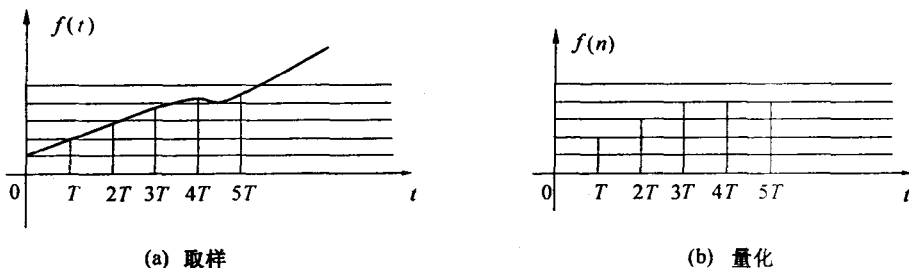


图 1.1 连续时间信号的取样与量化

对信号进行加工或处理的设备或运算程序都称为系统。信号处理系统可按信号的分类定义为: 模拟系统、连续时间系统、离散时间系统和数字系统。

从某种观点来看, 数字信号处理是多种计算机算法的汇集, 因而可认为它是计算数学的一个分支。它包含的内容如图 1.2 所示。

从图中可见, 时域离散系统理论和离散傅里叶变换(DFT)是整个领域的理论基础, 数字滤波和谱分析是数字信号处理的基本内容, 微处理器是实现数字信号处理的核心。一个基本的数字信号处理系统如图 1.3 所示, 从中可以看出数字信号处理的一般过程。模拟输入信号 $x_a(t)$ 首先通过前置取样滤波器, 对进入系统的最高频率加以限制。然后在 A/D 转换器中每隔时间 T 读出一 $x_a(t)$ 的幅值, 将其量化为标准电平。其后 A/D 转换器将量化电平转换为数字, 一般采用二进制数。这时 $x_a(t)$ 变为 $x(n)$, 即转化为序列。数字序列 $x(n)$ 经微处理器按需要进行加工处理, 之后转换为另一序列 $y(n)$, 再经过 D/A 转换器将

数字量转换为模拟电压信号。最后利用滤波器除去不必要的高频成分得到模拟输出信号 $y_a(t)$ 。

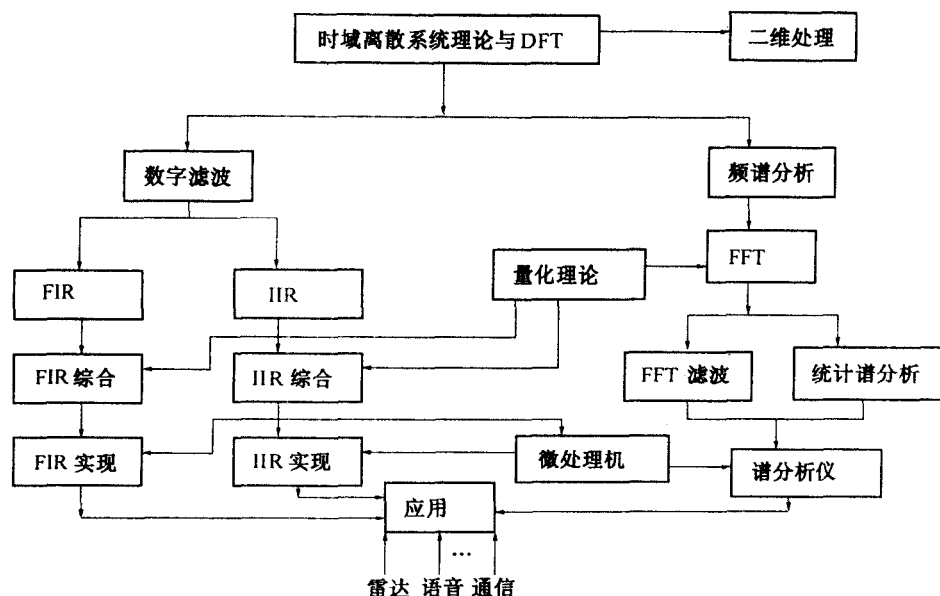
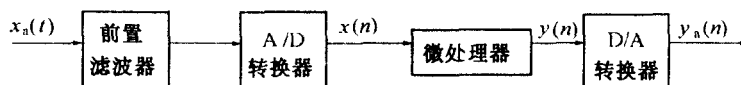


图 1.2 数字信号处理领域组成



模拟信号的数字式处理是否会丢失采样点之间的信息呢？在量化过程中在幅值上引入了信号误差，难道不会影响到信号处理的质量吗？上述问题会使人自然产生数字信号处理是模拟信号处理的近似的观点。采样定理和量化理论可以回答上述问题。采样定理实际上是信号的数字处理的基本准则。当满足采样频率为信号上限频率的 2 倍以上时，采样信号就完全具备被采样信号的频率特性。而当量化宽度足够小时，量化产生的误差完全可以落入要求的精度之内，通常可以远远高于模拟系统所能达到的精度。加上数字系统灵活性大，可靠性高，可以时分复用，可以使用计算机的各种功能，因而数字信号处理已在科学技术的各个领域得到广泛应用。

1.2 连续时间信号的取样及取样定理

时域离散信号通常是由连续时间信号的取样得到的，因此有必要先研究连续时间信号的取样过程，建立相应的数学表达式。

1.2.1 信号的取样

进行取样的取样器一般由电子开关组成，其工作原理如图 1.4(a) 所示。开关每隔 T

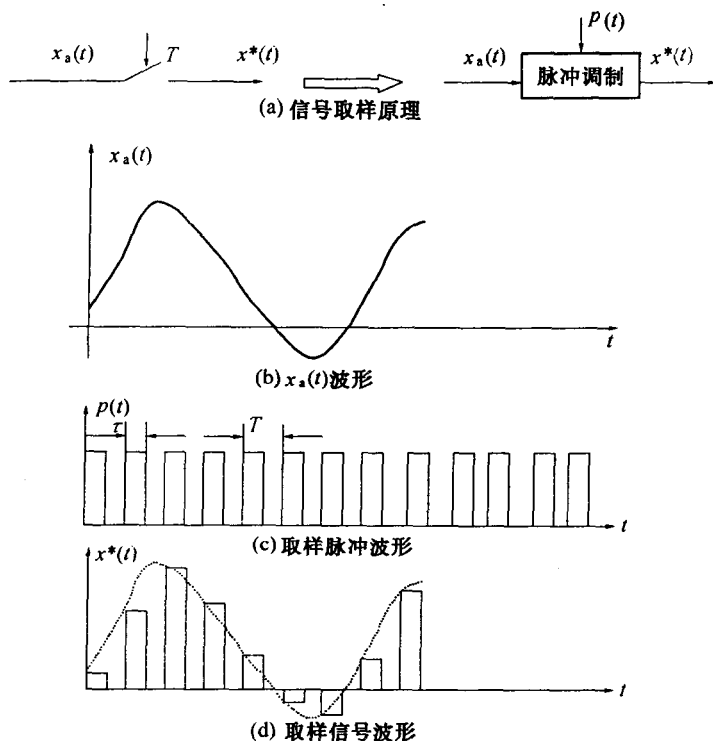


图 1.4 取样原理与取样波形图

短暂地闭合一次,接通连续时间信号,实现一次取样。若开关闭合时间为 τ ,则取样器的输出将是一列重复周期为 T 、宽度为 τ 的脉冲串。每脉冲的幅度等于该脉冲所在时刻的相应的连续时间信号的幅度,故可看做脉冲信号 $p(t)$ 的幅度被连续时间信号 $x_a(t)$ 所调制,即

$$x^*(t) = x_a(t)p(t) \quad (1.1)$$

$x^*(t)$ 表示取样信号。在 $\tau \rightarrow 0$ 的情况下, $x^*(t)$ 将成为一冲激序列。这些冲激序列准确地出现在取样瞬间,而它们的面积则准确地等于输入信号在取样瞬间的幅度,称之为理想取样信号。如图 1.5 所示。

建立上述理想取样信号的概念起两个作用:(1) 若取样脉冲宽度与系统中各时间常数相比是十分小的时候,这种冲激函数的假定是一种很好的近似,它将使分析化简。(2) 对模拟信号进行数字处理时,在规定的时刻上只出现一个数字。将理想冲激序列 $p_\delta(t)$ 表示为

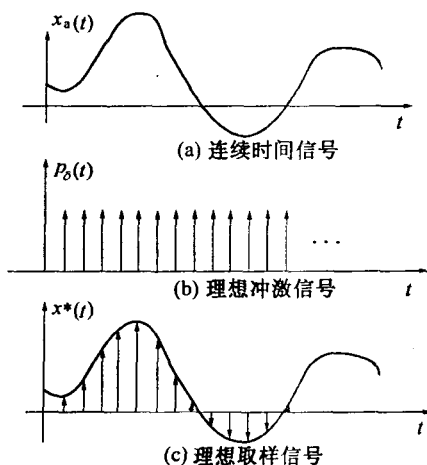


图 1.5 理想冲激取样信号

$$p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.2)$$

则取样信号可表示为

$$x^*(t) = x_a(t)p_\delta(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.3)$$

式中 $\delta(t)$ 为单位脉冲函数,且

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

考虑到 $\delta(t - nT)$ 只在 $t = nT$ 是非零,故(1.3)式可写为

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(nT)\delta(t - nT) \quad (1.4)$$

理想冲激取样可以看做是实际取样的一种科学的本质的抽象,并更集中地反映取样过程的一切本质特性。

1.2.2 取样定理

取样定理是数字信号处理中最基本、最重要的定理。取样定理给出了一个基本原则,同时,在其证明的过程中又揭示了取样后信号产生的变化,提示人们通过改变立场或视角来观察事物,研究或突出事物的特性,发现事物的本质属性。为推导或证明取样定理,首先对冲激函数序列 $p_\delta(t)$ 进行傅里叶变换。由于 $p_\delta(t)$ 是周期为 T 的周期函数,故可展开为傅里叶级数,即

$$p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm2\pi t/T}$$

级数的基频即取样频率为 $f_s = 1/T$,由傅里叶级数公式有

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-jm2\pi t/T} dt$$

在积分区间 $[-T/2, T/2]$ 内,只有一个冲激值 $\delta(t) |_{t=0} = 1$,故由 $\delta(t)$ 的性质, $C_m = 1/T$,由此可得

$$p_\delta(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm2\pi t/T} \quad (1.5)$$

下面再考虑 $x^*(t)$ 。采样信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X^*(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) p_\delta(t) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \left(\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm2\pi t/T} \right) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j(\Omega - m\Omega_s)t} dt \end{aligned} \quad (1.6)$$

其中 $\Omega_s = 2\pi/T$,为采样频率。而 $x_a(t)$ 的傅里叶变换为

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (1.7)$$

比较(1.6) 和(1.7) 两式可得

$$X^*(j\Omega) = (1/T) \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a[j(\Omega - m\Omega_s)] \quad (1.8)$$

或写为

$$X^*(j\Omega) = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a[j(\Omega - m2\pi/T)] \quad (1.9)$$

由(1.9) 式可以看出, 一个连续时间信号经理想取样后发生了两个变化: 一是乘以因子 $1/T$; 另一个是出现了无穷多个分别以 $\pm \Omega_s, \pm 2\Omega_s, \dots$ 为中心的与 $\frac{1}{T}X_a(j\Omega)$ 形状相同的副瓣, 称之为频谱的周期延拓。如图 1.6 所示。

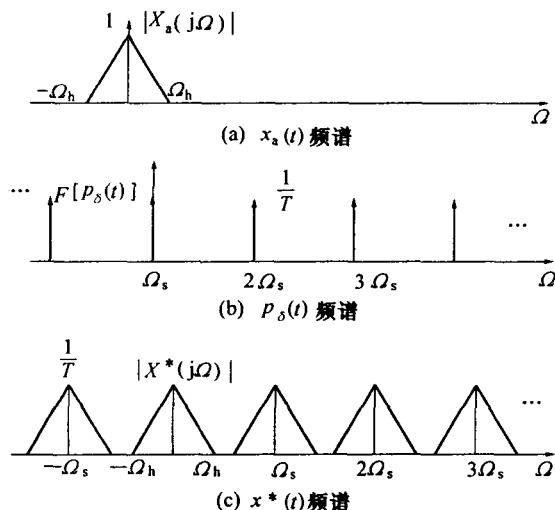


图 1.6 理想取样信号的频谱

这种频谱周期延拓的现象也可以从脉冲调制的角度得到解释。根据频域卷积定理, 时间上相乘的信号, 其频谱相当于原来两个时间函数频谱的卷积。由于冲激函数序列 $p_\delta(t)$ 具有图 1.6(b) 所示的梳状谱, 因而 $X_a(j\Omega)$ 与 $p_\delta(t)$ 的梳状谱的卷积就是将 $X_a(j\Omega)$ 在 $p_\delta(t)$ 各次谐波坐标位置上重新构图, 从而出现频谱 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓。由以上讨论得到一个重要结论: 在时域的取样形成频域的周期函数, 其周期等于取样频率 Ω_s 。这个概念在以后的讨论中将经常出现, 必须注意理解。

在实际情况下, $x_a(t)$ 为带限信号, 其频谱 $|\Omega| \leq \Omega_h$, Ω_h 为其上限频率或最高频率。如果 $\Omega_s \geq 2\Omega_h$, 理想取样信号频谱中, 基带频谱及各次谐波调制谱彼此是不重叠的, 如图 1.6(c) 所示。这时可用一带宽为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器取出原信号 $x_a(t)$ 的频谱 $X_a(j\Omega)$, 而滤掉它的各次调制频谱, 从而恢复出原信号, 这时取样没有产生信息丢失。但若信号的最高频率超过 $\Omega_s/2$, 各次调制频谱就会互相交叠起来, 部分频率的幅值就与原始情况不同, 因而不能分开和恢复这些部分, 这时, 信息产生了失真。频谱重叠的出现称为“混叠现象”。如图 1.7 所示。

理论上如果不是限带信号, 通过理想取样后, 就不可避免地发生混叠现象。为避免或

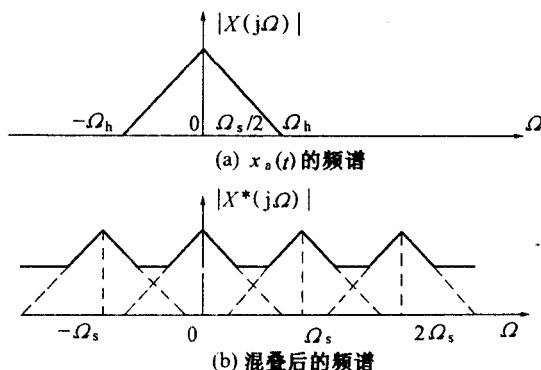


图 1.7 频谱的混叠

减弱混叠产生的失真,在取样前加一保护性的前置低通滤波器,以满足带限的要求。由图 1.7 可以看出,为避免发生混叠现象,应满足

$$\Omega_s \geq 2\Omega_h \quad (1.10)$$

(1.10) 式被称为取样定理,即取样频率必须大于原模拟信号频谱中最高频率的 2 倍,则信号 $x_a(t)$ 可由其取样信号 $x^*(t) = x(nT)$ 表示而不产生失真。满足取样定理的取样信号,通过一截止频率落于 Ω_h 和 $\Omega_s - \Omega_h$ 之间的低通滤波器后,即可恢复出原始信号。但因(1)不可能制造出理想的低通滤波器,所以在 Ω_h 和 $\Omega_s - \Omega_h$ 之间需要一个保护带;(2)一般对频带的上限 Ω_h 有一技术上的约定,例如指半功率点,所以当频率稍高于 Ω_h 时,仍有小部分信号分量存在,在 $\Omega_s = 2\Omega_h$ 时,经取样所产生的副瓣频谱就将有一小部分和有用信号频带重叠引起失真。基于上述原因,取样率必须稍大于理想的最小值,即可取

$$\Omega_s = (2.5 \sim 3)\Omega_h \quad (1.11)$$

取样频率太高,在技术上实现起来困难,在成本上也要提高。

任何实际的取样,其取样脉冲宽度 τ 总是非零的。但实际取样所得到的频谱与理想取样十分相似,前面讨论的基本取样要求对非零脉宽取样同样适用。

通常称 $\Omega_0 = \Omega_s/2$ 为折叠频率,信号频率谱中大于 Ω_0 的分量将以 Ω_0 为对称点折叠回来,从而造成频谱的混叠。若 $\Omega_s = 2\Omega_h$,称之为奈奎斯特取样率。 Ω_h 为信号中最高频率,又称奈奎斯特频率。这些定义或术语在数字信号处理的有关文献中经常碰到。

1.2.3 取样内插公式

设信号的最高频率不超过折叠频率,即

$$X_a(j\Omega) = \begin{cases} X_a(j\Omega) & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0 & |\Omega| \geq \Omega_s/2 \end{cases}$$

则理想取样的频谱不会产生混叠,故有

$$X^*(j\Omega) = (1/T)X_a(j\Omega) \quad |\Omega| < \Omega_s/2$$

$$X^*(j\Omega) = 1/T \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s)$$

让取样信号通过滤波器

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0 & |\Omega| \geq \Omega_s/2 \end{cases}$$

则该滤波器的输出 $Y(j\Omega) = X^*(j\Omega)H(j\Omega) = X_a(j\Omega)$, 即恢复了原模拟信号 $y(t) = x_a(t)$ 。对 $H(j\Omega)$ 进行傅里叶反变换

$$h_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin \frac{\pi}{T} t}{\frac{\pi}{T} t} \quad (1.12)$$

由卷积公式可得

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) h_a(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(\tau) \delta(\tau - nT) \right] h_a(t - \tau) d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) h_a(t - \tau) [\delta(\tau - nT)] d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) h_a(t - nT) \end{aligned} \quad (1.13)$$

而

$$h_a(t - nT) = \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t - nT)}{\frac{\pi}{T} (t - nT)}$$

故有

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t - nT)}{\frac{\pi}{T} (t - nT)} = x_a(t) \quad (1.14)$$

称 $h_a(t - nT)$ 为内插函数, 其波形如图 1.8 所示。公式(1.14) 称为取样内插公式。取样内插公式表明只要满足采样定理, 连续时间函数 $x_a(t)$ 就可用它的取样值 $x_a(nT)$ 来表示而不损失任何信息。这样, 我们就从时域上说明了取样定理的正确性。

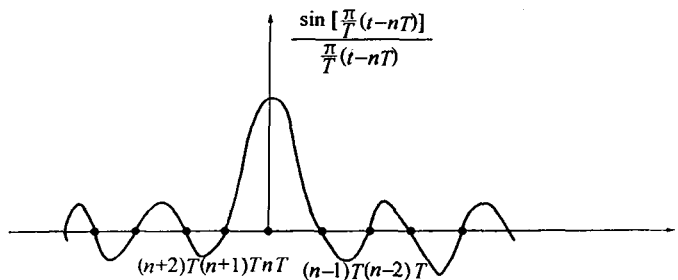


图 1.8 内插函数波形图

1.3 离散时间信号的表示及运算规则

1.3.1 序列表示法

在取样信号的表示法中,以等间隔的时间 nT 作为信号的变量,表明该信号是在离散时间 nT 点上出现的。在实际的信号处理中, T 往往当做固定的参量,与处理的方法无关,所以取样信号直接用序列 $x(n)$ 表示。 n 取整数,其范围为 $-\infty < n < \infty$ 。信号的表示为

$$x(n) \quad -\infty < n < +\infty \quad (1.15)$$

其图形如图 1.9 所示。

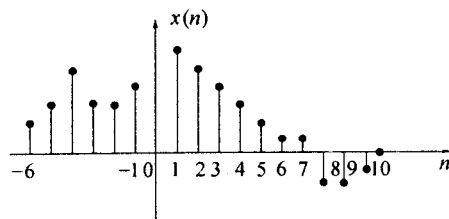


图 1.9 离散时间信号的图形表示

1.3.2 序列的运算规则

1. 序列的加减

$$x(n) \pm y(n) = w(n)$$

表示两序列同一时刻取样值逐一相加(或相减)所形成的新序列。

2. 序列的乘积

$$x(n)y(n) = w(n)$$

表示两序列同一时刻的取样值逐一对应相乘所形成的新序列。

3. 序列的标乘

$$Ax(n) = y(n)$$

表示序列 $x(n)$ 的每个取样值同乘以数 A 所形成的新序列。

4. 序列的延时(也称移位),若序列 $y(n)$ 具有下列取值

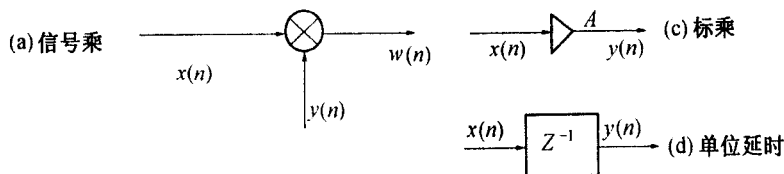
$$y(n) = x(n - n_0)$$

则称序列 $y(n)$ 是序列 $x(n)$ 经延时 n_0 个取样间隔的复现,式中 n_0 为整数。当 $n_0 = 1$ 时,称单位延时。

5. 分支运算

一个信号同时加到系统中两点或更多点的过程称为分支运算。设 $x(n)$ 有两个分支,则有 $x(n) = y_1(n) = y_2(n)$ 。硬件设计时,每增加一支,前级必须提供更多的功率,因此对具体的数字线路,其分支是有限的。

上述各种运算可用图形表示,如图 1.10 所示。



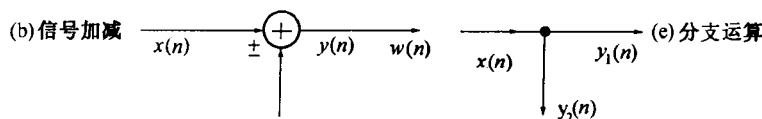


图 1.10 序列的各种运算

1.3.3 常用的典型序列

1. 单位取样序列

定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

也称单位脉冲序列。

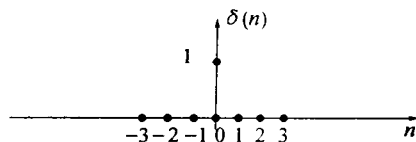


图 1.11 $\delta(n)$ 图形

2. 单位阶跃序列

定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

可用单位取样序列表示单位阶跃序列, 即

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

也可用单位阶跃序列表示单位取样序列, 即 $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$ 。

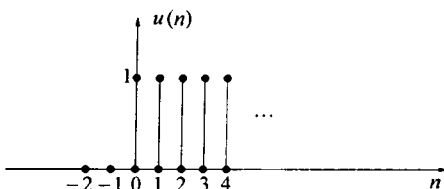


图 1.12 $u(n)$ 波形

3. 矩形序列

定义为

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n < 0, n > N-1 \end{cases}$$

$R_N(n)$ 由单位阶跃序列表示, 即

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N)$$

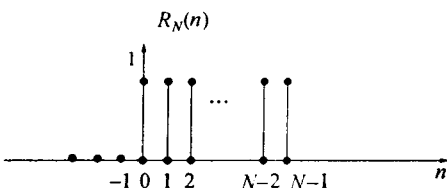


图 1.13 $R_N(n)$ 波形

4. 正弦序列

定义为

$$x(n) = \sin(n\omega_0)$$

ω_0 称数字域频率。相应地有余弦序列

$$x(n) = \cos(n\omega_0)$$

5. 实指数序列

定义为

$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

其中 a 为实数。若 $a < 0$, 序列是摆动的; 若 $a > 1$, 序列是发散的; 若 $0 < a < 1$, 序列是收敛的。

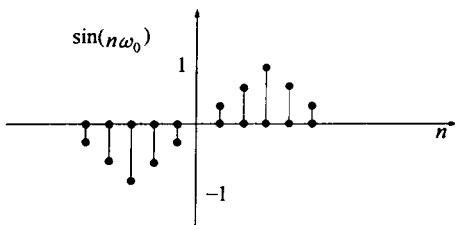


图 1.14 正弦序列波形 ($\omega_0 = 2\pi/16$)

6. 复指数序列

定义为

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega)n}$$

其中 σ 和 ω_0 为实数。复指数序列可展开为

$$x(n) = e^{\sigma n} \cos(\omega_0 n) + je^{\sigma n} \sin(\omega_0 n)$$

也可用极坐标表示为

$$x(n) = |x(n)| e^{j\arg[x(n)]}$$

若 $\sigma = 0$, 则

$$|x(n)| = 1 \quad \arg[x(n)] = \omega_0 n$$

应当指出,任何序列可由上述典型序列组合而成。特别值得注意的是,由单位取样序列及其延序列的加权和就可构成任一序列

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \quad (1.16)$$

这个表示在今后分析离散时间线性非时变系统时是很有用的。另外,由于信号是有能量的,因而表示信号的序列也应当具有能量,可以用 ϵ 定义序列的能量,即

$$\epsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.17)$$

有些序列还具有周期重复的特点,例如正弦序列。但应当指出序列的周期必须取整数值,所以并不是所有正弦序列(或余弦序列)都是周期序列。说明如下,设某一正弦序列满足

$$\sin[\omega_0(n+N)] = \sin(n\omega_0)$$

这时,显然有 $N\omega_0 = 2k\pi$, 其中 k 为整数。 $N = \frac{2\pi}{\omega_0} k$, 若 $2\pi/\omega_0$ 为无理数,则无论 k 取怎样的整数均不能使 N 为整数,故正弦序列是否为周期序列,取决于 ω_0 的取值。

1.4 离散时间线性非时变系统及其分析

1.4.1 系统的定义及表示

数字信号处理就是将输入序列变换为所要求的输出序列。这种变换所需的算法或设备称为“系统”。可用 $T[\]$ 表示,即如果用 $x(n)$ 表示输入序列, $y(n)$ 表示输出序列,则 $y(n) = T[x(n)]$ 表示的为离散时间系统。若 $x(n)$ 和 $y(n)$ 为数字信号,则 $T[\cdot]$ 表示为数字信号系统。

若系统的输入为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, 输出分别为 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$, 即

$$y_1(n) = T[x_1(n)]$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)]$$

且满足

$$T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 T[x_1(n)] + a_2 T[x_2(n)] = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$$

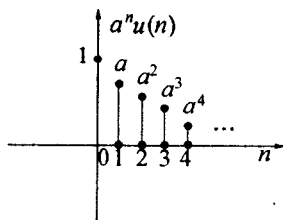


图 1.15 实指数序列 ($0 < a < 1$) 波形