理论力学习题集

〔苏〕H. A. 勃拉日尼欽科等著

肖尙彬等译

高等教育出版社

本习题集系根据苏联国家造船工业出版社（Государственное союзное издательство судостроительной промышленности）出版的、由 Н. А. 勃拉日尼欽科(Бражниченко)、В. Л. 卡恩(Кан)、Б. Л. 明茨别尔格(Минцберг)和 В. И. 莫罗佐夫(Морозов)合著的“理論力学习题集”(Сборник задач по теоретической механике)譯出的。

本习题集剛体靜力学部分由王友松譯，运动学部分由肖尙彬譯，动力学部分由孟鎭江和蔡泰信譯。原书由吕茂烈校訂。

本习题集可作为高等工业学校理論力学課程的教学参考书。习题集中的习题多数不同于現行的各种习题集，除一般內容的习题外，还包含有不少值得推荐的基本概念题，以及由新技术学科如火箭动力学、解算装置机构和电荷相互作用等方面所选出的新穎习题。习题集中还有一部分較难的习题，可供理論力学教师和綜合大学数学力学系的学生参考。在每一类型的习题前都附有簡要的理論和例题，給出了解题的方法指示，因此本习题集也可供业余学习参考。

理论力学习题集

〔苏〕Н. А. 勃拉日尼欽科等著

肖尙彬等译

北京市书刊出版业营业許可证出字第119号

高等教育出版社出版（北京景山东街）

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·1180　开本 850×1168 1/32　印张 17 13/16

字数 375,000　印数 0,001—5,000　定价（5）¥1.70

1965年6月第1版　　1965年6月北京第1次印刷

序

本习題集可作为高等工业学校理論力学的教学参考书，并作为众所周知的 И. В. 密歇尔斯基（Мещерский）教授所著的习題集的补充；习題集包含了 200—220 学时教学大綱的全部題材。

在每章的开始（有时在相应的一节的开始）引述了基本公式和方程，这样学生就用不着再去查閱其他的資料。当然，这些参考資料的存在，并不排除深入研究理論的必要性。

在习題集的相应章节里給出了解題的方法指示，列举了 122 个典型习題的詳細的題解。除桁架計算和平面机构的图解研究这两部分习題以外，所有的习題都附有答案。

作者謹向評閱者 Н. В. 布捷宁（Бутенин）教授和 Н. Н. 尼基京（Никитин）副教授、莫斯科鲍曼高等工业学校理論力学教研室，尼古拉耶夫斯基（Николаевский）造船学院理論力学教研室，西北函授工学院理論力学教研室，以及 Г. Н. 烏沙科娃（Ушакова）和 Р. И. 什卡多夫（Шкадов）表示感謝，他們在評閱本习題集和准备它出版时提出了很多重要的意見和有益的建議。作者还特别感謝 А. Ф. 札哈列維奇（Захаревич）副教授，他在校訂本习題集时提出了許多宝貴的意見。

作者完全理解，像这样繁重的工作不可能沒有缺点，因此欢迎大家提出批評和意見。

目　录

第一部分　剛体靜力学

靜力学平衡問題的一般解題方法的指示

求解靜力学平衡問題的最普遍的方法是分析法。預先沒有研究有关的理論知識，就不能着手去解題。

所謂剛体的平衡，应理解为剛体相对于它周圍物体来讲是处于靜止的状态（一般指相对于地面的平衡，也包括物体作直綫勻速运动——校者）。作用在自由剛体上的各力的平衡只是該物体平衡的必要条件，但不是充分条件。剛体只有原来就是靜止的，才会在平衡力系对它作用时，仍然处于靜止状态。

应用分析法解題时，遵循下列步驟是有益的。首先必需清楚地理解題意：判明什么是已知的，什么是待求的，然后用图来說明。此后必須：

明确研究对象，即其平衡需要研究的那个物体或质点；

在图上画出作用在这个对象上的主动力；

判明直接加于物体的約束，解除这些約束，并在图上画出約束反力；

根据各力的作用綫在空間的分布情况来分析所得力系（包括主动力和約束反力），确定平衡方程的数目；

指出題中未知量的数目，确定它是否为靜定問題。

选取坐标軸，建立研究对象在所有力（包括約束反力）作用下的平衡方程；

按題設条件对需求的未知量求解这些方程。

平衡方程写成一般形式来求解比較方便。解出用已知量来表示待

求量的一些式子以后，应暂不进行数字計算，而先从量綱上校核它們的正确性。将全部数据换算成同一种单位制以后方可进行数字計算。計算时建議用計算尺。

以后将用具体例子說明如何求解靜力学中剛体的平衡問題。

在大多数靜力学問題中，通常有某些約束反力事先不仅不能給出它們的大小，甚至不能指出它們的方向。在这种情况下，可将未知約束反力沿相应的坐标軸的方向分解，并将这些分量作为未知量引入平衡方程。

如果在方程的解中出現某个約束反力的分量为負值，則表明該分量实际上是朝着坐标軸的負向。但当約束反力的眞实方向不会引起疑問时，不管坐标軸所采用的方向怎样，最好按实际作用的方向画出該約束力。

如果根据題設条件，需求物体在某个約束上的作用力(压力、绳索的張力、杆件的內力等等)，則在平衡方程中应引入这些約束的反力。所求的力与这些約束反力大小相等，方向相反。

在靜力学中，有时需求解彼此間按某种形式联系的若干物体的平衡問題。在这种情况下，对每个物体分别写出平衡方程时，要考慮系統內各物体之間相互作用的力，这些力成对地大小相等而方向相反。

在某些情况下，把彼此联系着的整个物体系或其中某几个物体的組合当成一个剛体来研究它的平衡往往是方便的(根据剛化原理可以这样做)。

当求理想的剛性結构中杆件的內力时，用截面法是方便的。这时可假定被截各杆均受拉力，因此这些杆件的反力将指向被截去的那部分結构的一面。如果在解題的結果中某个反力出現負值，則表示对应的杆件实际上是受压力。

有时，在解題时需要知道某个在題設条件中未給定的量，如角度或长度等。在这些情况下，必須用某个字母来代表該量而引入平衡方程。

如果在解題过程中所引入的量沒有被消去，則它必須用已知量表示出来。

在靜力学部分，引用以下的基本符号：

$\bar{F},\bar{Q},\bar{P},\bar{G}$，等等—力；

F_x,F_y,F_z—力 $\bar{F}$ 在坐标軸 Ox,Oy,Oz 上的投影；

f—靜滑动摩擦系数；

k—滾动摩阻系数；

M,m—力偶矩；

$\bar{M}_O$—对于中心 O 的主矩；

$m_O(\bar{F})$—力 $\bar{F}$ 对于中心 O 之矩的代数量；

$\bar{m}_O(\bar{F})$—力 $\bar{F}$ 对于中心 O 之矩矢；

$m_z(\bar{F})$—力 $\bar{F}$ 对于軸 Oz 之矩；

$\bar{N}$—法向反力；

q—分布載荷强度；

$\bar{R}$—主矢；

$\bar{R}_A$—支座 A 的全反力；

$\bar{S}$—压力；

S_x,S_y—面积的靜矩；

T—杆的內力，绳的張力，等等；

$\bar{X}_A,\bar{Y}_A,\bar{Z}_A$—全反力 $\bar{R}_A$ 沿軸 Ox,Oy,Oz 的分力；

x,y,z—力的作用点的坐标；

x_C,y_C,z_C—重心的坐标；

φ—摩擦角。

第一章　汇交力系

在汇交力系的作用下，刚体的平衡方程为：

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0. \qquad (1.1)$$

公式 (1.1) 中包括主动力和作用在物体上的約束反力。如果作用在刚体上的汇交力系的各力位于同一平面內，則平衡方程只有两个。

求解某些問題时，还可利用关于三力平衡的定理：

如果物体在位于同一平面內的、互不平行的三个力作用下处于平衡，則这些力的作用綫必交于一点。

如果靜止物体受到有摩擦的約束的作用，則在考慮摩擦力的平衡方程以外，还应列入补充条件

$$F \leqslant fN, \qquad (1.2)$$

式中 f 为静滑动摩擦系数，N 为法向反力的大小。

在汇交力系的作用下，刚体的平衡問題可以用几何法和分析法来求解。前一方法仅对平面力系，特别是作用在物体上力的数目只有三个的情形下比較方便。当物体平衡时，由这三个力作出的力三角形应該自行閉合。

而分析法則还可用来求解由任意个力所組成的空間力系。但这时必須注意，对于空間汇交力系，题中未知量的数目不得超过三个，而对于平面汇交力系，則不得超过两个。

§1. 平面汇交力系

1. 物块 M_1 重 P(图 1a)，挂在不可伸长的柔绳 OM_1 上，并由另一不可伸长的柔绳 M_1AM_2 維持平衡，绳 M_1AM_2 跨过理想滑輪 A 并在

其自由端挂有物块 M_2。已知平衡时 M_1A 一段处于水平位置，OM_1 一段对鉛直綫的偏角为 α，試求物块 M_2 的重量 Q 和绳 OM_1 的張力。物块 M_1 的尺寸和绳的重量均不計。

解: 研究物块 M_1 的平衡。主动力有鉛直方向的自重 $\bar{P}$ 和水平力 $\bar{T}_2$。因为理想滑輪 A 仅改变力的方向，故力 $\bar{T}_2$ 的大小与物块 M_2 的重量 Q 相等。

绳 OM_1 构成了加在物块 M_1 上的約束。解除物块的約束幷画出沿绳向上的約束反力 $\bar{T}_1$。这样，物块 M_1 就在 $\bar{P}_1$、$\bar{T}_1$ 和 $\bar{T}_2$ 三个力所組成的平面汇交力系作用下处于平衡，且 $T_2=Q$(图 1b)。

現在用两种方法来求解本題: 几何法和分析法。

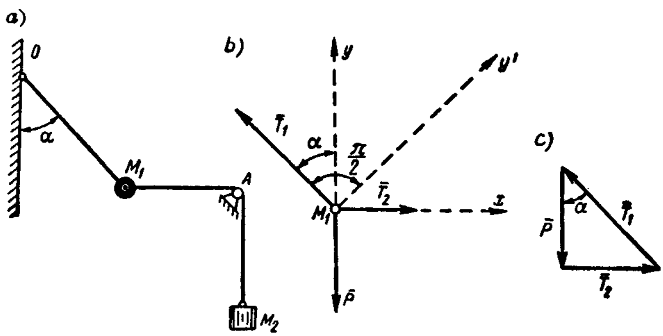

图 1

几何法 因为点 M_1 在三个力作用下平衡，所以由这三个力作出的力三角形应該自行閉合(图 1c)。作力三角形应該从已知力 $\bar{P}$ 开始。画出矢量 $\bar{P}$ 后，通过它的始端和末端引直綫，分别与力 $\bar{T}_1$ 和 $\bar{T}_2$ 的方向平行。这两直綫的交点决定了力三角形的第三个頂点。各矢量的指向由力三角形自行閉合的条件决定。这条件可用以校核未知反力的方向是否正确。

由力三角形求得:

$$T_2=P\,\mathrm{tg}\,\alpha,\quad T_1=\frac{P}{\cos\alpha}.$$

所以，与 T_2 相等的物块 M_2 的重量 Q 为

$$Q=P\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

而绳 OM_1 的張力的大小等于

$$T_1=\frac{P}{\cos\alpha}.$$

分析法 恰当选取坐标軸，以便平衡方程具有最簡单的形式。設坐标軸垂直于未知力，即可达到这个目的，但这时坐标軸可能成为不是正交的（如軸 M_1y 和 M_1y'）。通常采用正交的軸系，因此，我們取軸 M_1y 垂直于未知力 T_2，而令軸 M_1x 为水平。

力系 $\bar{P}$、$\bar{T}_1$、$\bar{T}_2$ 为平面汇交力系，因而有两个平衡方程。題中有两个未知量 T_1 和 T_2，亦即問題是靜定的。

按公式(1.1)建立平衡方程，有：

$$\Sigma F_{kx}=T_2-T_1\sin\alpha=0,$$

$$\Sigma F_{ky}=T_1\cos\alpha-P=0.$$

由此求得：

$$T_1=\frac{P}{\cos\alpha},\quad T_2=T_1\sin\alpha=P\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

如果采用軸 M_1y 和 M_1y'，則得：

$$\Sigma F_{ky}=T_1\cos\alpha-P=0,$$

$$\Sigma F_{ky'}=T_2\cos\alpha-P\sin\alpha=0.$$

这里每个方程中只含一个未知量，因此簡化了它們的求解过程。

2. 匀质圓柱 A，重量为 P，半徑为 r（图 2a），靠在半徑为 R 的圓柱的光滑表面 BC 上，并用位于对称横截面內、长为 l 的綫 CD 維持平衡。試求綫的張力和圓柱表面的反力。

解： 研究圓柱 A 的平衡。它受鉛直向下的重力 $\bar{P}$ 作用，光滑圓柱表面 BC 和綫 CD 构成了約束。解除約束，圓柱表面的反力 $\bar{N}$（图 2b）的方向是沿着两圓柱的公法綫，因而通过点 O_1；反力 $\bar{T}$ 的方向則是沿着綫 CD。因为在圓柱 A 上作用有三个力，故根据三力平衡定理，这些力

的作用綫应汇交于点 O_1。因而圓柱 A 在平衡时具有这样的位置，綫段 CD 将是圓柱半徑的延长綫。

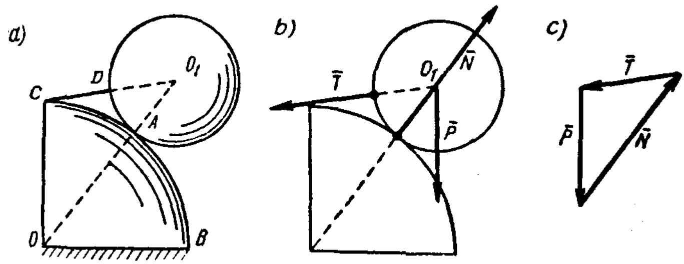

图 2

作出力三角形(图 2c)，这力三角形与 $\triangle OO_1C$ 相似。由三角形的相似关系得

$$\frac{T}{CO_1}=\frac{P}{CO}=\frac{N}{OO_1}$$

或

$$\frac{T}{l+r}=\frac{P}{R}=\frac{N}{R+r}.$$

由此求得:

$$T=\frac{l+r}{R}P,\quad N=\frac{R+r}{R}P.$$

对于本題，用分析法会带来較繁的計算。

3. 矩形板边长 $AB=a$，$BC=b$(图 3a)，頂点 B 用鉸鏈固定，而頂点 A 則靠在光滑的鉛直墻 EE 上。今在頂点 C 挂一重为 P 的物块 M，試求墻和鉸鏈的反力。板的重量不計。

解: 研究板的平衡。物块 M 的重力 $\bar{P}$ 为已知力。墻 EE 和鉸鏈 B 构成了約束。光滑墻的反力 $\bar{N}_A$ 的方向沿着墻的法綫(图 3b)，鉸鏈 B 的反力 $\bar{R}_B$ 的方向事先不能确定。由于板是在不平行的三个力 $\bar{P}$、$\bar{N}_A$ 和 $\bar{R}_B$ 的作用下处于平衡，則由三力平衡定理可以断定，这些力的作用綫必汇交于一点 K——力 $\bar{P}$ 和 $\bar{N}_A$ 的作用綫的交点。这就完全确定

了反力 $\bar{R}_B$ 的作用綫。为了求各反力的大小，应利用平衡条件或平衡方程。

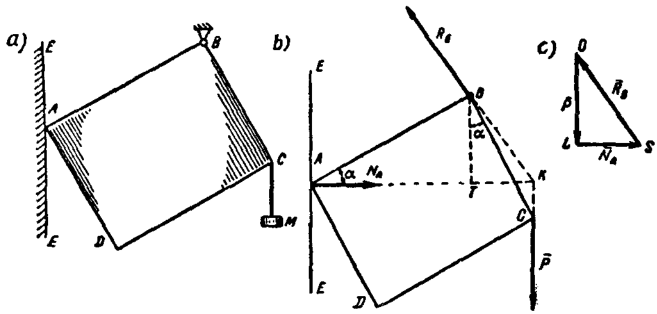

图　3

我們用几何法解題。作出力三角形，它应該自行閉合（图 3c）。为此，先从任意点 O 画出矢量 $\bar{P}$，然后由这矢量的始端 O 与末端 L 分别引出两直綫平行于力 $\bar{R}_B$ 和 $\bar{N}_A$ 的作用綫。設这两直綫的交点为 S。于是，$\overline{LS}=\bar{N}_A$，$\overline{SO}=\bar{R}_B$。由点 B 向直綫 AK 引垂綫 BT，于是将有

$$\triangle BTK \sim \triangle OLS,$$

因而

$$\frac{OL}{BT}=\frac{LS}{TK}=\frac{SO}{KB}$$

或

$$\frac{P}{BT}=\frac{N_A}{TK}=\frac{R_B}{BK}. \tag{a}$$

由 $\triangle ABT$ 得

$$BT=AB\sin\alpha=a\sin\alpha,$$

式中 α 为边 AB 对水平綫所形成的傾角。綫段 TK 是綫段 BC 的投影，因此，

$$TK=BC\sin\alpha=b\sin\alpha.$$

其次，

$$BK=\sqrt{(BT)^2+(TK)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha.$$

将这些值代入式(a)，有

$$\frac{P}{a\sin\alpha}=\frac{N_A}{b\sin\alpha}=\frac{R_B}{\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha},$$

由此最后得到：

$$N_A=\frac{b}{a}P,\quad R_B=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}P.$$

注意，这里两个反力的大小都与傾角 α 无关。

4(图 4)．当拆卸渦輪机外壳的盖子时，要求它始終处在水平位置。在图示装置中，是用螺絲拉杆来使盖子达到水平的。設渦輪机盖子重 600 kg，角 $\alpha=20^\circ$，$\beta=30^\circ$，試求杆 AB 和 CB 的內力 T_{AB} 和 T_{CB}。

答：$T_{AB}=268$ kg，　$T_{CB}=392$ kg.

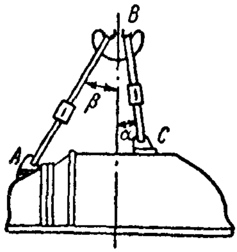

图　4

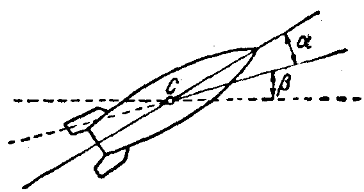

图　5

5(图 5)．噴气式客机作匀速直綫运动，其飞行方向与水平面成仰角 $\beta=25^\circ$。推力的大小为 10 t，并与飞机的运动方向成交角 $\alpha=5^\circ$。求当飞机重 20 t 时空气动力的合力 $\bar{Q}$ 的大小以及它与飞行方向的交角 γ。

答：$Q\approx17.21$ t，$\gamma\approx95^\circ$.

6(图 6)．在半徑 $r=6$ cm 的光滑固定球面的最高点系有弹性細绳，其自然长度(无应力时的长度) $l=3$ cm，剛性系数 $c=10$ kg/cm (即使绳伸长 1 cm 需力 10 kg)。在绳上挂一重质点后，此绳所包圓弧的对应圓心角为 $\frac{\pi}{6}$，試求該质点的重量以及它給球面的压力。

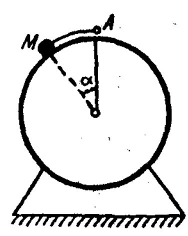

图　6

答：$P=\frac{c(\alpha r-l)}{\sin\alpha}\approx 2.8\,\mathrm{kg}$，

$N=\frac{c(\alpha r-l)}{\mathrm{tg}\,\alpha}\approx 2.42\,\mathrm{kg}$.

7(图7). 半徑为 r、重量为 $2P$ 的匀質圓管水平地挂在两条绳子上，两绳包住圓管，并分别处在与管子中心横截面呈对称的两个平行鉛直平面內，如图所示。設绳子所包圓弧的对应弦长为 b，試求每段绳中的張力。

答：$T=\frac{Pr}{b}$.

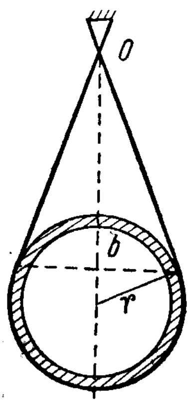

图　7

8(图8). 起重机 ABO 用绳 BC 維持平衡。設提升的物体 M 重 P，試求绳的張力以及鉸鏈 O 的反力的大小和方向。起重臂的 OB 部分鉛直，而绳处于 AB 的延长綫上。已知尺寸：$AB=a$，$OB=b$，$AO=c$。起重臂的重量不計。

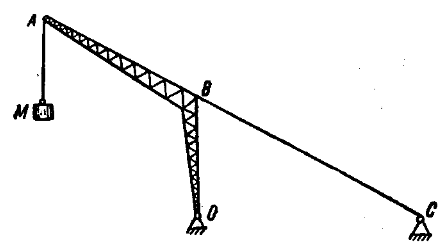

图　8

答：$T=\frac{a}{b}P$，$R_O=\frac{c}{b}P$.

反力 $\bar{R}_O$ 的方向沿直綫 OA。

9(图9). 杆 AB 长 l，一端 B 挂有重 P 的物块 M，另一端 A 靠在光滑的鉛直平面上，而杆上的点 C 靠在台阶上。設杆对水平面的

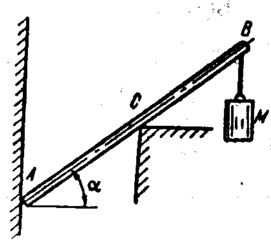

图　9

仰角为 α，試求平衡时支点 A,C 的反力和距离 AC。杆重和摩擦均不計。

答：$N_A=P\ \mathrm{tg}\ \alpha,\quad N_C=\dfrac{P}{\cos\alpha}$；

$AC=l\ \cos^2\alpha.$

10(图 10)．船只处于停泊，錨鈎位于点 A，而錨鏈孔(船身上拴錨鏈用的孔)在点 B。設錨鏈在水中重为 200 kg，从点 A 所引錨鏈的切綫对水平面成傾角 $\alpha=10°$，而从 B 点所引錨鏈的切綫对水平面成傾角 $\beta=45°$。試求錨鏈在錨鈎处的張力 T_A 和在錨鏈孔处的張力 T_B。

答：$T_A=247$ kg，$T_B=345$ kg.

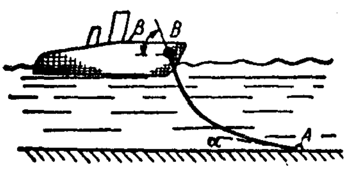

图 10

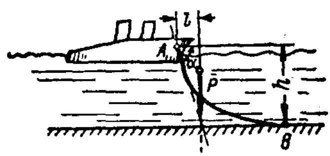

图 11

11(图 11)．船只处于停泊，錨鏈在水中重 P。重力的作用綫至錨鏈孔的距离为 l，点 A 与 B 的高度差为 h。設錨鏈在 B 点的切綫为水平，試求錨鏈在 A 点和 B 点的張力以及錨鏈在 A 点的切綫对水平面所成的傾角 α。

答：$T_A=\dfrac{\sqrt{l^2+h^2}}{h}P,\quad T_B=\dfrac{l}{h}P;\quad \alpha=\mathrm{arc\ tg}\dfrac{h}{l}.$

12(图 12)．立方形箱子重 P，在頂面上作用有水平力 $\bar{Q}$，試求将箱子向水平面翻轉时所必需的力 $\bar{Q}$ 的最小值。又問在剛要翻轉时箱子对支点 A 的压力 D 等于多少？

提示：剛翻轉时，作用在箱子上的力只有三个：$\bar{Q},\bar{P},\bar{R}_A=-\bar{D}$，它們应汇交于一点。

图 12

答：$Q=\dfrac{P}{2},\quad D=\dfrac{P\sqrt{5}}{2}.$

13(图 13)．气球 A 具有升力 $\bar{Q}$，用长 l 的无重绳子栓住，被風吹

动而偏移距离$OB=a$。設風力为水平，气球的尺寸和重量均不計，試求绳子的張力T和風力F。

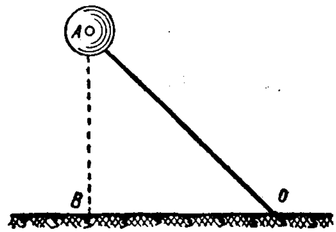

图 13

答：$T=\dfrac{lQ}{\sqrt{l^2-a^2}}$，

$F=\dfrac{aQ}{\sqrt{l^2-a^2}}$.

14(图 14). 机船系在由錨鏈系住的圓柱形桶上，桶的直徑为 1.2 m，长 2 m，重 0.3 t。若桶有一半浸入水中，水的重度为 1 t/m³。$\alpha=60°$，$\beta=15°$。試求系绳在点A的張力T_A和錨鏈在点B的張力T_B。

答：$T_A=2.78$ t，$T_B=3.1$ t.

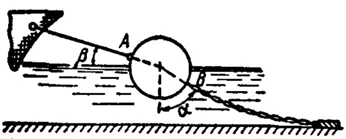

图 14

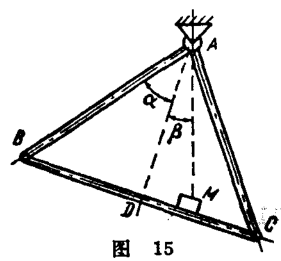

图 15

15(图 15). 鉸接杆件三角形ABC可繞通过点A的水平軸自由地轉动。在杆BC上固联着重P的物块M。設边BC的垂綫AD与鉛直綫成夹角β，頂角A为2α，$AB=AC$。試求平衡时杆AB和AC的內力与角β之間的关系。各杆的重量不計。

答：$T_{AB}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha}P$，　$T_{AC}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha}P$.

16(图 16). 一质点M重P，在半球的光滑的內表面上借重Q的物块維持平衡。試求质点M对球面的压力N以及半徑OM对水平面所成的傾角α。又問力$\bar{P}$与$\bar{Q}$的大小之間应有何种关系方有可能平衡？

答：$N=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}Q$；　$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{Q+\sqrt{Q^2+8P^2}}{4P}$；　$P\geqslant Q$.