

# 场的数学描写方法

欧维义 编

吉林人民出版社

# 场的数学描写方法

欧维义 编

吉林人民出版社

专业  
市场  
V  
质和  
观，  
综合  
业、

## 场的数学描写方法

欧维义 编

\*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

\*

787×1092毫米32开本 8½印张 184,000字

1983年2月第1版 1983年2月第1次印刷

印数：1—6,660册

书号：13091·130 定价：0.75元

## 序

物理、力学中的场是物质存在的一种形式。场的数学描写方法，则主要是引进描写场的各种分布特性的基本概念，建立场所遵循的基本规律和场中所涉及的各种量的计算和表达方法。

场的数学描写方法在自然科学的各个领域和工程技术的许多方面有着广泛的应用，它是进行理工科学习和从事科学技术研究工作所必需的数学基础知识。

本书联系一些常识性的、初等的物理、力学模型，形象、直观，讲述方法，深入浅出。在第二、第三、第四章中引进了场论中最为重要的梯度、散度、旋度概念；建立了场论中最重要的奥高公式、格林公式和斯托克斯公式。第五章对在场论中有广泛应用的哈密顿算符 $\nabla$ 的运算法则作了较详细的讨论。第六章在给出梯度、散度、旋度和拉普拉斯算符 $\nabla^2$ 在球、柱坐标下的表达式的同时，还给出了它们在一般直交曲线坐标下的表达式。第七章对不同场所具有的不同性质、场的分类、场的方程和决定场的物理量均作了较详细的讨论。

本书的出版得到江泽坚教授、谢邦杰教授的热情支持，江泽坚教授审阅修改了全部稿件，使原稿得到了很大改进，林龙威副教授对本书的编写提出过很好的建议，编者对他们的帮助表示衷心的感谢。

本书初稿于1965年4月完成。在教学过程中，于1968年，1972年先后修改两次。这次付印前又参考近期出版的新书，做了修改。由于编者水平所限，错误和不妥之处，谨希读者不吝指正。

编者  
于吉林大学  
1981.4.

## 内 容 简 介

本书是以物理专业学生为主要读者的关于“场论”的高等学校教学参考书。内容包括场的概念和图解，数量场的梯度，矢量场的散度，矢量场的旋度， $\nabla$ 算符，曲线坐标下梯度、散度、旋度的表达式以及场的分类、性质和场的方程等七章。特点是：联系一些物理、力学模型，形象、直观；讲述方法，深入浅出；所选例题较多，便于读者自学。

本书主要是供综合大学、师范院校物理系作为教材或教学参考书，也可供工科有关专业、广播电视大学理科及从事科学技术工作的广大读者自学参考。

# 目 录

第一章 场的概念和图解 .....	1
§1 矢量代数的基本公式 .....	1
1. 矢量及其表示法 .....	1
2. 矢量的线性运算 .....	1
3. 矢量的标量积 .....	3
4. 矢量的矢量积 .....	3
5. 并矢 .....	7
§2 矢量函数的微分法 .....	9
1. 矢量函数 .....	9
2. 矢量函数的极限与连续性 .....	10
3. 矢量函数的微商 .....	12
§3 场的概念 .....	17
1. 场的概念 .....	17
2. 场的数学表示方法 .....	17
3. 场的分类 .....	18
§4 场的图形表示法 .....	19
1. 数量场的等值面(线) .....	19
2. 矢量场的矢量线 .....	20
3. 矢量线的解析表达式 .....	21
习题一 .....	24
第二章 数量场的梯度 .....	26
§1 方向导数 .....	26
1. 方向导数的定义 .....	26
2. 方向导数的计算公式 .....	28

§2 梯度 .....	33
1. 梯度定义 .....	33
2. 梯度的性质及其另一种定义 .....	33
3. 梯度的几何性质及其几何作法 .....	35
4. 梯度的运算法则 .....	37
习题二 .....	44
<b>第三章 矢量场的散度 .....</b>	<b>46</b>
§1 流量 .....	46
1. 流场的流量 .....	46
2. 均匀流场的流量计算 .....	47
3. 非均匀流场的流量计算 .....	47
4. 流量的定义 .....	48
§2 发散量与散度 .....	52
1. 流场的发散量 .....	52
2. 发散量的定义 .....	53
3. 流场的散度 .....	54
4. 散度的定义 .....	55
§3 散度在直角坐标系下的计算公式 .....	56
1. 计算公式 .....	56
2. 散度的运算法则 .....	60
§4 奥高公式 .....	62
1. 散度是导数概念的推广 .....	62
2. 奥高公式的形式导出 .....	63
3. 奥高公式及其证明 .....	65
4. 奥高公式的物理意义 .....	72
5. 两个推论 .....	72
§5 奥高公式应用之一 .....	76



1. 奥高公式是微积分基本定理的推广 .....	76
2. 奥高公式与分部积分法 .....	76
3. 格林第一、第二公式 .....	77
4. 调和函数的积分表达式 .....	79
5. 调和函数的两个性质 .....	83
§6. 奥高公式应用之二 .....	85
1. 质量守恒与连续性方程 .....	85
2. 理想流体的运动方程 .....	89
3. 静电场的基本方程 .....	92
4. 扩散方程 .....	93
习题三 .....	97
<b>第四章 矢量场的旋度</b> .....	<b>99</b>
§1 旋转量(环流) .....	99
1. 流场中旋转运动产生的条件 .....	99
2. 平面场的旋转量 .....	100
3. 旋转量和旋转运动的快慢 .....	103
§2 平面涡旋量的定义及其计算 .....	104
1. 平面场的涡旋量的定义 .....	104
2. 流场的涡旋量的直观算法 .....	106
3. 平面场涡旋量的计算公式 .....	108
§3. 旋度及其计算公式 .....	111
1. 沿任意方向的涡旋量 .....	111
2. 空间矢量场的旋度 .....	112
3. 旋度在直角坐标下的表达式 .....	113
4. 旋度的运算法则 .....	114
§4 格林公式和斯托克斯公式 .....	116
1. 格林公式的形式导出 .....	116

2. 格林公式 .....	118
3. 斯托克斯公式 .....	128
§5 两个基本方程的建立 .....	135
1. 安培环路定理的微分形式 .....	136
2. 法拉第感应定律的微分形式 .....	136
§6 格林公式的应用 .....	138
1. 变形的格林公式 .....	138
2. 二重积分的分部积分公式 .....	139
3. 格林第一、第二公式 .....	139
4. 调和函数的积分表达式 .....	141
习题四 .....	146
第五章 $\nabla$ 算符 .....	148
§1 $\nabla$ 算符的引进及其性质 .....	148
1. $\nabla$ 算符是怎样引进的 .....	148
2. $\nabla$ 算符的微分性质 .....	150
3. $\nabla$ 算符的矢量性 .....	151
§2 $\nabla$ 算符的运算法则 .....	154
1. $\nabla$ 算符的运算法 .....	154
2. $\nabla$ 算符的线性运算性质 .....	158
3. $\nabla$ 算符的复合运算法则 .....	158
§3 $\nabla$ 算符的基本公式 .....	167
1. 乘积公式 .....	167
2. 复合函数公式 .....	167
3. 二阶微分运算及其基本公式 .....	168
习题五 .....	170
第六章 曲线坐标下梯度、散度、旋度的表达式 .....	172
§1 梯度、散度、旋度、 $\nabla^2$ 算符在柱坐标下的表达式 .....	172

1. $\nabla$ 算符在柱坐标下的表达式 .....	172
2. 单位矢量 $e_r, e_\varphi, e_z$ 的“微商”公式 .....	174
3. 散度在柱坐标下的表达式 .....	175
4. 旋度在柱坐标下的表达式 .....	177
5. $\nabla^2$ 算符在柱坐标下的表达式 .....	178
<b>§2 梯度、散度、旋度、<math>\nabla^2</math>算符在球坐标下的表达式 .....</b>	<b>179</b>
1. $\nabla$ 算符在球坐标下的表达式 .....	179
2. 单位矢量 $e_r, e_\theta, e_\varphi$ 的“微商”公式 .....	180
3. 散度在球坐标下的表达式 .....	182
4. 旋度、 $\nabla^2$ 算符在球坐标下的表达式 .....	183
<b>§3 曲线坐标下梯度、散度、旋度的表达式 .....</b>	<b>188</b>
1. 参数型方程的曲面面积公式 .....	188
2. 一对一变换和曲线坐标的概念 .....	193
3. 变换是一对一的充分条件 .....	194
4. 曲线坐标的自然标架 .....	199
5. 笛卡尔坐标向一般直交坐标的过渡 .....	202
6. 曲线坐标下梯度、散度、旋度的表达式 .....	204
<b>习题六 .....</b>	<b>214</b>
<b>第七章 场的分类、性质和场的方程 .....</b>	<b>215</b>
<b>§1 位场和标量势 .....</b>	<b>215</b>
1. 位场和标量势的概念 .....	215
2. 按曲面是单连通区域上的矢量场的标量势 .....	216
3. 按曲面是复连通区域上的矢量场的标量势 .....	227
4. 平面矢量场的标量势 .....	232
<b>§2 管形场和矢量势 .....</b>	<b>234</b>
1. 管形场和矢量势的概念 .....	234

2. 向量场为管形场的充要条件 .....	236
§3 调和场和调和函数 .....	241
1. 调和场和调和函数的概念 .....	241
2. 向量场是调和场的充要条件 .....	242
3. 平面调和场的一些性质 .....	243
§4 向量场的分类和描述场的物理量 .....	252
1. 向量场的分类 .....	252
2. 描述场的物理量 .....	254
习题七 .....	256
习题答案 .....	258

# 第一章 场的概念和图解

## §1 矢量代数的基本公式

### 1. 矢量及其表示法

一个由大小和方向才能确定的量，称为矢量，记作  $A, B$  等。

一个矢量  $A$  的大小，记作  $|A|$ ，称为  $A$  的长度（亦称为模）。

在空间直角坐标系下，任何一个矢量  $A$  均可用基本单位矢量  $i, j, k$  唯一地表示成

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

此处（及下面），带文字下标的  $A_x, A_y, A_z$  分别表示矢量  $A$  在  $x, y, z$  轴上的分量（图 1）。

### 2. 矢量的线性运算

矢量的线性运算包括：矢量的加法、减法和数乘矢量运算。

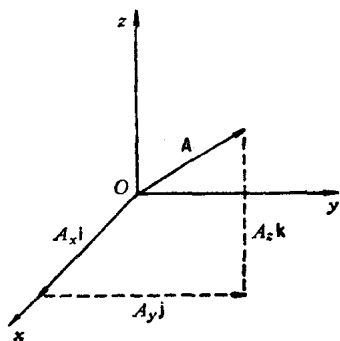


图 1

矢量的加法运算满足平行四边形法则，即矢量  $A$ 、 $B$  之和  $A+B$  可如图 2 作出。

数  $\alpha$  乘矢量  $A$  的结果  $\alpha A$ ，是这样的一个矢量：无论  $\alpha$  为何数，它的长度为

$$|\alpha A| = |\alpha| |A|$$

方向是这样规定的（图 3）：

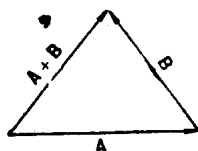


图 2

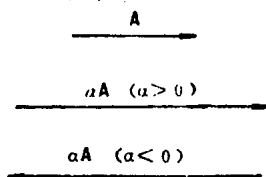


图 3

当  $\alpha > 0$  时， $\alpha A$  和  $A$  平行且同向；

当  $\alpha < 0$  时， $\alpha A$  和  $A$  平行且反向。

有了加法运算的平行四边形法则和数乘矢量的几何表示法则，就可如图 4 作出  $\alpha A + \beta B$ （这里作出的是  $\alpha > 0, \beta > 0$  的情形，其它情形类似）。

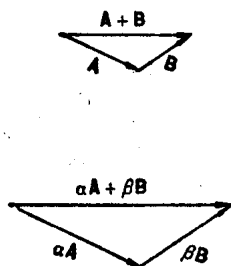


图 4

矢量线性运算的上述几何作图法则相当于作如下的代数运算：

$$A + B = (A_x + B_x)i + (A_y + B_y)j + (A_z + B_z)k$$

$$\alpha A = (\alpha A_x)i + (\alpha A_y)j + (\alpha A_z)k$$

$$\alpha A + \beta B = (\alpha A_x + \beta B_x)i + (\alpha A_y + \beta B_y)j + (\alpha A_z + \beta B_z)k$$

### 3. 矢量的标量积

一个物体在外力  $F$  的作用下，移动一段距离  $S$ ，力作的功为

$$W = |F| \cdot |S| \cos\theta$$

式中  $\theta$  为  $F$  与  $S$  之间的夹角 (图5)。

为了从运算上一般地研究力作功这类实际问题，人们引进了两个矢量  $A, B$  的标量积 (又称为内积、点乘)，定义为

$$A \cdot B = |A| |B| \cos\theta \quad (1 \cdot 1 \cdot 1)$$

此处  $|A|, |B|$  分别是  $A, B$  的模， $\theta$  为  $A, B$  的夹角。

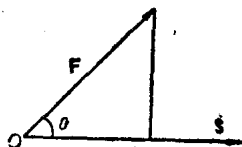


图 5

根据标量积的定义式(1·1·1)，基本单位矢量有下列关系：

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

应用这些关系，可推出

$$A \cdot B = B \cdot A = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1 \cdot 1 \cdot 2)$$

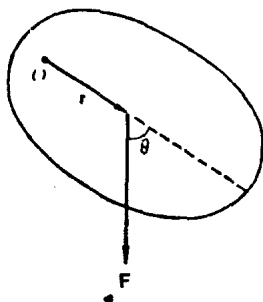


图 6

### 4. 矢量的矢量积

从力学上知道，力  $F$  对于点  $O$  的力矩 (图6) 是一个矢量，其大小为

$$M = |F| |r| \sin\theta$$

其方向垂直于  $r$  和  $F$  所决定的平面，并沿从  $r$  转到  $F$  的右手螺旋前进的方向。

为了从运算上一般地研究力矩这类实际问题，在数学上引进了矢量积的运算。

矢量  $A, B$  的矢量积 (又称叉乘) 定义为

$$A \times B = (|A||B|\sin\theta)n \quad (1.1.3)$$

式中  $n$  是垂直于  $A, B$  所在平面的单位矢量，且  $A, B$  及  $n$  成右手螺旋。

按矢量积的定义式 (1.1.3) 有

$$A \times B = -B \times A$$

即矢量积不满足交换律。

根据式 (1.1.3)，可以证明基本单位矢量之间的矢量积有下列关系：

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

应用这些关系得到

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_1 B_2 - A_2 B_1)i + (A_2 B_3 - A_3 B_2)j + (A_3 B_1 - A_1 B_3)k \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

例1 证明混合积

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (1.1.5)$$

由此还可得到

$$A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = B \cdot (C \times A) \quad (1.1.6)$$



证 根据式(1.1.4)有

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = (B_y C_z - B_z C_y) i \\ + (B_z C_x - B_x C_z) j + (B_x C_y - B_y C_x) k$$

于是由式(1.1.2)得到

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_x (B_y C_z - B_z C_y) + A_y (B_z C_x - B_x C_z) \\ + A_z (B_x C_y - B_y C_x)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

即式(1.1.5)成立。为证式(1.1.6)，只需把式(1.1.6)各项都用式(1.1.5)写成行列式的形式，根据行列式相等就知式(1.1.6)成立。

混合积  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  又称为框积，简记为  $[\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C}]$ 。

例2 证明二重矢量积

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} \quad (1.1.7)$$

证 我们分三种情形来证明：

1) 当  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$  时，这时矢量  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  共线，不妨设  $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{A}$ ，于是式(1.1.7)右端

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) (\lambda \mathbf{A}) - [(\lambda \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}] \mathbf{A} \\ = \lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} - \lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} = 0$$

2) 当  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq 0$ ， $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$  时，先证明等式

$$(\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{C}_0 = (\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{C}_0) \mathbf{B}_0 - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{C}_0) \mathbf{A}_0 \quad (1.1.8)$$