场的数学描写方法

欧维义 编

吉林人民出版社

场的数学描写方法

欧维义 编

吉林人民出版社

场的数学描写方法

欧维义　编

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行
长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　8½印张　184,000字
1983年2月第1版　1983年2月第1次印刷
印数：1—6,660册
书号：13091·130　定价：0.75元

序

物理、力学中的场是物质存在的一种形式.场的数学描写方法，则主要是引进描写场的各种分布特性的基本概念，建立场所遵循的基本规律和场中所涉及的各种量的计算和表达方法。

场的数学描写方法在自然科学的各个领域和工程技术的许多方面有着广泛的应用，它是进行理工科学习和从事科学技术研究工作所必需的数学基础知识。

本书联系一些常识性的、初等的物理、力学模型，形象、直观；讲述方法，深入浅出．在第二、第三、第四章中引进了场论中最为重要的梯度、散度、旋度概念；建立了场论中最重要的奥高公式、格林公式和斯托克斯公式。第五章对在场论中有广泛应用的哈密顿算符∇的运算法则作了较详细的讨论。第六章在给出梯度、散度、旋度和拉普拉斯算符∇^2在球、柱坐标下的表达式的同时，还给出了它们在一般直交曲线坐标下的表达式．第七章对不同场所具有的不同性质、场的分类、场的方程和决定场的物理量均作了较详细的讨论。

本书的出版得到江泽坚教授、谢邦杰教授的热情支持，江泽坚教授审阅修改了全部稿件，使原稿得到了很大改进，林龙威副教授对本书的编写提出过很好的建议，编者对他们的帮助表示衷心的感谢。

本书初稿于1965年4月完成。在教学过程中，于1968年，1972年先后修改两次。这次付印前又参考近期出版的新书，做了修改。由于编者水平所限，错误和不妥之处，谨希读者不吝指正。

编者
于吉林大学
1981.4.

内 容 简 介

本书是以物理专业学生为主要读者的关于“场论”的高等学校教学参考书。内容包括场的概念和图解，数量场的梯度，矢量场的散度，矢量场的旋度，∇算符，曲线坐标下梯度、散度、旋度的表达式以及场的分类、性质和场的方程等七章。特点是：联系一些物理、力学模型，形象、直观；讲述方法，深入浅出；所选例题较多，便于读者自学。

本书主要是供综合大学、师范院校物理系作为教材或教学参考书，也可供工科有关专业、广播电视大学理科及从事科学技术工作的广大读者自学参考。

目　　录

第一章　场的概念和图解

§1　矢量代数的基本公式

1. 矢量及其表示法

一个由大小和方向才能确定的量，称为矢量，记作 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$等。

一个矢量$\boldsymbol{A}$的大小，记作$|\boldsymbol{A}|$，称为$\boldsymbol{A}$的长度（亦称为模）。

在空间直角坐标系下，任何一个矢量$\boldsymbol{A}$均可用基本单位矢量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$唯一地表成

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$$

此处（及下面），带文字下标的A_x，A_y，A_z分别表示矢量$\boldsymbol{A}$在x，y，z轴上的分量（图1）。

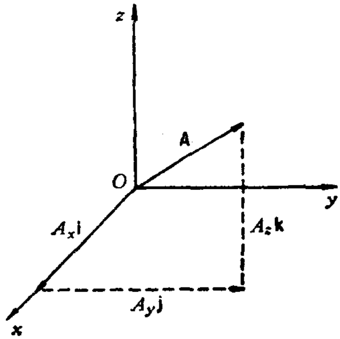

图　1

2. 矢量的线性运算

矢量的线性运算包括：矢量的加法、减法和数乘矢量运算。

矢量的加法运算满足平行四边形法则，即矢量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$之和$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$可如图2作出。

数α乘矢量$\boldsymbol{A}$的结果$\alpha\boldsymbol{A}$，是这样的一个矢量：无论α为何数，它的长度为

$$|\alpha\boldsymbol{A}|=|\alpha||\boldsymbol{A}|$$

方向是这样规定的（图3）：

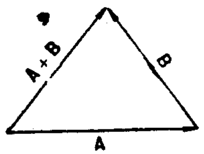

图 2

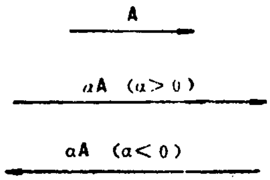

图 3

当$\alpha>0$时，$\alpha\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}$平行且同向；

当$\alpha<0$时，$\alpha\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}$平行且反向。

有了加法运算的平行四边形法则和数乘矢量的几何表示法则，就可如图4作出$\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}$（这里作出的是$\alpha>0$，$\beta>0$的情形，其它情形类似）。

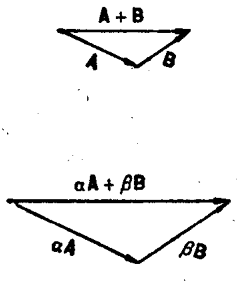

图 4

矢量线性运算的上述几何作图法则相当于作如下的代数运算：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_x+B_x)\boldsymbol{i}+(A_y+B_y)\boldsymbol{j}+(A_z+B_z)\boldsymbol{k}$$

$$\alpha\boldsymbol{A}=(\alpha A_x)\boldsymbol{i}+(\alpha A_y)\boldsymbol{j}+(\alpha A_z)\boldsymbol{k}$$

$$\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}=(\alpha A_x+\beta B_x)\boldsymbol{i}+(\alpha A_y+\beta B_y)\boldsymbol{j}+(\alpha A_z+\beta B_z)\boldsymbol{k}$$

3. 矢量的标量积

一个物体在外力$\boldsymbol{F}$的作用下，移动一段距离$\boldsymbol{S}$，力作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{S}|\cos\theta$$

式中θ为$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{S}$之间的夹角（图5）。

为了从运算上一般地研究力作功这类实际问题，人们引进了两个矢量$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的标量积(又称为内积、点乘)，定义为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta \qquad (1\cdot1\cdot1)$$

此处$|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{B}|$分别是$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的模，θ为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的夹角。

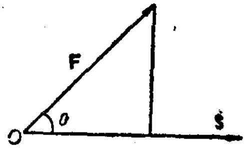

图 5

根据标量积的定义式(1·1·1)，基本单位矢量有下列关系：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

应用这些关系，可推出

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (1\cdot1\cdot2)$$

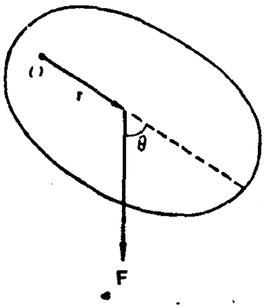

图 6

4. 矢量的矢量积

从力学上知道，力$\boldsymbol{F}$对于定点O的力矩（图6）是一个矢量，其大小为

$$M=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\sin\theta$$

其方向垂直于$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{F}$所决定的平面，并沿从$\boldsymbol{r}$转到$\boldsymbol{F}$的右手螺旋前进的方向。

为了从运算上一般地研究力矩这类实际问题，在数学上引进了矢量积的运算。

矢量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的矢量积(又称叉乘)定义为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta)\boldsymbol{n} \qquad (1\cdot1\cdot3)$$

式中$\boldsymbol{n}$是垂直于$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$所在平面的单位矢量，且$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$及$\boldsymbol{n}$成右手螺旋。

按矢量积的定义式(1·1·3)有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

即矢量积不满足交换律。

根据式 (1·1·3)，可以证明基本单位矢量之间的矢量积有下列关系：

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

应用这些关系得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y\\&\quad-A_yB_x)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}\end{aligned} \qquad (1\cdot1\cdot4)$$

例1　证明混合积

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\\C_x&C_y&C_z\end{vmatrix} \qquad (1\cdot1\cdot5)$$

由此还可得到

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) \qquad (1\cdot1\cdot6)$$

证 根据式(1·1·4)有

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=(B_yC_z-B_zC_y)\boldsymbol{i}$$

$$+(B_zC_x-B_xC_z)\boldsymbol{j}+(B_xC_y-B_yC_x)\boldsymbol{k}$$

于是由式(1·1·2)得到

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=A_x(B_yC_z-B_zC_y)+A_y(B_zC_x-B_xC_z)$$

$$+A_z(B_xC_y-B_yC_x)=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

即式(1·1·5)成立。为证式(1·1·6)，只需把式(1·1·6)各项都用式(1·1·5)写成行列式的形式，根据行列式相等就知式(1·1·6)成立。

混合积$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$又称为框积，简记为$[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{C}]$。

例2 证明二重矢量积

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}\qquad(1\cdot1\cdot7)$$

证 我们分三种情形来证明：

1) 当$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$时，这时矢量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$共线，不妨设$\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{A}$，于是式(1·1·7)右端

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\lambda\boldsymbol{A})-[(\lambda\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{C}]\boldsymbol{A}$$

$$=\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}-\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=0$$

2) 当$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\neq0$，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$时，先证明等式

$$(\boldsymbol{A}_0\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{C}_0=(\boldsymbol{A}_0\cdot\boldsymbol{C}_0)\boldsymbol{B}_0-(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{C}_0)\boldsymbol{A}_0\qquad(1\cdot1\cdot8)$$