張量計算初步
及其在力学上的应用

H. A. 基利契夫斯基著

高等教育出版社

張量計算初步
及其在力学上的应用

H. A. 基利契夫斯基著
郭乾荣譯

高等教育出版社

本书系根据苏联国立技术理論书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的基利契夫斯基(Н. А. Кильчевский)著“張量計算初步及其在力学上的应用”(Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике) 1954年版譯出。原书为工程师数理丛书之一。

本书扼要地叙述了:矢量代数、矢量分析、張量代数、張量分析、張量計算在分散質系中的应用及張量計算在連續介質中的应用。

本书可作为我国高等学校数理力学专业教学参考书，也可供有关工程人員在数学力学方面参考之用。

本书由交通大学郭乾荣翻譯。

張量計算初步

及其在力学上的应用

H. A. 基利契夫斯基著

郭 乾 荣 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

人民教育印刷厂印装 新华书店发行

統一书号13010·659 开本850×1168 1/32 印張4 13/16

字数112,000 印数0001—4,500 定价(6)￥0.55

1959年8月第1版 1959年8月北京第1次印刷

序

張量运算是在解决各种力学問题时常用的数学工具。

长期以来張量計算的应用范圍主要是連續介質力学。但是由于張量計算方法和多維非欧几里德几何的发展，使我們有可能得到解决离散系統力学的新方法。

当然,張量計算的应用范圍并不限于力学;这个工具也广泛地应用在几何学和物理学中。

本书是張量計算的簡明引論,包括張量分析的基本概念,并說明它在力学中的基本应用范圍。

为了要指出張量計算在离散質点系力学中的近代应用，及在連續介質力学中的某些应用，在本书中不得不引入多維非欧几里德几何学初步。

第一章具有緒論性質。張量計算的基础在第二章中闡述。第三章和第四章的內容是張量分析在力学上的应用。在第二章中有張量計算在剛体运动学中的某些最簡单的应用。

在教学用书中几乎都不考察張量分析在具有可积分和不可积分約束的非自由質点系力学中的应用。一般說来，关于应用新的分析方法来确定約束反力的問題，到目前为止还沒有充分全面地考虑过。

可以看到：在連續介質力学中新分析方法的应用也是不足够的,在那里常只限于应用張量代数,仅偶而应用張量分析。后者通常有关于平衡方程和运动方程变換至曲綫坐标的問題。

本书将指出:对張量分析的任务,这样来理解是太狹窄了。例如，由張量分析和非欧几里德几何还能够得到引入“动力应力函

数"的一般算法，这个函数是彈性理論靜力問題中已知的应力函数的推广。

为了使叙述精簡起見，本书中并不引入在其他教科书中經常看到的張量計算在流体力学和彈性理論中的应用、以及将各种运动方程变换到柱面和球面坐标的具体例子。而与此同时，能将这些变换归結为专門运算(这些专門运算对掌握数学分析基础的讀者是极易了解的)的全部必要工具，則都編入本书。在这一方面，书中将指出有关其出处的必要参考文献。

书中所指出的張量計算的应用，应該看作是举例說明的材料，而并不是力学相应部分的有系統叙述。这里只提到力学現象的某些方面。詳細的知識讀者应从有关的专門教材中去得到。

П. А. 基利契夫斯基

基輔. 1953

第一章　矢量計算初步

一、矢量代数

§1. 标量与矢量　完全由一个正値或負値的数量所确定的物理量，或在更普遍的情况下，由一个具有实数値的、空間一点的函数所确定的物理量，称为标量。

假使标量与坐标系的选擇无关，則称为絕对标量，或不变量，例如，物体的質量、溫度、力所做的功等等。

今后，凡談到諸如張量一类的标量，都指絕对标量。

除絕对标量外，我們还将遇到与坐标系选擇有关的标量。这将在以后研究張量的解析性質（第二章）时再討論。

可以首先用数値（模）和在空間的一定方向来表征的物理量称为矢量。由于矢量的这些性質，它們可以用有向的直綫綫段来几何地表示（图 1）。

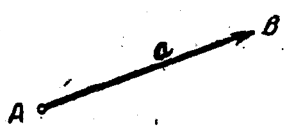

图 1.

矢量将用粗体字 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、……来表示。代表矢量的綫段的起点与矢量的作用点相合。有时可用特殊記号来表示代表矢量的綫段，例如，矢量 $\mathbf{a}$（图 1）可用 $\overrightarrow{AB}$ 来表示。代表矢量的綫段的长，或矢量的模，将表示为：$|\mathbf{a}| \equiv a$。

当代表二个矢量的綫段是平行的，則二个矢量称为平行，或共綫。

当二个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示同一个确定的物理量，有相等的模，共綫，且同向时，則它們称为相等。特别是，相等的矢量能用重合的直綫段来表示。

不应該认为，某一物理对象具有数值和在空間的方向，就充足以列入矢量数。矢量必須具有所指出的二个特征，但具有这些特性的量尙不足以列入矢量类。矢量还具有由矢量代数运算规則所确定的許多特性。这些运算将在本节中簡要地討論。

矢量应分为固結于空間某一点(作用点)的矢量，沿着某一直綫作用但不具有一定作用点的矢量，和，最后，无一定作用点的矢量。

屬于第一类的矢量称为定位或固定矢量，屬于第二类的称为滑动矢量，屬于第三类的称为自由矢量。

質点的速度和加速度矢量，以及作用于一点的力矢量是定位矢量。作用于刚体上的力矢量和刚体的瞬时角速度矢量是滑动矢量。力偶矩矢量是自由矢量。

下面所討論的矢量代数运算是关于自由矢量的。

矢量代数运算规則对所有的自由矢量都是相同的，而与这些矢量的物理性質无关。

这个断語可以进一步推广到張量計算的一切运算。因此要建立矢量代数运算的規則，只須以矢量的任一特殊类型来确定这些規則。

自由矢量的代数运算也可推广到共点的定位矢量和滑动矢量。对这些矢量进行代数运算的結果，仍得到共点矢量。

例如，作用在一質点上的力的合成得到作用在同一点上的合力；点的速度的合成可得到点的复合运动的速度。

对具有不同作用点的諸定位矢量及沿着不相交直綫作用的諸滑动矢量，情况比較复杂。

矢量代数运算不一定适用于具有不同作用点的諸定位矢量。例如，很明显的，把作用在互不相关二点上的諸力相加是毫无物理意义的。

另一方面，在力学中却考察作用在离散質点系上諸力的矢量

和。

在任何情况下，将矢量运算应用到上述的定位矢量时，必須根据相应的力学問題的具体条件，并且必須确切地断定由这些运算所得到的結果的物理意义。

現在来談談滑动矢量代数。

每一滑动矢量 a 由数值和方向都与它相同的自由矢量 a，及該滑动矢量 a 的方向所沿的直綫上任一指定点的徑矢 r[①]所确定。

因此，一滑动矢量可由自由矢量 a 和定位矢量 r[②]所組成的系来确定。

若沿着不相交諸直綫作用的滑动矢量代表那些表征某一剛体机械运动的物理量，則利用理論力学教程中已知的基本变换，該滑动矢量系可簡化为作用綫过任一选擇点的一个滑动矢量及一自由矢量。

例如，作用在剛体上的力系可以簡化为一力，称为力系的主矢量，和一力偶，其力偶矩称为力系的主矩。主矢量是滑动矢量，而主矩矢量是自由矢量。

由上面所述，可以把自由矢量代数推广到滑动矢量。在力学教程中就是这样处理的[③]。

但可以另外建立滑动矢量代数。可以把滑动矢量作为特殊的超复数，直接对它們建立运算规則，而不利用自由矢量代数。这样就产生了旋量計算——矢量計算的一个特殊部門。关于祖国（指苏联——譯者注）学者在这方面的工作，可以指出 A. П. 哥捷里尼哥夫的著作。这里我們将不討論矢量分析的这个分支，而只限于

① 我們假定讀者已从解析几何教程中明确关于徑矢的概念。

② Г. К. 苏斯洛夫：理論力学，国立技术理論书籍出版社，1946，第13頁。（Г. К. 苏斯洛夫认为矢量 r 为自由矢量。）

③ 当然，自由矢量代数并不能有效地描述滑动矢量的一切特性。

自由矢量代数。

§2. 矢量加法　表示某一自由点在空間位移的綫段是矢量的典型代表。

設一点作一系列銜接的位移 $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \cdots\cdots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$(图2)。这些銜接的位移的結果，即綫段 $\overrightarrow{OA_n}$，称为綫段 $\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{A_1A_2}, \cdots$，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ 的矢量和：

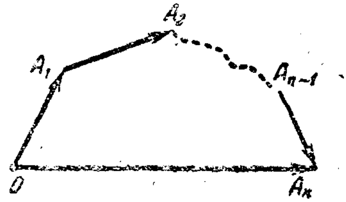

图 2.

$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

合矢量 $\overrightarrow{OA_n}$ 的作图法自然地导致矢量的多边形規則。

但自由点的位移决不能看作自由矢量，因为位移是由动点的初位置——位移矢量的作用点所决定。

为了建立自由矢量加法的規則，需要分析剛体的复合平动位移，即剛体的二个平动位移：牽連位移和相对位移的合成結果。

提醒一下，在平动位移时剛体內各点的位移都相同。

設剛体的位移为二平动位移合成的結果。考察該剛体內任一点 M 的位移。以綫段 $\overrightarrow{MA}$ 表示 M 点的相对位移，綫段 $\overrightarrow{MB}$ 表示牽連位移。由于牽連位移的結果，代表位移 $\overrightarrow{MA}$ 的綫段将到 $\overrightarrow{BM'}$ 位置。綫段 $\overrightarrow{MM'}$ 将表示剛体上 M 点的絕对(合成)位移(图3)。

由图3可見：綫段 $\overrightarrow{MM'}$ 是綫段 $\overrightarrow{MA}$ 和 $\overrightarrow{MB}$ 所构成的平行四边形的对角綫。

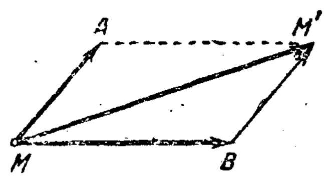

图 3.

不難看出，我們又得到以前已經得到的矢量多边形規則的特殊情况。显然这里要得到多边形規則，只須考察剛体的几个平动位移的合成。

所以我們看到，典型的定位矢量(自由质点的位移)和自由矢量(平动剛体內各点的位移)，遵守加法的一般規則——矢量的多边形規則。

因为一切矢量，不管它們的物理特征怎样，都具有公共的基本性质，所以我們就把对特殊类型的矢量所建立的多边形規則确定为矢量加法的一般規則。

一切矢量应該遵守矢量加法規則。因此，証明某一物理量的矢量性质时，必須断定此物理量是遵守矢量加法規則的。

矢量加法規則确定了矢量的第三个必要特性。这将在以后研究矢量的解析特性时加以証实。

因此，可以用有向直綫段来表示的、且遵守矢量加法运算的物理或几何量称为矢量。

矢量减法是加法的逆运算；根据减法我們能从一未知矢量与另一已知矢量的已知和中求得这未知矢量。

例如(图 3)，

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MM'}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'A}.$$

矢量 $\overrightarrow{M'A}$ 与矢量 $\overrightarrow{MB}$ 模相等，而方向相反。矢量 $\overrightarrow{M'A}$ 的这些特性可用等式

$$\overrightarrow{M'A}=-\overrightarrow{MB}$$

来表示。

总之，等式 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，而方向相反。显然它們的矢量和等于零。于是减法运算归結为加法运算：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

我們将不証明加法运算具有交換性和結合性。这留給讀者去証明。

§3. 矢量的标积 矢量 $\boldsymbol{b}$，其模等于 $m|\boldsymbol{a}|$，且与矢量 $\boldsymbol{a}$ 平行(若 $m>0$，矢量 $\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 同向；若 $m<0$，則与矢量 $\boldsymbol{a}$ 反向)，称为

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与标量 m 的乘积。上述运算以等式写出为

$$\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}. \tag{1.1}$$

考察标量 $m=|\boldsymbol{a}|^{-1}$。显然，矢量

$$\boldsymbol{e}_a=|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a} \tag{1.2}$$

的模等于 1。这个矢量称为确定矢量 $\boldsymbol{a}$ 方向的单位矢量。

空間某一 x 軸的方向将由軸的单位矢量来确定。以 $\boldsymbol{e}$ 表示 x 軸的单位矢量。以 a_x 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 軸方向的投影，并称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 的标积：

$$a_x=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},x}) \tag{1.3}$$

式中 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},x})$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 的正方向夹角的余弦。

同样可确定二个任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的标积。考察矢量 $\boldsymbol{a}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影 a_b。可得：

$$a_b=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

由此得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=a_b|\boldsymbol{b}|=b_a|\boldsymbol{a}|. \tag{1.4}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直的条件为：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

标积具有明显的交换性。

根据已知的定理：矢量和在某軸上的投影等于各分矢量投影的代数和，可导出标积的分配性。

§4. 矢积 矢量的概念是与最簡单的几何形象——点和直綫直接联系的。現在来考察較高阶的几何形象——平面元素。

由具有規定的环道正方向的封閉簡单周綫所限定的平面部分称为平面元素。

平面元素用对应于周綫上各点的字母 $ABC\cdots$ 表示。各点排列的次序与沿周綫的环道正方向一致。

二平面元素位于平行平面内，且具有相等的面积和相同的沿

周綫的环道方向，則它們称为相等。

因此，保持周綫所限定的面积和沿周綫的环道正方向，可以改变周綫的形状，并且可以将平面元素移到平行平面內，而不改变平面元素。所以被考察的平面元素是自由的。

平面元素用直綫綫段来表示。此直綫綫段垂直于元素所在的平面，其值等于平面元素的面积，且指向这一面，使沿平面元素周綫的环道方向是正的[①]（图 4）。以后，将認为沿平面元素周綫的环道正方向是与时針的轉动方向相反。从上述可見，表示自由平面元素的綫段 $\overrightarrow{OA}$ 的作用点是可以完全任意选擇的。

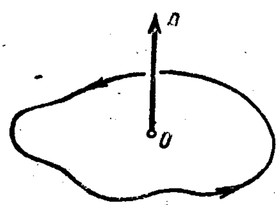

图 4.

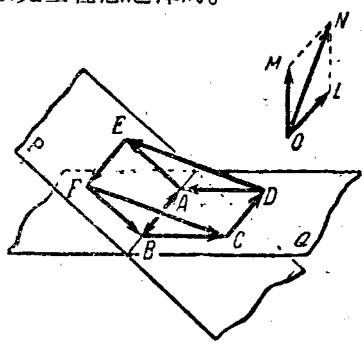

图 5.

綫段 $\overrightarrow{OA}$ 完全表征了自由平面元素的性質；它称为平面元素矩，或平面元素余。

現在来建立平面元素和的概念。

設在平面 P 和 Q 內有二个平面元素（图 5）。根据平面元素的特性，不失其普遍性，可以假定平面元素的周綫是具有公共边 $AB=BA=h$ 的长方形。

具有边 $CD(=h)$ 和 DE 的平面元素 $CDEF$ 称为位于平面 P 和 Q 內的平面元素和：

---

① 按右手螺旋規則來确定——譯者注。

$$CDEF = ABCD + BAEF.$$

定理 自由平面元素和的矩等于被加元素矩的矢量和。

現在来考察自由平面元素 $ABCD$ 和 $BAEF$ 以及它們的和 $CDEF$（图 5）。作出被加元素矩与它們和的矩。这些矩对应地以 $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{ON}$ 来表示。联接 M, N, L 点。假使我們能証实：图形 $OMNL$ 是一个平行四边形，則定理将得到証明。

根据平面元素矩的定义

$$OM = AB \cdot BC, \quad ON = AB \cdot FC.$$

其次，由于 $OM \perp BC$, $ON \perp FC$, $\angle MON = \angle BCF$。所以三角形 BCF 和 MCN 相似。同样，可以証明三角形 FCB 和 NOL 相似。因而，四边形 $OMNL$ 是平行四边形。

因此，有

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OL},$$

这就是所要証明的。

于是，自由平面元素的矩是自由矢量。

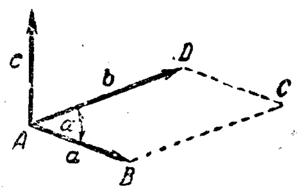

图 6.

現在由矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 作一具有平行四边形 $ABCD$ 形状的自由平面元素（图 6）。以矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向来确定沿周綫 $ABCD$ 的环道正方向。平面元素 $ABCD$ 的矩（矢量 $\boldsymbol{c}$）称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的矢积，并且这样表示：

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{1.5}$$

由上述理由可見：自由矢量的矢积也是自由矢量。

矢积的模等于由矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 构成的平行四边形面积的大小：

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \tag{1.6}$$

若矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共綫，則矢积 $\boldsymbol{c}$ 等于零。

交換律对矢积不成立：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \tag{1.7}$$

这从矢积的定义直接导出。

分配律可以从前面証明的关于平面元素相加的定理中导出。为了証明分配律，我們指出：若不改变矢量 a 和 b 的相互位置(沿平行四边形周綫的环道正方向由此位置而定)，而用等面积的長方形代替平行四边形 $ABCD$，則矢积 $\mathbf{c}$ 并不改变。再回到图 5。有：

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC};\quad \overrightarrow{OL}=\overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{FB};$$

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{FC};\quad \overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}.$$

但

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OL}.$$

因此，

$$\overrightarrow{AB}\times(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{FB}.$$

証明了分配性。

我們知道，力对某一点(矩心)的矩等于力作用点的徑矢与力矢量的矢积。徑矢的始点和矩心重合。

若考察作用在剛体上的力，即用滑动矢量所代表的力，則它对某一点的矩将是自由矢量。其实，在这个情况下，对某一点的力矩矢量与力向矩心簡化时引起的附加力偶矩矢量是相等的。

这些考虑是以作用在剛体上的力的物理性质为基础，而与作用在质点上力的矩无关；作用在质点上的力是定位矢量。

力矩决定于三点的相互位置：矩心、力的作用点和代表力矢量的綫段的末端。一个平面元素，它的形状是以上述各点为頂点的三角形时，已經不能認为是自由的。因此，我們有定位平面元素。

一般說来，对定位平面元素不能用前面所引用的有向綫段来表示。其实，这个表示只反映了自由平面元素沿周綫的环道方向和面积的大小，但并不反映出它周綫的形状和它在平面中的位置。所以，当我們考察二定位矢量——力作用点的徑矢和力矢量——的矢积时，实际上是利用自由平面元素矩，再給定三角形平面元素

三頂点位置来补充。

因为三角形平面元素的二个頂点由定位力矢量来决定，力矩矢量就必然与三角形平面元素的第三頂点——矩心相联系，就一定把力矩矢量看作是定位于矩心的矢量。

在力学教程中就通常这样处理的。然而不难看出这里的条件性，因为力矩是一物理量，到底和整个平面元素有关。

若遇到点的扇形速度和扇形加速度，则根据上述理由不得不选擇質点徑矢的始点作为这些矢量的作用点。

但点的扇形速度和扇形加速度在物理上表征了質点的运动。所以可以把它們附加在动点上。那末根据动量矩变化定理，得出結論：力矩作用于力的作用点上。

所指出的关于力矩、扇形速度和扇形加速度矢量的作用点选擇的条件性是与这个問題有关：这些量是用比矢量有更复杂結构的几何对象——定位平面元素来代表。

詳細研究这种平面元素的性質超出了矢量代数基础的范圍。

§5. 組合运算　考察矢量 a、b、c，且构成混合乘积

$$V=(a\times b)\cdot c. \qquad (1.8)$$

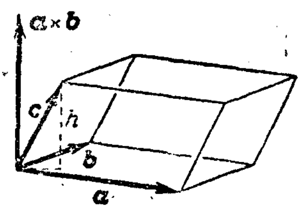

图 7.

不难相信：这个标量在絕对值上是等于由矢量 a、b、c 所构成的平行六面体的体积(图 7)。

V的符号与矢量 a、b、c 的相互位置有关。若矢积 $a\times b$ 和矢量 c 构成銳角，则 $V>0$。在这种情况下三矢量 a、b、c 称为右旋系。

当 $V<0$，矢量 a、b、c 构成左旋系。

若循环置换矢量 a、b、c 的次序，而考察次序为 b、c、a 和 c、a、b 时右旋系和左旋系的变化，则右旋系恒保留右旋，而左旋系恒左旋。换言之，在右旋系中矢积 $b\times c$ 和矢量 a 构成銳角，而矢积

$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 构成鋭角。观察图 7，可以确信这一点。

由此可得标量 V 的重要特性：若按照循环置换規則改变因子 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的次序，V 并不改变：

$$V=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}. \tag{1.9}$$

若表示矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的直綫綫段位于同一平面，或共面，則

$$V=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0. \tag{1.10}$$

反之亦然。

現在考察二重矢积

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}). \tag{1.11}$$

根据共面的条件(1.10)容易看出，矢量 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 是共面的，因为根据矢积的定义 $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{d}=0$，因此可以将矢量 $\boldsymbol{d}$ 分解为沿矢量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 方向的分量：

$$\boldsymbol{d}=\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c};$$

式中 β 和 γ 是某些标量。并且有：

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}=\beta\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\gamma\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0.$$

由此得：

$$\frac{\beta}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}=-\frac{\gamma}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}=\lambda.$$

根据此式，故

$$\boldsymbol{d}=\lambda\{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\}. \tag{1.12}$$

尙需确定标量 λ。

根据矢积的特性，在保持矢量 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的相互位置和它們构成的平行四边形面积的大小的条件下，可以用互相垂直的矢量 $\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{c}_1$ 来代替矢量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，而不改变 $\boldsymbol{d}$。矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以用垂直于矢积 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 的矢量 $\boldsymbol{a}_1$ 来代替。这时矢量 $\boldsymbol{a}_1$ 将和矢量 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面。不改变矢积 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，而将矢量 $\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{c}_1$ 构成的长方形在它的平面內轉动，使得矢量 $\boldsymbol{b}_1$ 和矢量 $\boldsymbol{a}_1$ 的方向一致。于是，不难直接确定，

$$d=-c_1|a_1||b_1|.$$

另一方面，根据公式(1.12)得到:

$$d=-\lambda c_1|a_1||b_1|.$$

于是，

$$\lambda=1$$

而与矢量 a、b、c 的选择无关。

最后得到:

$$a\times(b\times c)=b(a\cdot c)-c(a\cdot b). \tag{1.13}$$

§6. 矢量"除法" 考察矢量方程

$$a\cdot x=p. \tag{1.14}$$

設已知矢量 a 和标量 p。从方程(1.14)来确定矢量 x 可以看作是标积乘法的逆运算。

不难看出，方程(1.14)諸解中之一是

$$x=p\frac{b}{a\cdot b}, \tag{1.15}$$

式中 b 是不垂直于矢量 a 的任意矢量。其次可以看出，可以將垂直于矢量 a 的矢量加在矢量 x 上。因此，

$$x=p\frac{b}{a\cdot b}+c\times a, \tag{1.16}$$

式中 c 是任意矢量。因此，方程(1.14)是不定的。

考察另一矢量方程:

$$a\times x=q. \tag{1.17}$$

矢量 a 和 q 以明显的关系

$$a\cdot q=0 \tag{1.18}$$

联系着。从下列形式来求方程(1.17)的解:

$$x=b\times d.$$

矢量 b 或 d 中之一可以任意选择。从(1.13)和(1.17)得: