

化工设备设计全书

高压容器

《化工设备设计全书》编辑委员会
丁伯民 黄正林 等编



化学工业出版社

工业装备与信息工程出版中心

化工设备设计全书

高 压 容 器

《化工设备设计全书》编辑委员会
丁伯民 黄正林 等编

化学工业出版社
工业装备与信息工程出版中心
·北 京·

(京) 新登字 039 号

图书在版编目(CIP)数据

高压容器/丁伯民、黄正林等编. —北京:化学工业出版社,
2002.10
(化工设备设计全书)
ISBN 7-5025-4072-5

I. 高… II. ①丁…②黄… III. 高压容器 IV. TQ051.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 085750 号

化工设备设计全书

高 压 容 器

《化工设备设计全书》编辑委员会

丁伯民 黄正林 等编

责任编辑:辛 田

责任校对:凌亚男

封面设计:蒋艳君

*

化 学 工 业 出 版 社 出版发行

工业装备与信息工程出版中心
(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)

发行电话:(010) 64982530

<http://www.cip.com.cn>

*

新华书店北京发行所经销

北京市燕山印刷厂印刷

三河市延风装订厂装订

开本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 16 $\frac{1}{4}$ 字数 543 千字

2003 年 1 月第 1 版 2003 年 1 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-4072-5/TQ·1610

定 价: 35.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责退换

前 言

《化工设备设计全书》第一版由原化学工业部化工设备设计技术中心站组织全国高校、科研、设计、制造近百家单位参与编写。

《化工设备设计全书》以结构设计、强度计算为主，从基础理论、设计方法、结构分析、标准规范、计算实例等方面进行了系统的阐述，并对相应的化工原理作简介。《全书》在重视结构设计、强度计算的同时，结合化工过程的要求去研究改进设备的设计，提高设备的效率，降低设备的成本，以求实现化工单元操作的最佳化，并力求反映当前国内及国际的先进技术。《全书》自20世纪80年代出版发行后，因其内容的实用性，得到化工、石化、医药、轻工等相关行业的设备专业人员欢迎。

近十余年来，我国化工装置的设计，化工设备的研究、开发、制造和标准化工作有了较大的发展，建造设备用的结构材料也有了新的进展，有必要对《全书》的内容加以更新、补充，以适应现代工程建设要求，满足广大工程技术人员，特别是年青一代工程技术人员需要。中国石油和化工勘察设计协会、中国石化集团上海医药工业设计院、全国化工设备设计技术中心站组成了《化工设备设计全书》编辑委员会，负责《全书》的修订工作。《全书》的修订原则是“推陈出新”，以符合现代工程建设要求。

《化工设备设计全书》计划出版15种，计有：《化工设备用钢》、《化工容器》、《高压容器》、《超高压容器》、《换热器》、《塔设备》、《搅拌设备》、《球罐和大型储罐》、《废热锅炉》、《干燥设备》、《除尘设备》、《铝制化工设备》、《钛制化工设备》、《石墨制化工设备》和《钢架》等。

本书为《高压容器》。为使设计人员设计出操作安全、技术先进、经济合理的高压容器，本书对容器应力分析的基本理论和强度计算的基本方法有所介绍。从事高压容器设计的工程技术人员往往需要透彻地理解制订规范的依据和前提，以及某些公式的来源和应用范围，以期能更正确地应用规范和公式，并为进一步研究有关高压容器的力学问题打好必要的理论基础。为此，本书对高压容器设计中所需的有关弹性及塑性理论做了介绍，并在有关章节中对如何运用弹性理论解决力学计算问题有所示例。

各种高压容器壳体结构和强度的设计，密封的设计、选材、接管开孔补强、焊接结构的设计等均直接影响容器的可靠性、经济性与先进性。为了解决高压容器设计中的各类问题，本书从工程技术人员的实际使用出发，对这方面的有关问题做了叙述，同时对高压容器设计中蠕变和断裂力学也做了一定的介绍。

本书原编写者为朱秋尔、丁伯民、徐正志、周国民、刘贻民、张永维、徐荣皋、王慎行；主编为朱秋尔；校审为洪国宝、卓克涛。现由华东理工大学丁伯民负责修订，全国化工设备设计技术中心站黄正林负责统稿。

《化工设备设计全书》编辑委员会

2002年1月

内 容 提 要

《化工设备设计全书》共有 15 种，计有：《化工设备用钢》、《化工容器》、《高压容器》、《超高压容器》、《换热器》、《塔设备》、《搅拌设备》、《球罐和大型储罐》、《废热锅炉》、《干燥设备》、《除尘设备》、《铝制化工设备》、《钛制化工设备》、《石墨制化工设备》和《钢架》等。

本书为《高压容器》，系统地论述了高压容器的基础理论、分析、强度计算、密封设计和结构分析。此外还收集了一些工程设计的实例、典型结构形式、常用材料性能和设计参考数据。本书还对高压容器设计中的高温蠕变和断裂力学做了介绍。

本书可供从事高压容器设计工作的专业人员使用，也可供有关科研、工厂、学校等从事化工设备工作的科技人员参考。

《化工设备设计全书》编辑委员会

主任委员	袁 纽	中国石油和化工勘察设计协会
副主任委员	华 峰	中国石化集团上海医药工业设计院
	洪德晓	全国化工设备设计技术中心站
委 员	叶文邦	钱小燕 黄正林 汪 扬 金国森
	应道宴	魏兆灿 秦叔经 虞 军 曹文辉

目 录

<p>第一章 绪论 1</p> <p> 参考文献 3</p> <p>第二章 力学基础 4</p> <p> 第一节 弹性理论基础 4</p> <p> 第二节 压力容器的不连续应力简述 33</p> <p> 第三节 塑性分析简述 42</p> <p> 参考文献 46</p> <p>第三章 筒体设计 47</p> <p> 第一节 单层厚壁筒体应力分析 47</p> <p> 第二节 多层厚壁圆筒应力分析 68</p> <p> 第三节 温差应力计算 79</p> <p> 第四节 筒体结构 85</p> <p> 参考文献 98</p> <p>第四章 密封设计 99</p> <p> 第一节 密封原理及密封力 99</p> <p> 第二节 高压密封中螺栓受力分析 105</p> <p> 第三节 平垫密封 107</p> <p> 第四节 卡扎里密封 109</p> <p> 第五节 双锥密封 111</p> <p> 第六节 伍德式密封 114</p> <p> 第七节 N.E.C. 式密封 115</p> <p> 第八节 其他密封结构和密封垫片 117</p> <p> 第九节 各种密封结构的比较 128</p> <p> 第十节 高压螺栓拧紧与拆卸工具 130</p> <p> 参考文献 131</p> <p>第五章 高压容器零部件设计 132</p> <p> 第一节 平盖的设计计算 132</p> <p> 第二节 筒体端部法兰的设计计算 139</p>	<p> 第三节 顶底封头 150</p> <p> 第四节 紧固元件及压紧元件的设计计算 157</p> <p> 第五节 ASME 规范的卡箍连接件设计 规程介绍 165</p> <p> 第六节 高压容器的吊耳与支座 171</p> <p> 第七节 焊接接头系数和焊缝坡口形式 174</p> <p> 参考文献 180</p> <p>第六章 高压容器的开孔与衬里 181</p> <p> 第一节 开孔后应力集中的原因 及补强范围的分析 181</p> <p> 第二节 开孔应力集中系数的计算方法 183</p> <p> 第三节 开孔补强的设计计算 190</p> <p> 第四节 开孔补强的结构设计 198</p> <p> 第五节 高压容器的衬里设计 203</p> <p> 参考文献 211</p> <p>第七章 蠕变设计 212</p> <p> 第一节 蠕变 212</p> <p> 第二节 应力松弛 217</p> <p> 参考文献 219</p> <p>第八章 断裂力学在压力容器上的应用 220</p> <p> 第一节 线弹性断裂力学 220</p> <p> 第二节 弹塑性断裂力学 230</p> <p> 第三节 疲劳裂纹的扩展 233</p> <p> 第四节 应力腐蚀裂纹的扩展 238</p> <p> 第五节 断裂力学在压力容器上的应用 239</p> <p> 参考文献 251</p>
--	--

第一章 绪 论

一、高压容器在工业生产中的应用

1833年法国巴黎大学教授 Lamé 和 Clapeyron 得出了厚壁圆筒平衡公式和应力分布公式,提出了在圆筒内施加压力时其内部的应力分布,从而为高压容器的发展奠定了理论基础。

1888年法国学者 Lechatlier 首先提出利用压力这个因素来促进氢氮的反应及提高氨产量的著名原理及设想。继而德国化学家 Haber 等继续进行了这方面的研究,并从设备上解决了问题。并于1910年建立了一个中间工厂,第一次在20MPa操作压力下得到氨的工业产品。几乎在同一时代,煤炭的液化亦采用了高压设备。

随着近代化工工业的迅速发展,高压容器获得愈来愈广泛的应用。如合成氨工业中的高压设备压力为15~60MPa;合成甲醇工业中的高压设备压力为15~30MPa;合成尿素工业中的高压设备压力为20MPa;石油加氢工业中的高压设备压力为8~70MPa;乙烯气体在超过100MPa的超高压条件下进行聚合反应等,都是利用高压条件下化学平衡向有利于合成产品的方向进行这一原理,它可以提高化学反应速度,并大大减小了反应设备的容积。从各方面的技术应用中表明,高压容器在现代工业中的应用必不可少,而且是得到迅速发展的一个领域。

二、高压容器范围的划分

通常所指的高压容器范围是指它所管辖的压力范围。高压容器的压力范围是为了安全管理需要而人为地划定的。我国《压力容器安全技术监察规程》^[1]对高压范围的划分是 $10\text{MPa} \leq p < 100\text{MPa}$, $p \geq 100\text{MPa}$ 者属于超高压,其中 p 为设计压力。

国内外容器标准则并未对高压范围做出明确的划分,但是,各个标准都对各自的适用范围做出限定。例如,我国容器标准 GB 150^[2] 限定适用于 $p \leq 35\text{MPa}$; JB 4732^[3] 限定适用于 $p \leq 100\text{MPa}$; 美国锅炉及压力容器规范 ASME VIII-1^[4] 规定一般适用于 $p \leq 3000\text{psi}$ (21MPa); ASME VIII-3^[5] 规定通常适用于 $p > 10000\text{psi}$ (70MPa), 但指明 ASME VIII-3 既不在规定 VIII-1 或 VIII-2 的压力上限,也不在 VIII-3 的压力下限; 日本容器标准^[6] 将容器分成3类,第1类容器 $p \leq 100\text{MPa}$, 第2类容器 $p \leq 30\text{MPa}$, 第3类容器 $p \leq 1\text{MPa}$ 。

另一可以间接反映高压容器范围的参数是径比

$K \left(K = \frac{R_o}{R_i} \right)$ 。因为在既定钢制容器的前提下,压力越高则所需壁厚越大,径比 K 值越大。但是由于在同一设计压力下用不同的钢材可以得出不同的所需壁厚,所以一般并不用径比 K 值作为高压容器的划分基准。

由壳体理论可知,在同样压力作用下,器壁越厚,应力沿器壁分布的不均匀程度越大,所以对于以薄壁设计公式形式出现的容器规范,例如我国的 GB 150、JB 4732,美国的 ASME VIII-1 等,在列出壁厚设计公式的同时,都对适用的径比 K 值做出限制(由于在既定材料时径比 K 值和设计压力 p 值有关,所以上述各规范都以限定设计压力 p 值的形式出现,实质上即是限定径比 K 值),使得以薄壁设计公式所得的结果不致和实际结果之间存在过大的偏差。

三、有关高压容器设计准则的几种观点

近代大量的厚壁容器破坏试验结果表明,由塑性较好的材料制成的厚壁容器,从开始承受压力到发生爆破,大致经历了三个阶段,其变形与试验压力之间的关系曲线如图 1-1 所示。

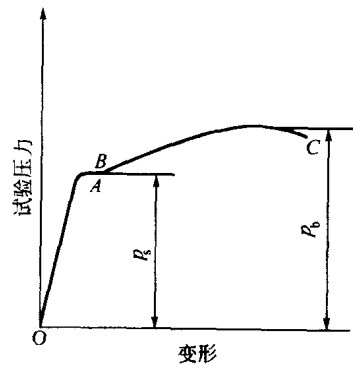


图 1-1 厚壁容器破坏过程中压力与变形关系

图中曲线 OA 部分为弹性阶段,即容器的应力和变形随着试验压力的增加而成正比地增加。

自 A 至 B 这一阶段中,首先由内壁开始屈服,然后随着试验压力的增加,屈服区域由内壁逐渐向外壁扩展,直至整个截面全部屈服为止。这时试验压力虽然不再增加,而容器的塑性变形则很快增加。这时

● 1psi = 6894.76Pa。

的压力称为屈服压力,用 p_s 表示。这一阶段称为屈服阶段。对不同材料,屈服阶段长短不一,低碳钢制压力容器其屈服阶段比较显著;而对于某些高强度钢,由于塑性较差,其屈服阶段则不明显。

图中 BC 部分为强化与爆破阶段。当压力增加到屈服压力后,容器发生了大量的塑性变形,但不立即发生爆破,这是由于塑性材料屈服后会发生应变硬化,使容器仍然承受一定的压力。所以在屈服后,压力还可以继续增加,直至最后发生爆破^[7]。

根据上述三个阶段,高压容器的筒体强度设计准则按照传统的弹塑性力学主要有以下三种观点:

(一) 以弹性失效为破坏准则的设计观点

这种观点认为,器壁上最大点的应力强度达到材料的屈服强度后,容器便失去正常工作能力,亦即失效。这种失效称之为弹性失效。

(二) 以塑性失效为破坏准则的设计观点

这种观点认为,器壁上应力最大点的材料进入屈服阶段,并不导致整个容器破坏,因为其他部分金属仍然处在弹性状态。这样,已经进入屈服阶段的材料,要进一步发生塑性变形便受到仍处在弹性阶段金属的限制。只有当塑性区不断扩展,直至整个截面发生屈服,容器才失去正常工作能力。这种失效称之为塑性失效。

(三) 以爆破失效作为破坏准则的设计观点

这种观点认为,厚壁容器的器壁很厚,而且都是用塑性较好的材料制成的,由于应变硬化,材料屈服后再进一步变形需要更大的力,而不是立即发生破坏。只有发生爆破,容器才是真正破坏。

此外,按照断裂力学的观点,认为容器上的裂纹或类似缺陷在静载荷作用下引起开裂或失稳扩展时即失去正常工作能力而失效,或在交变载荷作用下疲劳裂纹扩展至穿透器壁而引起容器泄漏导致不能正常工作而失效,即未爆先漏失效,这二者都属于断裂失效的范畴。

由于厚壁壳体应力沿壁厚分布的不均匀性,内压壳体的内壁应力大于外壁应力,壁厚越大,应力分布不均匀程度越高。如果按照弹性失效准则设计,则当压力甚高、即壁厚甚大时,要将壳体内壁应力控制在材料的屈服强度以下,则离外壁一定范围内的壳体应力远低于材料的屈服强度而使整个厚度范围内的材料不能充分发挥作用。如果想充分发挥材料的作用,提高外壁材料的应力水平,则内壁材料可能已进入屈服而导致用弹性公式计算壳壁应力造成偏差。所以,只有在壁厚不大、即径比 K 值不大情况下的壳体,才采用弹性失效准则,对壁厚较大、即径比 K 值较大的壳体,则应采用弹、塑性理论,按照塑性失效或爆破失效准则进行设计,这样才能使所求得的壳体应力

状态比较符合实际。应该指出的是,不论采用弹性失效、塑性失效或爆破失效准则,并不是说允许容器在设计状态达到弹性、塑性甚至爆破。采用哪个设计准则,全由设计压力的高低及各国容器规范的沿用习惯决定,但不论采用哪一个设计准则,在导出弹性失效应力(或压力)、塑性失效应力(或压力)、爆破压力、并引入和该失效准则相匹配的安全系数之后,总是将壳体内壁的最大应力限于材料的屈服强度之下,不允许在设计压力作用下壳体内壁处于屈服状态,在确定和失效准则相匹配的安全系数时,除计及设计经验和各个因素之外,其中最基本的一点就是保持壳体处于弹性状态。

我国容器标准 GB 150 采用弹性失效准则且采用最大主应力理论;JB 4732 在径比 K 值不大时采用弹性失效准则,径比 K 超过一定值后采用塑性失效准则,都采用最大剪应力理论;美国 ASME VIII-1 采用弹性失效准则和最大主应力理论;ASME VIII-3 则采用塑性失效准则以及断裂失效准则,并采用最大剪应力理论。

四、对高压容器设计的基本要求

在化学工业中使用的高压容器,其操作随工艺过程而异,情况比较复杂。它不仅承受高压,而且具有高温(如加氢反应器的设计温度高达 500°C)和低温(如液氮洗工艺的温度低至 -196°C),同时还往往伴有介质(如氢、氮、一氧化碳与尿素等)的强烈腐蚀。所以对高压容器的设计、制造与检验应十分重视。另外,由于压力容器大型化的发展趋势,容器的直径、壁厚、质量越来越大。容器的使用条件日益苛刻。因此在设计高压容器时,必须从操作条件出发,对安全、选材、制造、检验等各方面进行全面综合的比较和分析,以期做出一个操作安全、技术先进、经济合理的设计。

在高压容器的设计过程中,一般应考虑下列问题

(一) 高压容器的结构必须保证强度的可靠性和密封的严密性

为了保证强度的可靠性,使容器在确定压力(或其他外部载荷)作用下,不导致破坏或过量的塑性变形,就必须对容器的受力元件做详细的应力分析,并结合选材、制造、检验等做综合的考虑,然后定出合理的壳体结构和尺寸。

为了保证密封的严密性,使容器在操作时不产生泄漏,避免因而引起的着火或爆炸事故,就必须从结构简单、密封可靠、便于加工、装卸、检验等出发,慎重确定密封结构。

由于在一定压力下容器的壁厚随直径的加大而增加,直径和壁厚的增加又对选材、密封、制造、检验、运输等各方面带来许多困难,因此,一般高压容

器的结构在满足操作条件的前提下,当容积一定时,希望采用较大的长径比,并要求有效地利用高压空间。

(二) 高压容器的选材

高压容器所选用的材料应具有良好的综合机械性能和耐腐蚀性能,同时应遵守经济、节约和符合国情的原则。

所谓良好的综合机械性能即指强度高,塑性和韧性好,以及良好的制造和加工工艺性。良好的耐腐蚀性是指材料耐操作介质腐蚀的程度,除了不应直接影响设备使用寿命外,同时还不应影响产品质量。经济节约和符合国情可以降低设备成本,保证材料的来源和供应。

(三) 高压容器的制造和检验必须严格遵守各种技术条件和有关规程

不论在制造过程中还是在现场使用过程中都要执

行严格的检查和试验。这样,一方面可以及早发现缺陷,保证制造质量;另一方面可对容器的承载能力做验证,以确保容器的安全操作。因此,在设计过程中必须正确选定制造检验技术条件作为制造检验的准绳。同时必须使设计符合技术条件的各种要求。

参 考 文 献

- 1 国家技术监督局.压力容器安全技术监察规程.北京:中国劳动社会保障出版社,1999
- 2 GB 150—1998.钢制压力容器
- 3 JB 4732—95.钢制压力容器——分析设计标准
- 4 ASME Boiler and Pressure Vessel Code. VIII-1. Rules for Construction of Pressure Vessels. 1998
- 5 ASME Boiler and Pressure Vessel Code. VIII-3. Alternative Rules for High Pressure Vessels. 1998
- 6 JIS B 8270. 压力容器(基盘规格). 1993
- 7 范钦珊. 压力容器的应力分析与强度设计. 北京:原子能出版社, 1979

第二章 力学基础

第一节 弹性理论基础^[1,2,3]

本章所述的弹性理论基础、压力容器的不连续应力简述、塑性分析简述等三节内容，都是针对厚壁筒在内的压力容器设计中所需要的力学基础，以区别于专业的弹塑性力学基础。

一、弹性理论的内容和基本假设

弹性理论是研究弹性物体在外载荷（包括机械载荷和温度变化）作用下所产生的应力和应变以及和应变有关的位移的一门科学。

弹性理论的基本假设如下：

(一) 物体是连续的

物体内部由连续介质组成，因此物体中的应力、应变、位移等量都是连续的，都可以用位置坐标的连续函数来表示。

(二) 物体是匀质的和各向同性的

物体内部各点与各方向上的组分相同，因此物体各部分的物理性质是相同的。钢材虽然由各向异性的晶粒组成，但由于晶粒非常微小，而且杂乱排列，所以钢材的宏观性质，可认为是各向同性的，而木材则看成是各向异性的。

(三) 物体是完全弹性的

物体在外载荷的作用下引起变形，在外载除去后，物体完全恢复其原来形状而没有任何残余变形。同时还假定材料服从 Hooke 定律，即应力与应变成正比。

(四) 物体的变形是微小的

在外载作用下物体变形而产生的位移，与物体的尺寸相比是很微小的。在微小变形情况下，弹性理论中的微分方程将是线性的。

虽然在压力容器设计中仅涉及轴对称问题，包括空间轴对称和平面轴对称问题，且都用极坐标系表示，并不涉及一般空间问题。但为使读者全面理解一般空间问题、一般平面问题、空间轴对称问题、平面轴对称问题之间的联系以及直角坐标系、极坐标系之间的相互转换和适用性，故在撰写方式上由一般空间问题而转化至空间轴对称问题，继而再转化至平面轴对称问题，并用列表方式汇总它们之间的关系。

二、应力分析

物体在外力作用下处于平衡，物体内的每一点将产生应力和应变。为了研究物体内某一点的应力，从

中取出一平行六面微分体，它的各面分别与各坐标面相平行，并设其边长分别为 $PA = dx$ ， $PB = dy$ ， $PC = dz$ ，其体积为 $dV = dx dy dz$ ，见图 2-1。

六面微分体受到其周围物体的作用，分别在每个微分面上产生应力，把每一个微分面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力。正应力分别用 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 表示， σ_x 表示作用在垂直于 x 轴的面上且沿 x 轴方向， σ_y 、 σ_z 分别表示作用在垂直于 y 轴、 z 轴的面上且沿 y 、 z 轴方向。剪应力分别用 τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{xz} 表示， τ_{xy} 表示作用在垂直于 y 轴的面上且沿 x 方向， τ_{yx} 、 τ_{xz} 分别表示作用在垂直于 z 、 x 轴的面上且沿 y 、 z 方向。

如果某一个微分面上的外法线是朝着坐标轴的正方向，则这个面上的正应力就以沿着坐标轴正方向为正，沿着坐标轴负方向为负；反之，如果某一个微分面上的外法线是朝着坐标轴的负方向，则这个面上的正应力就以沿着坐标轴的负方向为正，沿着坐标轴的正方向为负。图 2-1 中所示的应力全部都是正的。

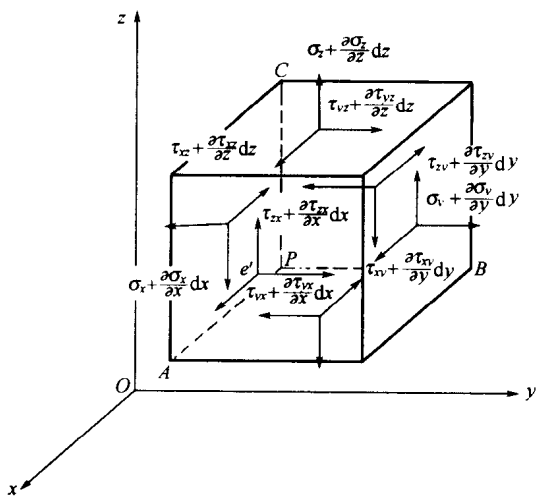


图 2-1 平行六面微分体的应力分析

(一) 直角坐标系中的平衡微分方程

在图 2-1 中六面微分体后面的微分面上作用的正应力为

$$\sigma_x = f(x, y, z)$$

在前面的微分面上，坐标 x 存在增量 dx ，因此这个面上的正应力相应为

$$\sigma'_x = f(x + dx, y, z)$$

根据物体的连续性假设，上式可以展开为 Taylor 级数并略去二阶以上的各项微量而得

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

其余各应力可按同法列出类似的表达式。

整个物体在外力作用下处于平衡状态，则从其中取出的六面微分体在各应力和体积力作用下也应当处于平衡状态，应满足下述六个平衡条件

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

设体积力在 x 、 y 、 z 轴三个方向的分量分别用 K_x 、 K_y 、 K_z 表示，运用 $\sum F_x = 0$ ，归纳平行于 x 轴的正应力、剪应力和体积力，则

$$\begin{aligned} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz \\ - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy \\ + K_x dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

同理，按 $\sum F_y = 0$ 、 $\sum F_z = 0$ 也可列出类似的平衡式，并经简化后可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + K_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + K_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + K_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-1a)$$

这就是以直角坐标表示的一般空间问题的平衡微分方程。

运用 $\sum M_x = 0$ ，以六面微分体前后两面中心连线 ee' 作为取力矩的轴， ee' 与 x 轴是平行的，于是 $\sum M_{ee'} = \sum M_x = 0$

$$\begin{aligned} \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz \right) \\ dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zx} dx dy \frac{dz}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad \tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy - \tau_{yx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx = 0$$

略去微量后得式 (2-2) 的第一等式。同理，利用 $\sum M_y = 0$ 、 $\sum M_z = 0$ 可得式 (2-2) 的其余两个等式：

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

这是剪应力互等定律。

(二) 物体内任一点的应力状态

在图 2-2 中，取物体中任一点 P 为坐标原点，通过此点可以作任意个斜微分面。

设通过 P 点而平行于坐标面的三个微分面上的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ 、 $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ 为已知，求取通过该点的某一斜微分面上的应力。为此，在 P 点附近取一平面 abc ，它平行于所分析的斜

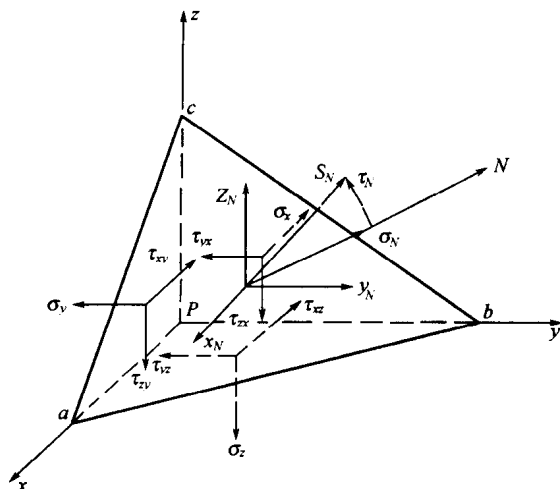


图 2-2 物体内任一点的应力状态

微分面，平面 abc 的外法线 N 与各坐标轴的方向余弦为

$$\begin{aligned} \cos(N, x) = l \\ \cos(N, y) = m \\ \cos(N, z) = n \end{aligned}$$

斜微分面 abc 与通过 P 点的三个坐标面组成一个四面微分体 $Pabc$ ，自 P 点至斜微分面 abc 的垂直距离 dh 是一微量，即四面微分体的高度。斜微分面 abc 的面积为 dS ，则其他三个微分面的面积分别为

$$\begin{aligned} \text{面积 } Pcb = dS \cdot l \\ \text{面积 } Pac = dS \cdot m \\ \text{面积 } Pab = dS \cdot n \end{aligned}$$

四面微分体的体积为

$$dV = \frac{1}{3} dh \cdot dS$$

由于这些微分面很小，其上所作用的应力可以看作是均匀分布的。设斜微分面 abc 上的应力 S_N 在坐标轴上的投影为 x_N 、 y_N 、 z_N ，根据四面体的平衡条件，按 $\sum F_x = 0$ 得

$$x_N dS - \sigma_x dS \cdot l - \tau_{xy} dS \cdot m - \tau_{xz} dS \cdot n + K_x dV = 0$$

将上式除以 dS ，并注意到 $\frac{dV}{dS} = \frac{1}{3} dh$ ，当 $dh \rightarrow 0$ 时，斜微分面 abc 即为通过 P 点所考察的斜微分面，此时由于 dV 是比 dS 属更高一阶的微量，所以 $\frac{dV}{dS} \rightarrow 0$ ，据此而得式 (2-3) 的第一式。其余两式可分别由平衡条件 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum F_z = 0$ 同样地得出

$$\left. \begin{aligned} x_N = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ y_N = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ z_N = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

设斜微分面 abc 上的正应力为 σ_N ，则由投影可得

$$\sigma_N = x_N l + y_N m + z_N n$$

将式 (2-3) 代入并运用剪应力互等定律, 可得

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl \quad (2-4)$$

设斜微分面上的剪应力为 τ_N , 则由于

$$S_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = x_N^2 + y_N^2 + z_N^2$$

故
$$\tau_N^2 = x_N^2 + y_N^2 + z_N^2 - \sigma_N^2 \quad (2-5)$$

由式 (2-4) 和式 (2-5) 可见, 在物体内的任一点, 如果已知六个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} , 就可以求得通过此点任一斜面上的正应力和剪应力。

(三) 圆柱坐标系中的平衡微分方程

在圆柱坐标系中, 物体上某一点 A 的位置决定于此点的 z 轴高度、在高度为 z 的截面上此点与坐标原点的距离 r 以及 r 方向与某一轴 Ox 间的夹角 θ , 如图 2-3 所示。

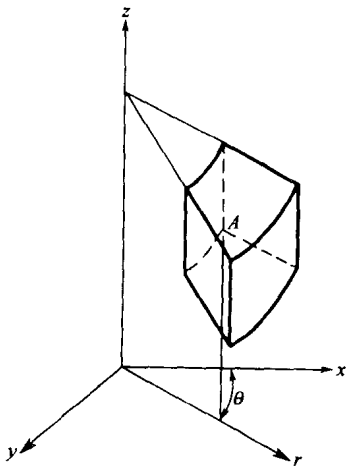


图 2-3 圆柱坐标系

圆柱坐标和直角坐标的转换关系为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

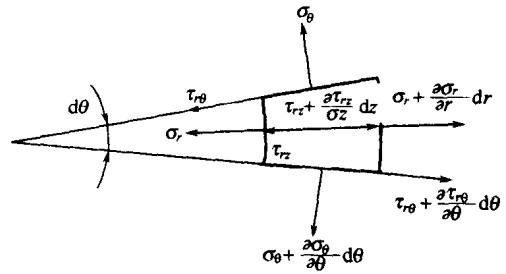
$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

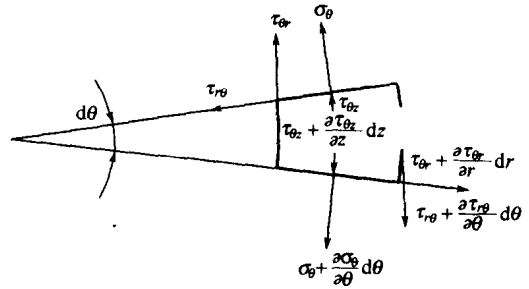
在以圆柱坐标表示的物体上切出一高度为 dz 、 r 方向为 dr 、夹角为 $d\theta$ 的六面微分体, 在 r 、 θ 、 z 方向的体积力分量分别以 K_r 、 K_θ 、 K_z 表示, 分别在 r 、 θ 、 z 方向列出平衡微分方程式, 见图 2-4。

在 r 方向, 见图 2-4 (a)

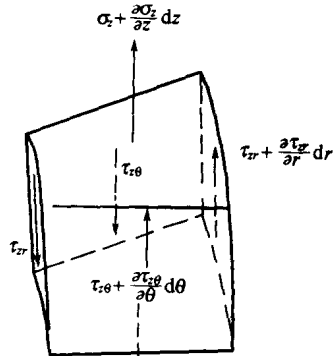
$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - \\ & \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \sin \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr dz \sin \frac{d\theta}{2} + \\ & \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \cos \frac{d\theta}{2} - \tau_{r\theta} dr dz \cos \frac{d\theta}{2} + \end{aligned}$$



(a)



(b)



(c)

图 2-4 圆柱坐标系中微分体的应力分析

$$\left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr - \tau_{rz} r d\theta dr + K_r r d\theta dr dz = 0$$

在 θ 方向, 见图 2-4 (b)。

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \cos \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr dz \cos \frac{d\theta}{2} + \\ & \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \sin \frac{d\theta}{2} - \tau_{r\theta} dr dz \sin \frac{d\theta}{2} + \\ & \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \tau_{\theta r} r d\theta dz + \\ & \left(\tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} dz \right) (r + dr) d\theta dr - \tau_{\theta z} r d\theta dr + \end{aligned}$$

$$K_\theta r d\theta dr dz = 0$$

在 z 方向, 见图 2-4 (c)。

$$\left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr\right)(r+dr)d\theta dz - \tau_{rz}rd\theta dz +$$

$$\left(\tau_{z\theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} d\theta\right)dr dz - \tau_{z\theta}dr dz +$$

$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right)rd\theta dr - \sigma_zrd\theta dr +$$

$$K_zrd\theta dr dz = 0$$

将上述三式加以简化, 考虑到 $\frac{d\theta}{2}$ 很小, 可以取 $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$, $\cos \frac{d\theta}{2} = 1$, 根据剪应力互等定律, 并略去高阶微量, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + K_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + K_z &= 0 \end{aligned} \right\} (2-6)$$

这就是以圆柱坐标表示的一般空间问题的平衡微分方程。对于轴对称问题, 各个位移、应变和应力都只是 r 和 z 的函数而与 θ 无关。物体变形时在周向和径向之间、周向和轴向之间不存在相对移动, 于是, 式(2-6)在轴对称情况下可得

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = 0 \quad \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = 0$$

不计及体积分量 K_r 、 K_θ 、 K_z 时, 可将式(2-6)加以简化

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} (2-7)$$

这是以圆柱坐标表示的轴对称问题的平衡微分方程。

三、应变分析

(一) 直角坐标系中的几何方程

物体在受外载后各点的位移是不同的, 因此各点的位移是该点位置的坐标函数, 见图 2-5。设物体中某任意点 M , 在沿 x 、 y 、 z 轴方向取三个微元长度各为 $MN = dx$, $Mp = dy$, $ML = dz$ (为清晰起见, 图中只标出 xOy 平面), 在外载作用下产生变形, 分别移到 M_1 、 N_1 、 P_1 、 L_1 点, 矢量 MM_1 为物体变形时 M 点的位移, 此位移在 x 、 y 、 z 轴上的投影分别用 u 、 v 、 w 表示, 按照物体连续性的假设, 位移分量 u 、 v 、 w 依物体受载情况而分别是 M 点坐标的连续函数, 即

$$\begin{aligned} u &= f_1(x, y, z) \\ v &= f_2(x, y, z) \\ w &= f_3(x, y, z) \end{aligned}$$

N 点移到 N_1 点时, 在 x 、 y 、 z 轴方向的位移为 u_1 、 v_1 、 w_1 , 由于 MN 平行于 x 轴, 且其长度为 dx , 故

可表示为

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x+dx, y, z) \\ v_1 &= f_2(x+dx, y, z) \\ w_1 &= f_3(x+dx, y, z) \end{aligned}$$

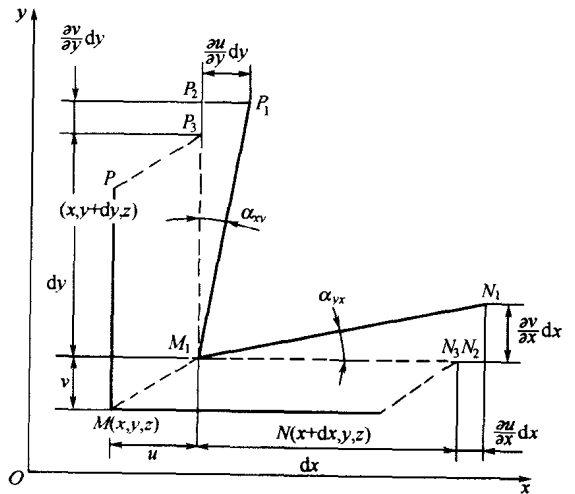


图 2-5 直角坐标系中的应变分析

P 点移到 P_1 点时, 位移为 u_2 、 v_2 、 w_2 , 由于 MP 平行于 y 轴, 且其长度为 dy , 故可表示为

$$\begin{aligned} u_2 &= f_1(x, y+dy, z) & v_2 &= f_2(x, y+dy, z) \\ w_2 &= f_3(x, y+dy, z) \end{aligned}$$

L 点移到 L_1 点时, 位移为 u_3 、 v_3 、 w_3 , 由于 ML 平行于 z 轴, 且其长度为 dz , 故可表示为

$$\begin{aligned} u_3 &= f_1(x, y, z+dz) & v_3 &= f_2(x, y, z+dz) \\ w_3 &= f_3(x, y, z+dz) \end{aligned}$$

将 N 、 P 、 L 点沿 x 、 y 、 z 轴方向的位移 u_1 、 v_1 、 w_1 等表达式分别展开为 Taylor 级数, 并略去二阶以上的各项微量可得 (此处只论述沿 x 轴的 MN 线段, MP 、 ML 线段可按完全相同的方法讨论)

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad v_1 = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad w_1 = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

线段 MN 在变形后的伸长量沿 x 、 y 、 z 轴方向的分量分别为

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad v_1 - v = \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$w_1 - w = \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

所以, 线段 M_1N_1 在各坐标轴上的投影为

$$dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

线段 M_1N_1 的长度为

$$\begin{aligned} M_1N_1 &= \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2} \\ &= dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \end{aligned}$$

根据物体的变形是微小的这一假设, 线段 MN 于变形后在横向, 即 y 与 z 方向的位移很小, 不影响其长度, 可以略去上述平方根号内的第二和第三项, 得

$$M_1 N_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

因 MN 平行于 x 轴, 故 $MN = dx$, 于是线段 MN 在 x 轴方向的正应变, 即平行于 x 轴的线应变分量为

$$\epsilon_x = \frac{M_1 N_1 - MN}{MN} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

同样, 可以求得 MP 、 ML , 即平行于 y 轴向和 z 轴向的线应变分量。三个应变分量为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

下面论述两线段 MN 与 MP 、 MP 与 ML 、 ML 与 MN 间直角的改变。

以 MN 与 MP 间的直角为例, 在变形后, 两线段间直角的改变量为 $(\alpha_{yx} + \alpha_{xy})$, 见图 2-5。和论述线应变分量时相同, 在求这些角度时, 略去在 z 方向的位移对它们的影响。线段 dx 由 x 轴向 y 轴的转角以 α_{yx} 表示, 则

$$\alpha_{yx} = \tan \alpha_{yx} = \frac{N_1 N_2}{M_1 N_2} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$

式中因 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 1 相比很小, 根据物体的小变形假设, 可以略去不计, 所以得

$$\alpha_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

同样可得线段由 y 轴向 x 轴的转角 α_{xy}

$$\alpha_{xy} = \tan \alpha_{xy} = \frac{P_1 P_2}{M_1 P_2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

因此, 线段 MN 与 MP 在变形前分别平行于 x 轴和 y 轴, 在变形后两线段间直角的减小量为

$$\alpha_{yx} + \alpha_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

此角度即为角应变分量, 亦即剪切应变分量 γ_{xy} 。同样, 可求得平行于 y 轴与 z 轴、平行于 z 轴与 x 轴的两线段在变形后所产生的角应变分量。三个角应变分量为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

角应变分量即剪切应变也符合互等定律, 即

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$

由式 (2-8)、式 (2-9) 可知, 当物体在变形时的位移分量 u 、 v 、 w 完全确定时, 应变分量是完全确定的, 此两式表示位移分量和应变分量的关系, 即几何方程。

(二) 圆柱坐标中的几何方程

在圆柱坐标系中, 用 u 表示径向位移, v 表示周向位移, w 表示轴向位移, 这三个量称为圆柱坐标中的位移分量。用 ϵ_r 、 ϵ_θ 、 ϵ_z 分别表示径向、周向和轴向正应变, 用 $\gamma_{r\theta}$ 、 $\gamma_{\theta z}$ 、 γ_{rz} 分别表示周向和径向、轴向和周向、径向和轴向两线段之间的角应变分量, 即剪切应变, 这 6 个量称为圆柱坐标系中的应变分量。

根据物体的变形是微小的这一假设, 用变形前的尺寸代替变形后的尺寸, 并认为横向变形只影响线段的角应变而略去横向变形对线段长度的影响。

1. 只有径向位移 u 而没有周向位移 v 及轴向位移 w

因为不存在轴向位移 w , 所以单元体上下两表面变形情况相似, 现以单元体的下表面为准在 $r \sim \theta$ 即 $x \sim y$ 平面上进行论述, 如图 2-6 所示。由径向位移 u 在轴向的增量 $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ 所引起的角位移将在后面论述。

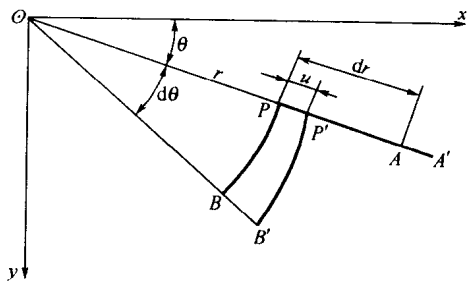


图 2-6 圆柱坐标系中的应变分析
——只有径向位移时

由于存在径向位移, 径向线段 PA 移到 $P'A'$, 周向线段 PB 移到 $P'B'$, 而 P 、 A 、 B 三点的位移为

$$PP' = u \quad AA' = u + \frac{\partial u}{\partial r} dr \quad BB' = u + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta$$

径向线段 PA 在径向的正应变为

$$\epsilon_r' = \frac{P'A' - PA}{PA} = \frac{AA' - PP'}{PA} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right) - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

周向线段 PB 在周向的正应变为

$$\epsilon_\theta' = \frac{P'B' - PB}{PB} = \frac{(r + u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}$$

周向线段 $P'B'$ 对径向线段 PA 的转角为

$$\alpha'_{r\theta} = \frac{BB' - PP'}{PB} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta\right) - u}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

2. 只有周向位移 v 而没有径向位移 u 及轴向位移 w

和前述情况相同, 此种情况也可以在 $r \sim \theta$ 即 $x \sim y$ 平面上进行论述, 如图 2-7 所示。由周向位移 v 在轴向上的增量 $\frac{\partial v}{\partial z} dz$ 所引起的角位移将在下面论述。

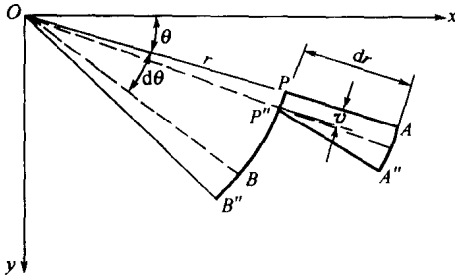


图 2-7 圆柱坐标系中的应变分析
——只有周向位移时

由于存在周向位移, 周向线段移到 $P''B''$, 径向线段 PA 移到 $P''A''$, P 、 A 、 B 三点的位移为

$$PP'' = v \quad AA'' = v + \frac{\partial v}{\partial r} dr \quad BB'' = v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta$$

和只有径向位移时情况相似, 可得

$$\epsilon''_{\theta} = \frac{P''B'' - PB}{PB} = \frac{BB'' - PP''}{PB} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta\right) - v}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

径向线段 $P''A''$ 的转角为

$$\alpha''_{rr} = \frac{AA'' - PP''}{PA} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial r} dr\right) - v}{dr} = \frac{\partial v}{\partial r}$$

α''_{rr} 中仅有一部分引起剪切变形, 另一部分为 $P''A''$ 随 $P''B''$ 绕 O 点的刚性转动, 故应予扣除。即在 α''_{rr} 项上应叠加的值为

$$\alpha''_{r\theta} = -\angle POP'' = -\frac{PP''}{OP} = -\frac{v}{r}$$

3. 只有轴向位移 w 而没有径向位移 u 及周向位移 v

因为不存在径向和周向位移, 所以单元体前后、左右的变形情况相似, 故论述单元体的左右和上下变形时, 在 $z \sim r$ 即 $z \sim x$ 平面上进行; 论述单元体的前后和上下变形时, 在 $\theta \sim z$ 即 $y \sim z$ 平面上进行, 如图 2-8 所示。图 2-8 中的两个 P''_1 点实际上是一个点, 只是由于展开做投影而分离了。

由于存在轴向位移, 径向线段 PA 移到 $P''A''$, 周向线段 PB 移到 $P''B''$, 而 P 、 A 、 B 三点的位移为

$$PP'' = w \quad AA'' = w + \frac{\partial w}{\partial r} dr \quad BB'' = w + \frac{\partial w}{\partial \theta} d\theta$$

和只有径向位移时情况相似, 在 $z \sim r$ 平面上可得

$$\epsilon''_{rz} = \frac{P''P''_1 - PP_1}{PP_1} = \frac{P_1P''_1 - PP''}{PP_1} = \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) - w}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

轴向线段对轴线的转角为

$$\alpha''_{zz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} dz}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

径向线段对轴线的转角为

$$\alpha''_{rz} = \frac{\frac{\partial w}{\partial r} dr}{dr} = \frac{\partial w}{\partial r}$$

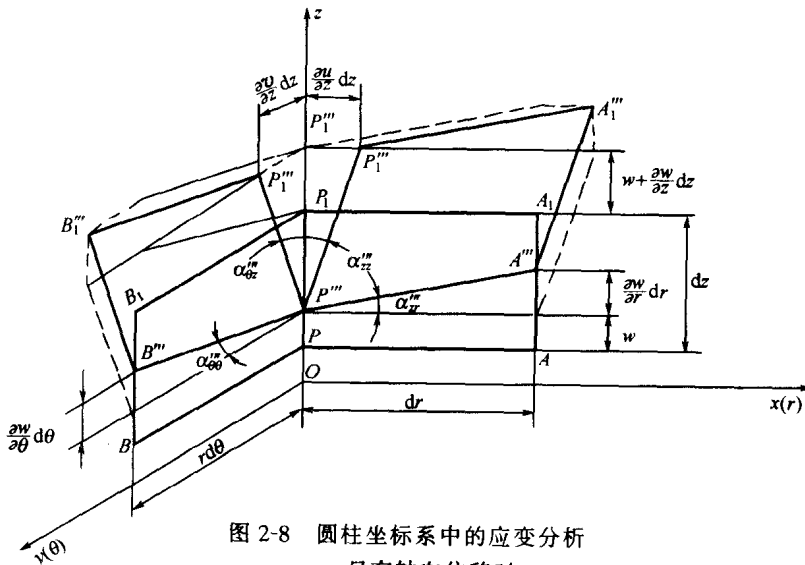


图 2-8 圆柱坐标系中的应变分析
——只有轴向位移时

在 $\theta \sim z$ 平面上, 可以求得周向线段对周向的转角为

$$\alpha_{\theta\theta}''' = \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{d\theta}{r d\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

轴向线段对周向的转角为

$$\alpha_{\theta z}''' = \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dz} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

当径向位移 u 、周向位移 v 、轴向位移 w 同时存在时, 正应变分量和角应变分量 (即剪切应变分量) 都可以由上述各对应关系叠加而得总的应变分量

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon_r' = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \epsilon_\theta &= \epsilon_\theta' + \epsilon_\theta'' = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \\ \epsilon_z &= \epsilon_z''' = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \alpha_{r\theta}' + \alpha_{rr}'' + \alpha_{r\theta}''' = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \\ \gamma_{rz} &= \alpha_{rz}''' + \alpha_{rz}''' = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \gamma_{\theta z} &= \alpha_{\theta z}''' + \alpha_{\theta z}''' = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\} (2-10)$$

这是以圆柱坐标表示的一般空间问题的几何方程。

如图 2-9 (a) 所示的空心圆柱体, 变形使所有各点产生同样的径向位移 u , 于是, 半径为 r 的圆周伸长了 $2\pi(r+u) - 2\pi r = 2\pi u$, 则其相对伸长量为 $\epsilon_\theta = \frac{2\pi u}{2\pi r} = \frac{u}{r}$ 。图 2-9 (b) 为同样的空心圆柱体的另一种变形形式, 变形后, 圆柱体上所有各点沿圆周方向移动一相同的距离 v , 于是变形前与矢径 r 重合的直线线段 AB , 在变形后则与矢径成 $\frac{v}{r}$ 角, 而与圆周的切线成 $\frac{\pi}{2} - \frac{v}{r}$ 角, 亦即出现了剪切应变变量 $\gamma_{r\theta} = -\frac{v}{r}$ 。

在轴对称问题中, 由于各对称面上的各个位移、应变和应力分量都只是 r 和 z 的函数而与 θ 无关, 所以在式 (2-10) 中可代入

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad v = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$$

因而可将式 (2-10) 加以简化

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned} \right\} (2-11)$$

这是轴对称问题的几何方程。

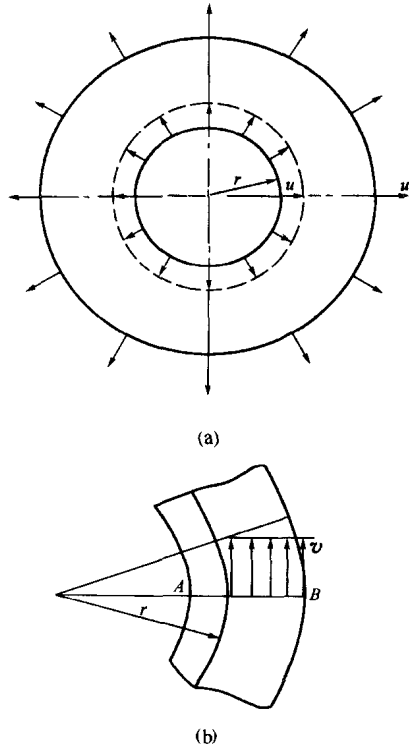


图 2-9 圆柱坐标相对直角坐标所引起的应变差异

四、应力和应变的关系——物理方程

在三向受力状态时, 应力和应变之间的关系符合广义 Hooke 定律。用应力表示应变的关系时, 为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} (2-12a)$$

此式为一般空间问题的物理方程。其中 E 是拉压弹性模量, G 是剪切弹性模量, μ 是 Poisson 系数, 三者之间的关系为

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

将式 (2-12a) 中的前三式相加, 得弹性体的体积应变