

根据最新版教材编写

Gao Deng Shu Xue



最新 高等数学

名师导学与习题全解

主编 北京大学数学科学学院 王俊锋
主审 北京大学数学科学学院 庄大蔚（教授）



同济版

世界知识出版社

823

017-12

0000

★ 根据最新版教材编写

最新高等数学

名师导学与习题全解

(同济版)

主 编	北京大学数学科学学院	王俊锋
主 审	北京大学数学科学学院	庄大蔚 (教授)
编 委	王俊锋 李海燕	阳惠湘

世界知识出版社

图书在版编目(CIP)数据

最新高等数学名师导学与习题全解:同济版 / 王俊峰主编. — 北京:世界知识出版社, 2001.8

ISBN 7-5012-1610-X

I. 最… II. 王… III. 高等数学—高等学校—解
题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 057410 号

整体策划
责任编辑
特约编辑
责任校对
封面设计
责任出版

欧阳瑾
曹伏华
胡宜槐
晓 明
程访华
夏凤仙

书 名

最新高等数学名师导学与习题全解(同济版)

出版发行
地址邮编
网 址
经 销
排版印刷
开本印张
字 数
排次印次
定 价

世界知识出版社
北京东单千面胡同 51 号 100010
<http://www.wapbook.com>
新华书店
北京至言文化艺术中心排版 北京康华印刷厂印刷
880 × 1230 毫米 32 开本 13.625 印张
400 千字
2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷
16.00 元

版权所有 翻印必究

前 言

高等数学是理、工院校一门重要的基础学科。作为一门科学,高等数学有其固有的特点,这就是高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。抽象性是数学最基本、最显著的特点——有了高度抽象和统一,我们才能深入地揭示其本质规律,才能使之得到更广泛的应用。严密的逻辑性是指在数学理论的归纳和整理中,无论是概念和表述,还是判断和推理,都要运用逻辑的规则,遵循思维的规律。所以说,数学也是一种思想方法,学习数学的过程就是思维训练的过程。人类社会的进步,与数学这门科学的广泛应用是分不开的。尤其是到了现代,电子计算机的出现和普及使得数学的应用领域更加拓宽,现代数学正成为科技发展的强大动力,同时也广泛和深入地渗透到了社会科学领域。

因此,学好高等数学对我们来说相当重要。然而,很多学生对怎样才能学好这门课程感到困惑。编者认为,要想学好高等数学,至少要做到以下四点:

首先,理解概念。数学中有很多概念。概念反映的是事物的本质,弄清楚了它是如何定义的、有什么性质,才能真正地理解一个概念。

其次,掌握定理。定理是一个正确的命题,分为条件和结论两部分。对于定理除了要掌握它的条件和结论以外,还要搞清它的适用范围,做到有的放矢。

第三,在弄懂例题的基础上作适量的习题。要特别提醒学习者的是,课本上的例题都是很典型的,有助于理解概念和掌握定理,要注意不同例题的特点和解法并在理解例题的基础上作适量的习题。作题时要善于总结——不仅总结方法,也要总结错误。这样,作完之后才会有所收获,才能举一反三。

第四,理清脉络。要对所学的知识有个整体的把握,及时总结知识体系,这样不仅可以加深对知识的理解,还会对进一步的学习有所帮助。

为了帮助广大学生及高等数学学习者学好这门课程,我们精心编写了这本《最新高等数学名师导学与习题全解》。它是高等教育出版社出版、同济大学组织的《高等数学》最新版的配套辅导用书,全书严格按照教材内容逐章编写,每章包括五个部分:

一、知识结构。对该章内容进行框架式的总结,以助学习者对该章知识作整体把握。

二、精典例题。针对该章知识点设计的典型例题与解析,并且对常考点、题型、解题方法、常见错误等进行了精要总结。

三、同步测试。这是针对该章内容及知识点选取的提高型测试题。需要说明的是,这一部分主要是为那些立志考研和提高数学水平的学习者而设计的,测试题基本上为历年及最新的考研真题。

四、同步测试参考答案。其中有些测试题包含了评分标准,以便学习者客观地了解自己对该章知识点的掌握程度。

五、习题全解。这一部分给出了教材中该章全部习题的答案与解题过程,供广大学习者参考借鉴。应当注意:该部分仅供参考,学习者应充分自主解题而不应过分依赖。而且,本书对有些习题仅给出了一种典型的解题方法或思路,而事实上很多习题并非只有一种解法。学习者应在参考的基础上动手、动脑,积极探求更新更简便的方法和思路,这样才能做到真正掌握所学知识并举一反三。

本书的编者均为一线的优秀教师,长期从事高等数学的教学或研究工作,对高等数学的教学有着独到的心得和经验。作为这些心得和经验的总结,相信本书的出版将会给广大学习者带来帮助。同时,欢迎读者对本书提出宝贵意见。

在本书的出版过程中,罗小荣、董明梅、程访华等同志做了大量的具体工作,谨在此致谢。

编 者

于北大

目 录

第1章 函数与极限

□ 知识结构 □		(1)
□ 经典例题 □		(2)
□ 同步测试 □		(5)
□ 同步测试参考答案 □		(6)
□ 习题全解 □		(8)
习题 1-1	(8)	习题 1-2 (11) 习题 1-3 (13)
习题 1-4	(14)	习题 1-5 (16) 习题 1-6 (18)
习题 1-7	(19)	习题 1-8 (21) 习题 1-9 (22)
习题 1-10	(23)	习题 1-11 (24) 总习题一 (25)

第2章 导数与微分

□ 知识结构 □		(28)
□ 经典例题 □		(29)
□ 同步测试 □		(33)
□ 同步测试参考答案 □		(35)
□ 习题全解 □		(36)
习题 2-1	(36)	习题 2-2 (38) 习题 2-3 (40)
习题 2-4	(41)	习题 2-5 (42) 习题 2-6 (44)
习题 2-7	(47)	习题 2-8 (48) 总习题二 (50)

第3章 中值定理与导数的应用

□ 知识结构 □		(52)
□ 经典例题 □		(53)
□ 同步测试 □		(56)
□ 同步测试参考答案 □		(58)
□ 习题全解 □		(65)
习题 3-1	(65)	习题 3-2 (68) 习题 3-3 (70)
习题 3-4	(73)	习题 3-5 (76) 习题 3-6 (79)
习题 3-7	(81)	习题 3-8 (85) 习题 3-9 (88)

习题 3-10 (90) 总习题三 (90)

第 4 章 不定积分

□ 知识结构 □	(96)
□ 精典例题 □	(96)
□ 同步测试 □	(101)
□ 同步测试参考答案 □	(101)
□ 习题全解 □	(103)
习题 4-1 (103) 习题 4-2 (105) 习题 4-3 (108)	
习题 4-4 (111) 习题 4-5 (115) 总习题四 (116)	

第 5 章 定积分

□ 知识结构 □	(122)
□ 精典例题 □	(123)
□ 同步测试 □	(126)
□ 同步测试参考答案 □	(127)
□ 习题全解 □	(132)
习题 5-1 (132) 习题 5-2 (135) 习题 5-3 (137)	
习题 5-4 (139) 习题 5-5 (143) 习题 5-6 (145)	
习题 5-7 (146) 习题 5-8 (148) 总习题五 (150)	

第 6 章 定积分的应用

□ 知识结构 □	(155)
□ 精典例题 □	(155)
□ 同步测试 □	(159)
□ 同步测试参考答案 □	(160)
□ 习题全解 □	(162)
习题 6-2 (162) 习题 6-3 (167) 习题 6-4 (170)	
习题 6-5 (172) 习题 6-6 (175) 总习题六 (176)	

第 7 章 空间解析几何与向量代数

□ 知识结构 □	(179)
□ 精典例题 □	(180)
□ 同步测试 □	(185)
□ 同步测试参考答案 □	(186)

☐ 习题全解 ☐	(187)
习题 7-1 (187)	习题 7-2 (188)
习题 7-4 (190)	习题 7-5 (192)
习题 7-7 (196)	习题 7-8 (198)
总习题七 (203)	

第 8 章 多元函数微分法及其应用

☐ 知识结构 ☐	(208)
☐ 精典例题 ☐	(209)
☐ 同步测试 ☐	(213)
☐ 同步测试参考答案 ☐	(214)
☐ 习题全解 ☐	(217)
习题 8-1 (217)	习题 8-2 (219)
习题 8-4 (222)	习题 8-5 (225)
习题 8-7 (230)	习题 8-8 (231)
习题 8-10 (235)	总习题八 (236)

第 9 章 重积分

☐ 知识结构 ☐	(240)
☐ 精典例题 ☐	(241)
☐ 同步测试 ☐	(245)
☐ 同步测试参考答案 ☐	(246)
☐ 习题全解 ☐	(249)
习题 9-1 (249)	习题 9-2 (1) (251)
习题 9-2 (3) (258)	习题 9-3 (260)
习题 9-5 (266)	习题 9-6 (270)
	总习题九 (272)

第 10 章 曲线积分与曲面积分

☐ 知识结构 ☐	(277)
☐ 精典例题 ☐	(278)
☐ 同步测试 ☐	(283)
☐ 同步测试参考答案 ☐	(284)
☐ 习题全解 ☐	(288)
习题 10-1 (288)	习题 10-2 (291)
习题 10-4 (298)	习题 10-5 (301)
	习题 10-6 (304)

习题 10-7 (306) 总习题十 (310)

第 11 章 无穷级数

☐ 知识结构 ☐		(317)
☐ 精典例题 ☐		(318)
☐ 同步测试 ☐		(323)
☐ 同步测试参考答案 ☐		(324)
☐ 习题全解 ☐		(328)
习题 11-1 (328)	习题 11-2 (331)	习题 11-3 (334)
习题 11-4 (336)	习题 11-5 (340)	习题 11-6 (342)
习题 11-7 (344)	习题 11-8 (346)	习题 11-9 (349)
习题 11-10 (352)	总习题十一 (352)	

第 12 章 微分方程

☐ 知识结构 ☐		(361)
☐ 精典例题 ☐		(362)
☐ 同步测试 ☐		(367)
☐ 同步测试参考答案 ☐		(369)
☐ 习题全解 ☐		(374)
习题 12-1 (374)	习题 12-2 (375)	习题 12-3 (378)
习题 12-4 (382)	习题 12-5 (387)	习题 12-6 (391)
习题 12-7 (392)	习题 12-8 (397)	习题 12-9 (400)
习题 12-10 (403)	习题 12-11 (410)	习题 12-12 (412)
习题 12-13 (417)	总习题十二 (421)	

第1章

函数与极限

〔学习要点〕

1. 函数是微积分研究的对象,学习函数的概念要注意两点:一是对定义域中的每一个值,有唯一的值与它对应;二是相同的定义域和对应法则确定同一个函数.

2. 基本初等函数是函数的基础,几类基本初等函数的性质要牢牢记住,这对以后的学习至关重要.

3. 极限是微积分的基础,要熟悉极限的性质,会求极限.

4. 连续是函数的一个重要性质,判断连续性要看

$$\lim_{x \rightarrow a_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ 是否成立,两个等号缺一不可.}$$

□ 知识结构 □

■ 函数

基本概念(集合、区间、邻域、常量、变量)
定义(定义域、值域、对应关系)
性质(有界性、单调性、奇偶性、周期性)
基本初等函数(定义、性质、图形)
反函数与复合函数

数列的极限

函数的极限

定义

左极限、右极限

极限存在准则

定义

阶的比较

无穷小与无穷大

极限运算法则

几个重要极限

■ 极限

■ 连续	函数连续的定义		
	间断点及其类型	第一类	可去 跳跃
		第二类	无穷 振荡
	反函数与复合函数的连续性 初等函数的连续性		
	闭区间上连续函数的性质	最大值、最小值定理	
		介值定理 一致连续性定理	

□ 精典例题 □

例 1. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$ 求:

(1) $f(\sin x)$; (2) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域.

分析 求复合函数的定义域, 要注意内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内.

解 (1) 要使 $\sin x$ 的值域包含于 $y = f(x)$ 的定义域内, 须有

$$0 \leq \sin x \leq 1$$

由此解得 $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

所以, $f(\sin x)$ 的定义域为: $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

(2) 函数 $f(x+a)$ 的定义域由不等式 $0 \leq x+a \leq 1$

解得 $-a \leq x \leq 1-a$;

函数 $f(x-a)$ 的定义域由不等式 $0 \leq x-a \leq 1$

解得 $a \leq x \leq 1+a$

若 $0 < a \leq \frac{1}{2}$, 则 $a \leq \frac{1}{2} \leq 1-a$, 此时函数 y 的定义域为 $[a, 1-a]$.

若 $a > \frac{1}{2}$, 则 $1-a < \frac{1}{2}$, 此时函数 y 的定义域为空集.

例 2. 设 $f(x)$ 是二次多项式, 并适合 $f(a) = f(b) = 0$ ($a \neq b$), $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = M$, 求 $f(x)$.

分析 由题设条件 $f(a) = f(b) = 0$, 故可设 $f(x) = A(x-a)(x-b)$ 最为简捷.

解 设 $f(x) = A(x-a)(x-b)$

由 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = M$, 知 $M = A\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)$

解得 $A = -\frac{4M}{(a-b)^2}$

故 $f(x) = \frac{-4M}{(a-b)^2}(x-a)(x-b)$.

例 3. 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 因为 $f(x) = e^{x^2}$, 所以 $f[\varphi(x)] = e^{[\varphi(x)]^2}$

又因 $f[\varphi(x)] = 1-x$, 所以 $e^{[\varphi(x)]^2} = 1-x$

即 $[\varphi(x)]^2 = \ln(1-x)$

又 $\varphi(x) \geq 0$

故 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$ $\varphi(x)$ 的定义域为 $x \leq 0$ (或 $(-\infty, 0]$).

例 4. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}$

* 常见错误 *

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

例 5. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x^2}$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-\frac{1}{x^2})^{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{x^2}} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$

注意 用两个重要极限时, 一定要注意形式上的一致性.

例 6. 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2} = 2$, 求 a, b 的值.

解 由于当 $x \rightarrow 2$ 时, 分母的极限为零, 并且分式的极限存在, 所以分子的极限必为零, 即

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b = 0$$

由此得 $b = -2a - 4$

于是 $x^2 + ax + b = x^2 + ax - 2a - 4 = (x-2)(x+a+2)$

代入原极限式得

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{a+4}{3} = 2$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} a+4=6 \\ b=-2a-4 \end{cases} \quad \text{得 } a=2, b=-8$$

例 7. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{nx}}{1 + e^{nx}}$, 讨论 $f(x)$ 的连续性.

分析 首先确定 $f(x)$, 然后再讨论 $f(x)$ 的连续性.

解 因为 $n > 0$, 并注意到

当 $x > 0$ 时, $e^{nx} \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$); 当 $x < 0$ 时, $e^{nx} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

$$\text{不难求得} \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$$

所以, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内除 $x=0$ 外, 处处连续, $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

例 8. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, 试确定常数 a , 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

连续.

分析 只须 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 即可.

解 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 只需

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2 = f(0)$$

又 $f(0) = a$, 故当 $a=2$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $a < c < d < b$, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi)$$

其中 p, q 为任意正常数.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 且有 $m \leq f(x) \leq M$

又由于 $c, d \in [a, b]$, 则有 $pm \leq pf(c) \leq pM, qm \leq qf(d) \leq qM$

两式相加得 $(p+q)m \leq pf(c) + qf(d) \leq (p+q)M$

即有 $m \leq \frac{pf(c) + qf(d)}{p+q} \leq M$

由介值定理证, 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $\frac{pf(c) + qf(d)}{p+q} = f(\xi)$

即 $pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi)$

本题也可用令 $F(x) = (p+q)f(x) - pf(c) - qf(d)$ 来证明, 请读者自己完成.

总结 对于闭区间上连续函数的命题一般采用下面两种方法:

(1) 直接法, 先利用最值定理, 再利用介值定理.

(2) 间接法, 先作辅助函数 $F(x)$, 再利用零点定理.

辅助函数的作法:

首先把结论中的 ξ (或 x_0) 改写成 x ; 其次, 移项, 使等式右边为零, 令左边式子为 $F(x)$, 则 $F(x)$ 即为所求.

例 10. 证明方程 $x = e^{x-3} + 1$ 在 $(0, 4)$ 内至少有一个根.

证明 令 $f(x) = x - e^{x-3} - 1$

则 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上连续, 且 $f(0) = -e^{-3} - 1 < 0$, $f(4) = 4 - e - 1 > 0$.

故由零点定理知, 在 $(0, 4)$ 内至少存在一点 $\xi (0 < \xi < 4)$, 使得

$$f(\xi) = 0$$

即 $\xi = e^{\xi-3} + 1$

因此, ξ 是 $x = e^{x-3} + 1$ 在 $(0, 4)$ 之间的一个根.

□ 同步测试 □

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 已知 $f(x) = \begin{cases} \ln(\cos x)x^{-2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

4. 求函数 $f(x) = (1+x)^{e^{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的间断点, 并判断其类型.

5. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^x}{1+e^x} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(f(x))]$ 等于 ()

A. 0

B. 1

C. $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ D. $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$

8. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

9. 求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin t}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

□ 同步测试参考答案 □

1. (考研真题 1997 年试卷一, 一(1)) $\frac{3}{2}$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x)x}$ (等价无穷小代换)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1 + \cos x} \left[\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3} x \cos \frac{1}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1 + \cos x} \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \times \left[1 + \frac{1}{3} \times 0 \right] \text{ (重要极限, 有界变量与无穷小之积)} = \frac{3}{2}$$

2. (考研真题 1997 年试卷二, 一(1)) $-\frac{1}{2}$

解 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

$$\begin{aligned} \text{故有 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x) x^{-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \quad (\text{等价无穷小替换}) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \quad (\text{重要极限})$$

3. (考研真题 1998年试卷二, 二(1)) (D)

解 用排除法易将(A)(B)排除掉, 容易产生麻烦的是(C). 若(C)成立, 则显然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$; 但反之未然, 例如取 $x_n = 0$, 则只要 $y_n \neq \infty$, 就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 而不必 y_n 是无穷小.

对(D), 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 等价于 x_n 为无穷大, 即 $\forall M > 0, \exists N_1 > 0$,

当 $n > N_1$ 时, $|x_n| > M$; 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 故 $\forall \epsilon > 0, \exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时, $|x_n y_n| < \epsilon$, 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, $M |y_n| \leq |x_n y_n| < \epsilon$ 即 $|y_n| < \frac{\epsilon}{M}$.

也即 y_n 是无穷小.

4. (考研真题 1998年试卷二, 三)

解 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的间断点为 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处, $f\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) = +\infty$, 在 $x = \frac{5\pi}{4}$ 处, $f\left(\frac{5\pi}{4} + 0\right) = +\infty$.

故 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 为第二类(或无穷)间断点.

在 $x = \frac{3\pi}{4}$ 处, $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} f(x) = 1$, 在 $x = \frac{7\pi}{4}$ 处, $\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{4}} f(x) = 1$.

故 $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 为第一类(或可去)间断点.

5. (考研真题 2000年试卷一, 三)

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + \frac{1}{e^x}}{1 + e^x} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + \frac{1}{e^x}}{1 + e^x} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + \frac{1}{e^x}}{1 + e^x} - \frac{\sin x}{x} \right) = 2 - 1 = 1$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \frac{1}{e^x}}{1 + e^x} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1$.

6. (考研真题 2001年试卷二, 一(1)) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$

7. (考研真题 2001年试卷二, 二(1)) B

8. (考研真题 2001年试卷二, 二(2)) B

9. (考研真题 2001年试卷二, 四)

解 因为 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{x - t}{\sin t - \sin x} \ln \frac{\sin t}{\sin x}$,

而 $\lim_{t \rightarrow x} \frac{x - t}{\sin t - \sin x} \ln \frac{\sin t}{\sin x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\cos t} = \frac{x}{\sin x}$,

故 $f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}}$.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{\sin x}} = e$,

所以, $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类(或可去)间断点;

$x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是 $f(x)$ 的第二类(或无穷)间断点.

□ 习题全解 □



习题 1-1

1. (1) $(2, 6]$ (2) $[0, +\infty)$ (3) $(-3, 3)$ (4) $[-1, 7]$

2. 定义域: $(-\infty, +\infty)$; 值域: $[-1, 1]$

3. (1) 不同, 因为定义域不同;

(2) 不同, 因为对应法则不同, $x < 0$ 时, $g(x) = -x$;

(3) 相同, 因为定义域、对应法则相同.

4. (1) $1 - x \neq 0, x \neq 1$ 定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

(2) $3x + 2 \geq 0, x \geq -\frac{2}{3}$ 定义域为 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$

(3) $1 - x^2 \neq 0, x \neq \pm 1$ 定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

(4) $x^2 - 4 \geq 0, |x| \geq 2$ 定义域为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

(5) $1 - x^2 \neq 0$, 且 $x + 2 \geq 0$, 即 $x \neq \pm 1$, 且 $x \geq -2$

定义域为 $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

(6) $x \neq 0$, 且 $1 - x^2 \geq 0$, 即 $x \neq 0$, 且 $|x| \leq 1$ 定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$

(7) $4 - x^2 > 0$, 即 $|x| < 2$ 定义域为 $(-2, 2)$

(8) $x^2 - 3x + 2 \neq 0, x \neq 1, 2$ 定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

5. (略)

6. $f(0) = 2$ $f(1) = \sqrt{5}$ $f(-1) = \sqrt{5}$ $f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{|a|} \sqrt{4a^2 + 1}$

$f(x_0) = \sqrt{4 + (x_0 + h)^2}$