中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

高等幾何學

下册

Н. В. ЕФИМОВ 著

裘光明 譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

高等幾何學

下册

H. B. 葉非莫夫著 裘光明譯

商務印書館

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）1949年出版的葉菲莫夫（Н. В. Ефимов）著"高等幾何學"（Высшая Геометрея）譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲綜合大學及師範學院數學系的教本。

中譯本分兩册出版——上册幾何基礎，下册投影幾何。

高　等　幾　何　學

下　册

裘　光　明　譯

商　務　印　書　館出版
上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司發行

商務印書館北京廠印刷
(50826B)

1953年5月初版　版面字數135,000
印數1—4,500　定價¥13,500

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容為基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：‘蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是眞正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。’我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作為現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認眞地提出修正意見，作為該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

目　　次

第二部分　投影幾何學

註：加星號的各節原書用小字排印。

高等幾何學

第二部分　投影幾何學

第六章　投影幾何學原理

1. 投影幾何的對象

§99. 在十九世紀初期，不但幾何基礎的研究有了順利的發展，而且產生了幾何知識的一個特別的分支——投影幾何學。它的起源是由於繪圖和建築上的需要。起初投影幾何只有很受限制的範圍。但是在成長的過程中，它漸漸滲入到各種幾何的領域裏去。到了十九世紀末期，經過凱雷 (Cayley) 和克來恩(Klein)的研究，發現可以用投影幾何來給出歐幾里得(Euclid)幾何和兩種非歐幾里得（羅拔契夫斯基〔Лобачевский〕和黎曼〔Riemann〕）幾何的普遍根據。這樣一來，投影幾何和初等幾何基礎的研究，原來是互相獨立的，後來終於連結起來了。

§100. 著名的法國數學家龐賽勒(Poncelet, 1788—1867)選出幾何圖形的一些特別的性質，作爲研究的對象，而且把它們叫做投影的性質。

這些圖形的性質是什麼，我們此刻就來說明。

設 A 是在平面 α 上的任意圖形，β 是另一個平面，O 是空間中不在平面 α 和 β 上的任意點。點 O 和圖形 A 的每個點 M 決定直線 OM；直線 OM 與平面 β 相交在一個點，我們用 M' 來表示它，M' 叫做點 M（從中心 O 到平面 β 上）的投影。圖形 A 的所有點的投影，在平面 β 上組成一

個圖形A'，就叫做圖形A的投影。用來得到圖形A'的運算，叫做從點O出發的中心投影。變更點O和平面β的選擇，我們用中心投影可以得到圖形A的無窮多個投影，它們與圖形A部分相像，有許多關聯，但是也有着差別。例如，投射一個圓周，可以得到橢圓、拋物線或者雙曲線；投射一個三角形，可以得到任意形狀的三角形，等等。這樣一來，圖形的許多性質並不轉移到它的投影上。例如，等邊三角形的性質在投影下不能保留，一般地說來，結果得到的不會再是等邊三角形；通常圓周的定義所表達的它的基本性質，在投影下也可以改變，因爲，投射一個圓周，可以得到橢圓等等。完全同樣地，許多與圖形有關的量，一般地說來，在投影下也改變了。例如，投射一個長度a的線段，可以得到任意長度的線段；投射一個面積Δ的三角形，可以得到面積大於或者小於Δ的三角形。

另一方面，圖形具有一些在任意投影下還保留着的性質，而且還可以有一些在任意投影下保留不變的與圖形對應的量。這些性質和量就叫做投影不變量。

正是這些對於任意投影不變的圖形性質，龐賽勒叫做投影性質，把它們當做投影幾何的研究對象。此外，投影幾何的對象還有所有對於投影不變的量。

例子　如果圖形A的點$P_1, P_2, \cdots, P_n$落在一條直線上，則這些點的投影$P_1', P_2', \cdots, P_n'$落在一條直線上。實際上，圖形裏點的位置的共線性是投影性質。還可以換句話說，直線是投影幾何的對象。

如果圖形A的點$Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$落在某個圓錐曲線k上，則這些點的投影也落在一個圓錐曲線k'上。換句話說，圓錐曲線也是投影幾何的對象。這時應該注意的是，圓周、橢圓、拋物線或者雙曲線單獨具有的性質，不是投影性質，所以在投影幾何裏，不能像在初等幾何裏那樣，

把圓錐曲線分類。這也就是說，雖然圓錐曲線全是投影幾何的對象，但是它們各别的形狀——圓周、橢圓、拋物線、雙曲線，在投影幾何裏不能區别，也不單獨討論。

§101. 研究圖形的投影性質的問題，引起許多幾何學家的注意，其中在龐賽勒以後，我們可以提出沙爾(Chasles, 1793—1880)和史泰因納兒(Steiner, 1796—1863)。他們做了些投影幾何一般性問題的工作，在這些工作裏史泰因納兒、沙爾和跟隨他們的幾何學家，造成幾何學中綜合方向的復興。與解析方法相對，他們推進了綜合的方法，這些幾何學家對於投影幾何的工具的改進，和把它們應用到各種幾何問題上去，無疑地都達到了極大的成就。

但是在幾何觀點的發展中，投影幾何的主要意義，不再取决於用適當的解析幾何方法來處理大量的個别情形了。現在我們看到，在投影幾何的那種推廣裏的主要意義，是在於它能用某種方法，把各種幾何系統統一起來了，特别地，初等幾何也包括在投影的樣式裏了。

然而在史泰因納兒和沙爾那時，投影幾何還只是初等幾何的一部分。投影幾何成為完全獨立的學科是十九世紀後一半的事情。

這種轉變的重要前提是無窮遠元素在投影幾何裏的使用。我們此刻就要特别來談一下這個問題。

§102. 設A是空間的任意點，a是不通過點A的直線。經過A和a引平面α，我們來討論平面α上通過點A的所有直線。這些直線組成中心A的平面線束；我們把它叫做線束A。

在這個線束的射線和直線a的點中間我們規定這樣的對應：與直線a的每個點M對應的是線束A中與直線a相交在點M的射線（圖95）。射線m叫做投射點M的射線。

明顯地，對於直線a上任何位置的點M，總有確定的射線m與它對

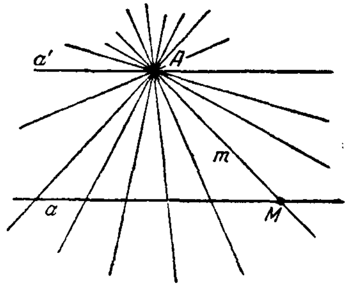

圖 95

應。但是却不能斷言，與線束 A 的任意射線對應，有直線 a 的點。那是說，線束 A 中與直線 a 平行的射線，不與 a 相交，因之就沒有與它對應的點。這樣一來，在線束 A 的射線和直線 a 的點中間的對應，就不是一對一的。

這個事實在研究投影的時候，是許多不方便的根源。爲了避免它，我們約定把平行的直線看做是相交在無窮遠處。於是線束 A 裏與直線 a 平行的射線 a'，也像每一個別的射線一樣，在直線 a 上有它的對應點，只是這個點不是普通的，而是一個新的對象，叫做直線 a 的<u>無窮遠點</u>。

直線的無窮遠點也算是屬於通過這條直線的每個平面的。再有，假設平行的直線有一個公共的無窮遠點；與這相當，在一個平面上的平行直線組就叫做<u>有無窮遠中心的線束</u>。

我們注意到，有無窮遠中心的線束在投影下能變成普通的線束。例如，在圖 96 裏，平面 α 上有無窮遠中心 S_∞ 的線束，從中心 S 投射到平面 β 上，成爲中心 S 的普通的線束。

不平行直線的無窮遠點算是不同的。這樣一來，每個平面就會有無窮多個不同的無窮遠點了。平面上所有無窮遠點的集合，叫做它的<u>無窮遠直線</u>。

空間中所有無窮遠點的集合叫做<u>無窮遠平面</u>。這樣的術語由下面的兩個事實辯明：

1. 兩個平行的平面有公共的無窮遠點，根據這個，平面上無窮遠點的集合可以認爲是由兩個平面相交而得到的形象；所以平面上無窮遠點的集合自然叫做直線了。

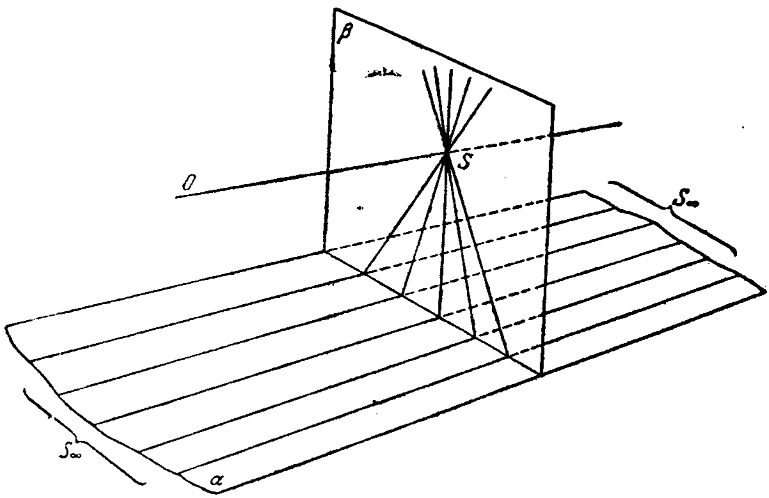

圖 96

2. 空間中所有無窮遠點的集合，與任意普通的平面相交，決定一條無窮遠直線。所以這個集合自然叫做平面了。

§ 103. 所有前面的敍述可以總結成下面的樣子。

在歐幾里得空間的對象集合中增加一些新的元素，把它們叫做«無窮遠點»、«無窮遠直線»、«無窮遠平面»。新的元素的增加要遵守一定的條件，那就是：

1. 在直線的點集合裏添上一個無窮遠點；在平面的直線集合裏添上一條無窮遠直線；在空間的平面集合裏添上一個無窮遠平面。

2. 擴大的幾何元素集合的互相從屬的性質，應該滿足所有關聯公理（也就是希爾倍脫〔Hilbert〕第一組公理）的要求。

3. 擴大的幾何元素集合的互相從屬的性質應該是這樣：每兩個平面有公共的直線，每條直線和每個平面有公共的點，而且在一個平面上的每兩條直線有公共的點。

增加了無窮遠點的直線叫做投影直線；增加了無窮遠直線的平面叫做投影平面；增加了無窮遠平面的空間叫做投影空間。

投影直線應該認爲是封閉的線，它的拓撲結構與圓周相同。投影平面應該認爲是封閉的二維流形，它的拓撲結構在§88裏寫過。投影空間的拓撲特性我們不討論了；讀者可以從關於拓撲學的專門著作裏知道這個問題。

§104. 在初等幾何裏也常常把無窮遠元素引進討論裏。但是在初等幾何裏利用它，實質上只限制在幾何事實的特別的文字表示方法上（例如，不說直線平行，而說它們在無窮遠處相交，把圓柱當做有無窮遠頂點的圓錐，等等）。相反地，在投影幾何裏，無窮遠元素佔着與普通元素同樣的地位，也是投影空間的有機部分。

如果比較一下初等幾何和投影幾何的研究對象，這種差別的原因是十分明白的。初等幾何的主要內容是研究所謂圖形的量度性質，也就是與幾何量（長度、角度和面積等等）的測量有關的性質。測量任意有普通端點的線段 AB，總可以引出確定的表達線段 AB 長度的數目。但是當線段的一個端點是無窮遠點的時候，測量的步驟就失去效用了，因爲在那樣的線段上，線性單位可以放上無窮多次。用測量角度的步驟去測量一條邊是無窮遠直線的角，或者用測量面積的步驟去測量含有無窮遠元素的圖形的面積，情形也完全一樣。

這樣一來，在初等幾何裏，無窮遠元素必須佔據一個特別的地位。與普通的幾何元素有本質上的不同。相反地，在投影幾何裏，由於圖形的量度性質不是它的對象，上面所說的無窮遠元素與其他元素的差別失去了力量。再有，因爲在投影下無窮遠元素可以變成普通的元素，因此它們不具有任何把它們與普通的元素區別開來的投影性質。所以在投影幾何裏，在普通的和無窮遠的元素中間沒有差別。

§105.　無窮遠元素的觀念很早就產生了。無窮遠元素和普通元素的平等性，從投影幾何的觀點看來雖然很自然，但是在用初等幾何的方法來研究投影性質時却會留下錯覺，因爲那些方法是運用量度的，而初等幾何的量度必然會引向有窮的和無窮遠的元素中間的差別。爲了使投影幾何的概念具有正確的意義，必須把所有與量度有關的東西從投影幾何排除掉。

把投影幾何從利用量度解放出來的問題，是馮・斯滔達脫（Von Staudt, 1798—1867）所提出和原則上解決的。

投影幾何從量度解放出來，成爲只研究幾何元素相互位置的性質的學科。同時，投影幾何成爲有自己的公理系統和對象集合（就是投影直線、投影平面和投影空間）的獨立的幾何學科。

這一篇裏所說的是用直覺觀點來說明的投影幾何的對象。後面才是它的公理系統的敍述。

2. 代沙葛定理、調和元素組的構成

§106.　我們把投影幾何建築在一個公理系統上，這些公理在分別叫做點、直線和平面的基本對象中間規定了它們的相互關係。這些公理可以分成三個組：

組 I 包含九個關聯公理。

組 II 包含六個順序公理。

組 III 包含一個連續公理。

在這一篇裏，我們討論組 I 的公理和它們的重要推論。

組 I：投影的關聯公理。

I, 1.　對於任意兩個點 A 和 B，有着直線 a 通過點 A, B。

I, 2.　對於任意兩個不同的點 A 和 B，至多有一條直線通過點

A, B。

I, 3. 在每條直線上至少有三個點。至少有三個點不在一條直線上。

I, 4. 經過不在一條直線上的三個點 A, B, C，有一個平面 α。在每個平面上至少有一個點。

I, 5. 經過不在一條直線上的三個點 A, B, C，至多有一個平面。

I, 6. 如果直線 a 有兩個不同的點 A, B 在平面 α 上，則直線 a 的每個點都在平面 α 上。

I, 7. 如果兩個平面 α, β 有公共點 A，則它們至少還有一個公共點 B。

I, 8. 至少有四個點不在一個平面上。

I, 9. 在一個平面上的兩條直線有着公共的點。

如果拿公理 I, 1—9 與希爾倍脫第一組公理（看第二章，§ 12）比較，首先可以看到，希爾倍脫第一組公理的所有要求也包含在投影公理 I, 1—9 裏了。所以只用關聯公理做基礎的所有初等幾何的定理，在投影幾何裏也眞實。投影的關聯公理與初等幾何的關聯公理不同的只在下面兩點：

1）在投影系統的公理 I, 3 裏，要求在每條直線上至少有三個點，而在對應的希爾倍脫系統的公理 I, 3 裏所規定的要求是，直線上即使只有兩個點也可以。

2）投影公理多出了 I, 9，這在初等幾何裏沒有規定也並不適合。根據公理 I, 9，在投影幾何裏沒有平行性，因為在一個平面上的每兩條直線一定要相交。

這樣一來，投影的關聯公理比初等幾何的關聯公理包含着更多的要求，由於這個緣故，從投影的關聯公理可以引出不能從希爾倍脫關聯

公理得到的定理。

特別地，從公理 I, 1—9 推出

1)　直線和平面總有公共的點；

2)　兩個平面總有公共的直線；

3)　三個平面總有公共的點。

§ 107.　不停留在公理 I, 1—9 的顯然的結果上，我們來證明代沙葛(Desargues)定理，這是平面上的投影幾何的基底。

我們約定，把不在一條直線上的三個點，和兩兩地連結這些點的三條直線的集合，叫做<u>三點形</u>。這三個點叫做三點形的頂點，連結它們的直線叫做三點形的邊。(我們避免把這個圖形叫做三角形，保留這個名詞去表示別種形狀的形象，這在我們知道了投影的順序公理以後就會提到。)

考慮兩個三點形，用 A, B, C 和 A', B', C' 來表示它們的頂點。我們把同樣字母表示的點叫做對應頂點(A 和 A', B 和 B', C 和 C')；同樣地，我們把通過對應頂點的直線叫做對應邊。

定理 1　(**代沙葛第一定理——正定理。**)<u>如果三點形 ABC 和 $A'B'C'$ 的對應邊的交點 P, Q, R, 在一條直線上，則連結對應頂點的直線通過一個點</u>(圖97)。

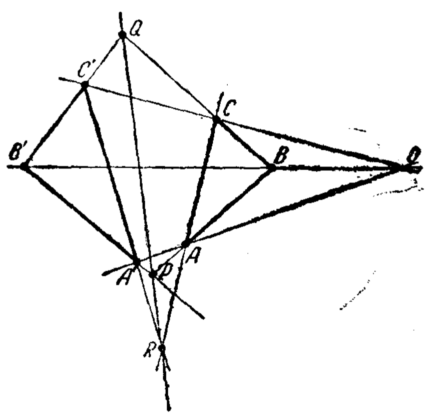

圖 97

定理 2　(**代沙葛第二定理——逆定理。**)<u>如果連結三點形 ABC 和 $A'B'C'$ 的對應頂點的直線通過一個點，則這兩個</u>

三點形的對應邊的交點在一條直線上*)。

我們約定，把兩個三點形對應邊交點所在的直線，叫做透視軸線；把連結對應頂點的直線所通過的點，叫做透視中心。於是代沙葛的兩個定理可以簡單寫成下面的樣子：

如果兩個三點形有透視軸線，則它們就有透視中心。反過來也對。

我們先來證明代沙葛第一定理。

設 ABC 和 $A'B'C'$ 是在一個平面 α 上的兩個三點形，它們有着透視軸線 u（圖 98）。這樣一來，直線 u 就含有對應邊 AB 和 $A'B'$, BC

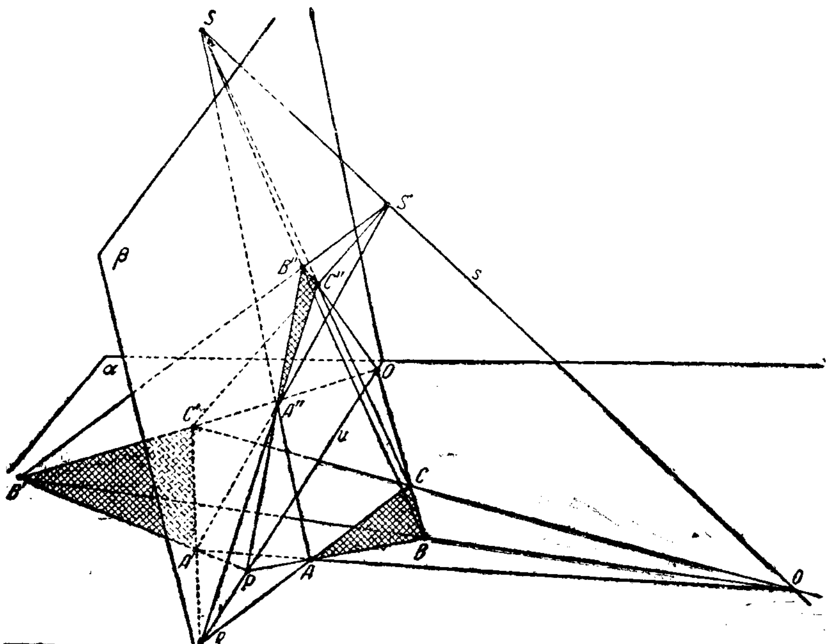

圖 98

*) 對我們重要的是三點形 ABC 和 $A'B'C'$ 在一個平面上的情形。

和$B'C'$, AC 和 $A'C'$的交點 P, Q, R。需要證明的是，直線AA', BB', CC' 通過一個點，也就是說，已知的三點形有透視中心 *)。

爲了證明，取不在平面 α 上的某個點；用 B'' 來表示它(點 B'' 的存在由公理 I, 8 保證)。點 P, Q 和 B'' 不在一條直線上；所以有唯一的平面 β 通過這些點，根據公理 I, 3, 我們可以在直線$B''Q$上取一個與B''和 Q 都不同的點 C''。從公理 I, 6，這個點在平面 β 上，而且點 R 也是如此。所以直線RC'' 落在平面 β 上。因爲直線 RC'' 和 PB'' 在一個平面上，從公理 I, 9 它們有公共的點；用 A'' 來表示它。我們在平面 β 上得到了三點形 $A''B''C''$，它與三點形 ABC 和 $A'B'C'$ 有着一個特殊的關係；那說是，三點形 ABC, $A'B'C'$ 和 $A''B''C''$ 有公共的透視軸線 u，並且這些三點形的對應邊 AB, $A'B'$ 和 $A''B''$ 通過一個點 P，同樣地，邊 BC, $B'C'$ 和 $B''C''$ 通過一個點 Q，邊 AC, $A'C'$ 和 $A''C''$ 通過一個點 R。

三點形 ABC 和 $A''B''C''$ (三點形 $A'B'C'$ 和 $A''B''C''$ 也一樣) 有透視中心是不難證明的。雖然我們對於三點形 ABC 和 $A''B''C''$ (或者 $A'B'C'$ 和 $A''B''C''$) 所要確立的事實，就是代沙葛定理對於三點形 ABC 和 $A'B'C'$ 所斷言的事實，但是由於當三點形 ABC 和$A''B''C''$ (或者 $A'B'C'$ 和 $A''B''C''$) 在不同的平面上，證明是很簡單的。

我們來討論平面 PAA'', QBB'' 和 RCC''；像 § 106 最後所說的，每三個平面總有公共的點。設 S 是這些平面的公共點。我們注意到直線 AA'' 是平面 PAA'' 和 RCC'' 的公共直線；再有，很明顯地，平面 PAA'' 和 RCC'' 是不同的。事實上，平面 PAA'' 包含直線 BB''。而 B''的取法說明直線 BB'' 和 u 沒有公共的點，由此推出點 R 不在平面

*) 我們所討論的是直線 u 不包含已知三點形的頂點的情形。(在相反的情形下，定理還是眞實而且更容易證明。)