ZHONGXUE
SHUXUE
JINGSAI
PEIXUN
TIJIE

中学数学竞赛培训题解

湖南人民出版社

中学数学竞赛培训题解

主编　欧阳禄

编辑　吴克裘　李运樵
　　　尤兆桢　孙希文
　　　李求来　刘裔宏
　　　陈贻泽　李宗铎
　　　曾宪侯　朱石凡

审定　孙本旺

湖南人民出版社

一九八〇年·长沙

中学数学竞赛培训题解
欧阳禄 主编
责任编辑：孟实华
装帧设计：彭　一

湖南人民出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　　湖南省新华印刷一厂印刷

1980年3月第1版　1981年8月第2次印刷
字数：263,000　印张：12.875　印数：50,001—94,000
统一书号：7109·1243　　定价：0.93元

序

这本书是欧阳禄同志主持选编并解答出来的，目的是用来培训参加全国中学数学竞赛的学生。内容丰富，解法新颖，富有启发性。我们认为，值得推荐出版，以供本省中学生参考。它不仅是准备参加竞赛的学生的良好读物，也是其他中学生以及具有相当程度的自学者的有价值的参考书。

当然，读者在读这本册子时，应该首先自己解决问题，然后参看本书解答，来验证自己的方法是否正确，要这样才有益处。

孙本旺

1979.7.15.

编 者 的 话

为了培训参加全省和全国中学数学竞赛的学生，省数学学会委托我省部份高等院校和有关部门，新编、改写和翻译了一些初等数学题，供各地辅导小组参考。参加这项工作的有：

国 防 科 技 大 学　孙本旺　吴克裘　李运樵

湖 南 师 范 学 院　尤兆桢　孙希文　李求来

湖　南　大　学　刘裔宏

长 沙 基 础 大 学　欧阳禄

湖南省教学研究室　陈贻泽

长沙市教师进修学院　李宗铎

长 沙 市 第 一 中 学　曾宪侯

湖南师院附属中学　朱石凡

我们选编此书的原则是：加强基础、联系实际、启发思维、增长智慧，要求难而不怪，高而可攀。考虑到在国际上要有个比较（选题中有些本来就是各国竞赛题），又全部翻译了美国的历届数学竞赛题（少数原文不妥之处已修正）作为附录。长沙市及省内数学界人士对此都很关心，不少同志寄来了题目及解答。在此基础上进行了两次整理、编辑，最后由孙本旺同志作了全面的审定。此项工作都是在业余时间进行的，比较匆促，希望读者把书中的问题和自己的意见及时告诉我们，不胜感谢。

本书所用符号说明如下：

$(a、b)$ 在解析几何中表平面上的点；在代数中表开区间 $a<x<b$；在数论中表a、b两数的最大公约数，如 $(12,18)=6$。

$(a、b、c)$ a、b、c三数的最大公约数，如$(12,18,24)=6$。

$[a、b]$ 在代数中表闭区间$a\leqslant x\leqslant b$；在数论中表a、b两数的最小公倍数，如$[12, 18]=36$。

$[a、b、c]$ a、b、c三数的最小公倍数，如$[12,18,24]=72$。

$[a]$ a的整数部份，即最接近a而不超过a的整数。如

$[\sqrt{2}]=1$。 $[-4]=-4$。 $[-2.3]=-3$。

(a) a的小数部份，即$a-[a]$。如$(\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$。

$(-4)=0$，$(-2.3)=0.7$。

$max(a、b、\cdots,c)$ a、b，$\cdots c$诸数中的最大者。如

$$max(3, 2.2, 4, 3.8)=4$$

$min(a、b、\cdots,c)$诸数中的最小者。如

$$min(3,2.2,4, 3.8)=2.2$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ $a_1+a_2+\cdots+a_n$的缩写记号。

$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$的缩写记号.

$a|b$ a能整除b，即b是a的倍数，a是b的约数。

$a\equiv b\ (mod c)$ 以c为模数时a与b同余，即$c\mid(a-b)$。

欧阳禄 1979.8.

目　录

Ⅰ. 数　　论

1. 把1、2、3、4、5、6、7、8、9九个数字，填进 3×3 的方格中，使得任何横行、竖行及对角线上三数之和都是15.

解 设各格已填好各数如图(1)，其中 a、b、c、d、e、f、g、h、i 各不相等，但每个字母都限于在1、2、3、4、5、6、7、8、9中取值. 由题设，当有

a	b	c
d	e	f
g	h	i

图　1

$$a+e+i=15,$$
$$b+e+h=15,$$
$$c+e+g=15,$$
$$d+e+f=15.$$

$\therefore\quad (a+b+c+d+e+f+g+h+i)+3e=60.$

而　$a+b+c+d+e+f+g+h+i=45,$

$\therefore\quad 3e=15,\ e=5.$

再看1应填入哪一格，设 $a=1$，则有 $i=9$.

如果 c 取2、3、4，则有

$a+b+c=1+b+c<1+9+5=15.$

如果 c 取6、7、8，则有

$c+f+i=c+f+9>5+1+9=15.$

故　$a\neq1.$

基于对称性，c、g、i 也都不能为 1。

于是，b、d、h、f 有可能为 1，基于对称性，任取一个，如果取 $b=1$，则 $h=9$，于是方格中填进三个数如图（2）。

再看 2 当填入哪一格，显然 2 不能在第一行，若 2 在第二行，可取 $d=2$，容易证明，这样得不出所需的图形，故 $d\neq2$，同样，$f\neq2$。

取 $g=2$，于是 $c=8$，进而可按次填出 $a=6$，$i=4$，$f=3$，$d=7$，其形如图（3）。

	1	
	5	
	9	

图 2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

图 3

注意：这种图形，在三千年以前我国即已作出，如图（4）。很多科学家认为，如果宇宙中别的星球上有智力发展程度很高的生物，而我们希望告诉他们，地球上也有智力发展很高的生物。那末，在语言、文字、符号都不通的情况下，如给他们看看这个图，他们也就会明白。

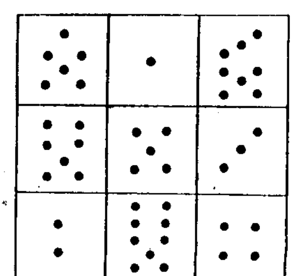

图 4

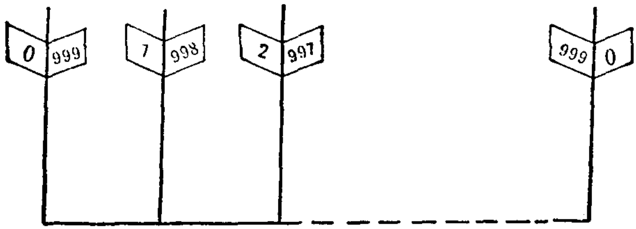

图 5

2. 连结A、B两城的公路长999公里，沿路每隔1公里竖立一个里程标，上面标出该处到A、B两城的距离．问只使用两个数字来标记公里数的里程标共有多少个？（例如，位于A、B两城的两个里程标都满足题目的要求，只用到0和9两个数字标记公里数．）

解 任一里程标上的公里数均可用一个三位数$(abc)=100\times a+10\times b+c$（其中$a$、$b$、$c$是十进制数字）表示．只需考虑由一个数字或两个数字组成的三位数，即如下形式的三位数：

(aab)；(aba)；(baa)；(aaa)．

如果这些数表示相应里程标到一个城市的距离，则到另一个城市的距离可以表为：

$(9-a,\ 9-a,\ 9-b)$；$(9-a,\ 9-b,\ 9-a)$；

$(9-b,\ 9-a,\ 9-a)$；$(9-a,\ 9-a,\ 9-a)$．

根据题目要求必须有$b=9-a$．因此要找的里程标将是：

9	990	118	881	227	772	…………	990	9
90	909	181	818	272	727	…………	909	90

900	99	811	188	722	277	…………	99	900
0	999	111	888	222	777	…………	999	0

总共有40个.

3. 证明和数$1+2+3+\cdots\cdots+n$(n为自然数)的末位数字不可能是2, 4, 7, 9.

证 设 $1+2+3\cdots\cdots+n=k$, 则

$$k=\frac{n(n+1)}{2},$$

由此得到 $n=\dfrac{-1+\sqrt{8k+1}}{2}$. $\quad *$

由于n是自然数, 故 $8k+1$必是一个完全平方数; 但一个完全平方数的末位数字不能是2, 3, 7, 8, 所以由(*)式推出k的末位数字不能是2、4、7、9.

4. 设N是整数, 证明N^5与N的末位数字一定相同.

证 只要证明$10\mid(N^5-N)$.

$$\begin{aligned}N^5-N&=(N-1)N(N+1)(N^2+1)\\&=(N-1)N(N+1)(N^2-4+5)\\&=(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)\\&\quad+5(N-1)N(N+1).\end{aligned}$$

$\because$ $(N-2)$, $(N-1)$, N, $(N+1)$, $(N+2)$是相邻的五个整数, 其中必含有偶数及5的倍数.

$\therefore$ $10\mid(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)$.

又 $(N-1)$, N, $(N+1)$是相邻的三个整数, 其中必含有

偶数，

$\therefore\quad 10|5(N-1)N(N+1)$.

$\therefore\quad 10|(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)$

$+5(N-1)N(N+1)=N^5-N$.

即　N^5与N的末位数字相同。

5. 证明整数$2^{55}+1$能被11整除。

证　利用恒等式

$(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1})$.

令　$a=2^5$，$b=-1$，$n=11$，得到

$$2^{55}+1=(2^5+1)(2^{50}-2^{45}+2^{40}-\cdots\cdots-2^5+1)=33\cdot N.$$

这里N是一个自然数。因此$2^{55}+1$能被33整除，当然更能被11整除。

6. 当n为奇数时，证明16可以整除n^4+4n^2+11。

证　$n^4+4n^2+11=n^4+4n^2-5+16$

$=(n^2+5)\quad(n^2-1)+16$.

由所设n为奇数，故令$n=2m+1$。

从而　$n^4+4n^2+11=\{(2m+1)^2+5\}\{(2m+1)^2-1\}+16$

$=8m(m+1)(2m^2+2m+3)+16$.

但$m(m+1)$为2的倍数，从而n^4+4n^2+1为16的倍数。故得所证。

另证　$n^4+4n^2+11=(2m+1)^4+4(2m+1)^2+11$

$=16m^4+32m^3+24m^2+8m+1+16m^2+16m+4$

$+11$

$=16(m^4+2m^3+2m^2+m+1)+8m^2+8m$

$$=16(m^4+2m^3+2m^2+m+1)+8m(m+1).$$

对于一切整数m，$8m(m+1)$都是16的倍数，故n^4+4n^2+11是16的倍数。

7. 证明：若n是偶数，则24可以整除$n(n+1)(n+2)$。

证 由所设n是偶数，故设$n=2m$。

因此 $n(n+1)(n+2)=4m(m+1)(2m+1)$

$$=4m(m+1)[(m+2)+(m-1)]$$

$$=4m(m+1)(m+2)+4m(m+1)(m-1).$$

由于三位连续整数的乘积是 6 的倍数，因此$4m(m+1)(m+2)$，$4(m-1)m(m+1)$ 是24的倍数.故它们的和$4m(m+1)(m+2)+4(m-1)m(m+1)$是24的倍数，从而得出，当$n$是偶数时，$n(n+1)(n+2)$是24的倍数，故得所证。

8. 证明：若n为奇数，则 24 可以 整 除 $(n+2m)^n-(n+2m)$。

证 由所设n为奇数，故可设$n=2k+1$(k为整数)，

从而

$$(n+2m)^n-(n+2m)$$

$$=(2k+2m+1)[(2k+2m+1)^{2k}-1]$$

$$=(2k+2m+1)\{[(2k+2m+1)^2]^k-1\}$$

$$=(2k+2m+1)[(2k+2m+1)^2-1][(2k+2m+1)^2]^{k-1}$$
$$+[(2k+2m+1)^2]^{k-2}+\cdots\cdots+(2k+2m+1)^2+1]$$

$$=(2k+2m+1)[(2k+2m+1)-1][(2k+2m+1)+1][(2k$$
$$+2m+1)^{2k-2}+(2k+2m+1)^{2k-4}+\cdots\cdots+1]$$

$$=4(2k+2m+1)(k+m)(k+m+1)[(2k+2m+1)^{2k-2}$$

$+(2k+2m+1)^{2k-4}+\cdots\cdots+(2k+2m+1)^2+1]$.

但是 $(2k+2m+1)(k+m)(k+m+1)$

$=(k+m)(k+m+1)[(k+m+2)+(k+m-1)]$

$=(k+m)(k+m+1)(k+m+2)+(k+m-1)(k+m)(k+m+1)$,

故 $(2k+2m+1)(k+m)(k+m+1)$为 6 的倍数.

因此 $4(2k+2m+1)(k+m)(k+m+1)$为24的倍数,故得所证.

9. 设a和n是任意自然数.证明$a^{4n+1}-a$能被30整除.

证 设$P_n=a^{4n+1}-a$.当$n=1$时有

$$P_1=a^5-a=a(a-1)(a+1)[(a^2-4)+5]$$

$$=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5(a-1)a(a+1),$$

式中第一项是$5!$ 的倍数,能被30整除,第二项是$5\cdot 3!=30$的倍数,因此P_1能被30整除.设P_n能被30整除,则

$$P_{n+1}=a^{4n+5}-a=P_n+a^{4n+5}-a^{4n+1}$$

$$=P_n+a^{4n}\cdot P_1.$$

同样能被30整除.所以根据归纳原理$P_n=a^{4n+1}-a$能被30整除.

10. 设x、y、z是三个不同的整数.证明$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$能被$5(x-y)\cdot(y-z)\cdot(z-x)$整除.

证 令$x-y=a$, $y-z=b$, $z-x=c$,

则 $a+b+c=0$, $c=-(a+b)$.于是

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$$

$$=a^5+b^5-(a+b)^5$$

$$=a^5+b^5-a^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4-b^5$$

$$=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$$

$$= -5ab[(a+b)(a^2-ab+b^2)+2ab(a+b)]$$

$$= -5ab(a+b)(a^2+ab+b^2).$$

故原式能被$-5ab(a+b)=5abc=5(x-y)(y-z)(z-x)$整除。

11. 证明多项式$(x+1)^m+x^m+1$能被x^2+x+1整除的充要条件是$m=6n\pm2$，其中n是任意自然数。

证 设方程$x^2+x+1=0$的两根为x_1和x_2。易知$x_i^3=1$；$1+x_i=-x_i^2$（$i=1$，2）。多项式$f(x)=(x+1)^m+x^m+1$能被x^2+x+1整除的充要条件是$f(x_i)=0$（$i=1$，2）。

不难验证，

当$m=6n$时，$f(x_i)=3$；

当$m=6n+1$时，$f(x_i)=-2x_i^2\neq0$；

当$m=6n+2$时，$f(x_i)=0$；

当$m=6n+3$时，$f(x_i)=1$；

当$m=6n+4=6(n+1)-2$时，$f(x_i)=0$；

当$m=6n+5$时，$f(x_i)=-2x_i$。

所以已给多项式能被x^2+x+1整除的充要条件是$m=6n\pm2$，其中n为自然数。

12. 已知a、b、n是自然数，并且对于任何不等于b的自然数k，k^n-a能被$k-b$整除。证明$a=b^n$。

证 因为$k^n-b^n=(k-b)(k^{n-1}+k^{n-2}b+k^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$，其中$k$和$b$是任何整数，$k\neq b$。所以$k^n-b^n$能被$k-b$整除。于是$(k^n-b^n)-(k^n-a)=a-b^n$能被$k-b$整除，即能被任何不等于0的整数整除。故必须$a-b^n=0$，即$a=b^n$。

13. 任给一n位数，把这个n位数的数字任意排列成一新

数（例如把1234排列为3142），证明新数与原数的差是 9 的倍数.

解 任给一个 n 位数，记为$\overline{a_1a_2\cdots a_n}$，设$\overline{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}}$是$\overline{a_1a_2\cdots a_n}$的各位数字重排后的新数，则

$$\begin{aligned}\overline{a_1a_2\cdots a_n} &= a_1\times 10^{n-1}+a_2\times 10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\times 10+a_n\\ &= a_1\times(10^{n-1}-1)+a_2\times(10^{n-2}-1)+\cdots+a_{n-1}\times\\ &\quad (10-1)+(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\ &= 9\text{的倍数}+(a_1+a_2+\cdots+a_n).\end{aligned}$$

同样有

$$\overline{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}}=9\text{的倍数}+(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}).$$

但 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$

$\therefore$ $\overline{a_1a_2\cdots a_n}-\overline{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}}=9$的倍数.

14. 在1，2，3，…，100这前100个自然数中任取51个数，证明这51个数中至少可以找出两个数，其中一个为另一个的倍数.

证 我们把这100个自然数都写成 2 的乘幂与一个奇数的乘积的形式：$2^k\cdot p$（p为奇数）的形式，将且只将所含奇数约数相同的数分作一类（例如，将且只将$2^0\cdot 7$，$2^1\cdot 7$，$2^2\cdot 7$，$2^3\cdot 7$作为一类），因为 100 以内只有 50 个不同的奇数，所以百以内的自然数可以这样分成50类. 这样的分类具有以下特点：

（1）每个数都分在一个类内且只分在一个类内（即无重复，无遗漏）；

（2）每个类中如有两个或两个以上的数，则其中任意两数必有一个是另一个的倍数.

我们从这50类中任取51个数，就至少在一个类里取了两个

数，这两个数就有一个是另一个的倍数。

15. 在1，2，3，…，100这前100个自然数中任取27个数，证明这27个数中至少有两个数不互质。

证 我们把这100个自然数按以下的办法来进行分类：

(1) 1 单独作一类；

(2) 2 的倍数作为一类；

(3) 3 的倍数中不含约数 2 的数作为一类；

(4) 5 的倍数中不含约数2，3的数作为一类；…因为100以内共有25个质数，所以100以内的数可以这样分成26类。这样的分类具有以下的特点：

(1) 每个数都分在一个类内且只分在一个类内；

(2) 每个类中如有两个或两个以上的数，则其中任意两数不互质。

我们从这26类中任取27个数，就至少在一个类里取了两个数，这两个数就不互质。

16. 证明：当 a 与 b 两个正整数中至少有一个不是 3 的倍数时，则 3 不能整除a^2+b^2。

证 (1) 当a、b中只有一个不为 3 的倍数时，不妨设 a 是 3 的倍数，b不是 3 的倍数，

则 $a=3m$，$b=3n\pm1$。

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (3m)^2+(3n\pm1)^2 \\ &= 9m^2+9n^2\pm6n+1 \\ &= 3(3m^2+3n^2\pm2n)+1。\end{aligned}$$

故 a^2+b^2不是 3 的倍数。