

力学丛书

# 陀螺力学

刘延柱 著

科学出版社



力学丛书

# 陀螺力学

刘延柱 著

科学出版社

1986

## 内 容 简 介

本书叙述以陀螺仪为研究对象的一般力学的一个分支——陀螺力学。从运动学和动力学观点系统地阐明陀螺仪运动的普遍规律。除了对万向支架陀螺仪的进动和章动理论作简要的总结以外，本书还建立转子陀螺仪和挠性陀螺仪的力学理论，与万向支架陀螺仪理论连贯成较完整的系统。

### 力 学 丛 书 陀 螺 力 学

刘 延 柱 著  
责任编辑 李成香

科 学 出 版 社 出 版  
北京朝阳门内大街137号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1986年1月第一版 开本：850×1168 1/32  
1986年1月第一次印刷 印张：10  
印数：0,001—2,800 字数：260,000

统一书号：13031·3058

本社书号：4208·13-2

定 价：2.85 元

## 《力学丛书》编委会

主 编：张 维

副主编：钱令希 林同驥 郑哲敏

编 委：（按姓氏笔划为序）

丁 懋	卞荫贵	庄逢甘	朱兆祥
朱照宣	刘延柱	孙训方	李 源
张涵信	周光炯	欧阳邕	季文美
苟清泉	胡海昌	柳春图	贾有权
钱伟长	徐芝纶	徐华舫	郭仲衡
郭尚平	谈镐生	黄文熙	黄克累
黄克智	程贯一		

## 序 言

陀螺力学是一般力学的一个重要分支。它以经典刚体动力学为基础，并随着陀螺仪技术的发展而逐渐形成一门不同于经典刚体动力学的独立力学分支。本书的主要目的是系统地叙述陀螺力学的基本理论并介绍近年来的新进展。

自1978年以来，作者曾在上海交通大学为陀螺仪器专业和工程力学专业研究生讲授陀螺力学课程，并先后为新跃仪表厂和上海仪表厂开设陀螺力学讲座。本书是在对课程讲义作较大的修改和补充后写成的，其中关于转子陀螺仪和挠性陀螺仪的较新内容主要来自作者近年来的工作结果。在写作过程中，作者力图以最简洁的方式总结万向支架陀螺仪的进动和章动理论，同时介绍陀螺力学的新进展，如新型陀螺仪原理、非线性问题、弹性变形问题等，将这部分内容与万向支架陀螺仪理论乃至刚体动力学的经典理论贯通起来而形成较完整的体系。但限于水平，这个意图离完全实现还相距甚远。此外，本书着重从动力学观点阐明陀螺仪运动的普遍性规律，而不企图对具体陀螺仪表作详细解释。书中避免使用过深的数学工具，读者只要掌握矢量、矩阵和常微分方程的基本知识就能顺利阅读。虽然通常认为陀螺与陀螺仪的名词涵义略有不同，后者主要指工程技术中使用的陀螺仪表，但在本书中因力学模型相同而不加区别。

在本书的写作和出版过程中，得到各方面的热情关怀和支持，承蒙北京航空学院黄克累教授详细审阅初稿并提出宝贵意见，杨海兴同志协助完成全部插图，在此谨表深切的谢意。

限于水平，错误与不妥之处难免，望读者不吝指正。

刘延柱

一九八二年六月于上海交通大学

• i •

# 目 录

## 序言

绪论	1
第一章 陀螺的运动学	3
§ 1.1 坐标变换	3
§ 1.2 刚体的有限转动	7
§ 1.3 刚体的无限小转动	16
§ 1.4 万向支架的运动学特点	21
§ 1.5 非完整约束问题	28
第二章 刚体动力学基础	33
§ 2.1 刚体的质量几何	33
§ 2.2 动量矩定理	37
§ 2.3 欧拉情形刚体定点运动	43
§ 2.4 拉格朗日情形刚体定点运动	51
第三章 陀螺的运动方程	60
§ 3.1 万向支架的动力学特点	60
§ 3.2 静止基座上的陀螺运动方程	64
§ 3.3 运动基座上的陀螺运动方程	73
§ 3.4 多陀螺系统的运动方程	79
第四章 复摆与单自由度陀螺	89
§ 4.1 复摆	89
§ 4.2 单自由度陀螺	101
§ 4.3 弹性变形问题	107
第五章 陀螺的进动理论	119
§ 5.1 陀螺垂直仪	119
§ 5.2 陀螺摆	127
§ 5.3 四陀螺垂直仪	135
§ 5.4 非线性问题	140

第六章 陀螺的进动理论(续).....	148
§ 6.1 陀螺罗经 .....	148
§ 6.2 带阻尼的陀螺罗经 .....	161
§ 6.3 电控陀螺罗经 .....	166
§ 6.4 双转子陀螺罗经 .....	171
§ 6.5 空间陀螺罗经 .....	175
第七章 陀螺的章动理论.....	179
§ 7.1 章动的线性理论 .....	179
§ 7.2 线性陀螺系统 .....	188
§ 7.3 章动的非线性理论 .....	195
§ 7.4 弹性变形问题 .....	206
第八章 转子陀螺.....	214
§ 8.1 转子陀螺的特点 .....	214
§ 8.2 刚体定点运动的相坐标方程组 .....	215
§ 8.3 陀螺的非稳态运动 .....	220
§ 8.4 陀螺的稳态运动 .....	228
§ 8.5 万向支架陀螺的摄动理论 .....	235
第九章 挠性陀螺.....	240
§ 9.1 挠性陀螺的特点 .....	240
§ 9.2 单自由度挠性陀螺 .....	241
§ 9.3 调谐陀螺的进动理论 .....	244
§ 9.4 非理想的调谐陀螺 .....	256
§ 9.5 调谐陀螺的章动理论 .....	266
第十章 惯性导航.....	275
§ 10.1 几何式惯性导航 .....	275
§ 10.2 半解析式惯性导航 .....	276
§ 10.3 解析式惯性导航 .....	284
附录一 二阶张量.....	287
附录二 罗斯-霍尔维茨稳定性判据 .....	291
附录三 相平面上的奇点理论.....	292
附录四 准球形转子的支承力和力矩.....	298
参考文献.....	305

## 绪 论

1780年欧拉建立了以他命名的刚体定点运动方程,从而奠定了刚体动力学的基础。经典刚体动力学致力于积分非线性的欧拉方程,对于有限几种特定条件所获得的解析积分足以解释天体的转动,以及重陀螺在光滑平面上的滚动等运动现象。1852年佛科将装有高速旋转的对称转子,且旋转轴能自由改变方位的装置称为陀螺仪(gyroscope)。在此以后,随着陀螺仪在导航技术中的广泛应用,其结构和力学模型日趋复杂,从而超出了经典刚体动力学的范畴。实际陀螺仪的力学模型是一个复杂的刚体系,各刚体部件之间存在各种完整或非完整约束,除重力和惯性力以外,它也可能受流场、静电场或磁场的作用,以及与控制系统的各种力矩器的作用。如果考虑到部件可能产生弹性变形,陀螺仪的力学模型还应看作是刚体与弹性体组成的更复杂的动力学系统。因此与经典刚体动力学不同,对按实际陀螺仪力学模型建立起来的动力学方程寻找严格的解析积分几乎是不可能的。必须发展一种近似的但能足够准确地反映实际陀螺仪运动规律的力学理论来指导陀螺仪的研究和设计。这就是以一阶常微分方程组为基础的陀螺进动理论。当转速足够高时,进动理论一般可给出与实验现象符合得很好的分析结果。对于不能用进动理论解释的直接稳定陀螺,则发展了陀螺的章动理论。于是逐渐形成一门以进动理论和章动理论为特征的不同于经典刚体动力学的独立力学分支——陀螺力学。

早期的陀螺力学仅限于线性理论,它已发展得十分完善而成为指导航空或航海陀螺仪表设计的理论基础。但非线性理论也逐渐显示出重要性。这不仅是因为陀螺仪实际上存在着轴承干摩擦或力矩器的非线性特性,而且随着对陀螺仪精度要求的提高,线性理论中被忽略了的非线性项的细微影响日益变得不可忽视。因此非线性振动的各种分析方法随之向陀螺力学渗透而形成陀螺力学



的非线性理论。长期以来陀螺力学的主要研究对象是万向支架陀螺仪，但转子陀螺仪和挠性陀螺仪的兴起使陀螺力学面临新的课题。前者涉及到转子的不受约束的大幅度运动，而后的全部构件都参与高速旋转。为适应新的力学模型而建立起来的新理论极大地丰富了陀螺力学的内容。

本书将系统地叙述陀螺力学的基本理论。全书共分十章。第一、二章介绍刚体运动学和动力学的基础知识，其中对欧拉所考虑的刚体定点运动采用了作者所提出的计算步骤。

第三至七章叙述了万向支架陀螺仪的进动和章动理论，建立了统一的运动方程，并化作复数形式。陀螺在平衡位置附近的运动性态利用奇点理论直接判定。对于动力稳定陀螺，则利用凯尔文-泰特定理分析其运动。包括章动漂移在内的各种非线性问题均以线性理论为零次近似，使用逐次近似法处理。采用上述简明的分析方法可以摆脱繁琐乏味的数学演算，使读者得以透过简洁的数学形式掌握万向支架陀螺仪理论的丰富内容。

第八章用相坐标的摄动方程组代替欧拉方程讨论转子陀螺的运动。可以看出，在分析刚体的拟规则进动时，相坐标摄动方程明显比欧拉方程优越。即使是万向支架陀螺，也可视作受支架惯性力矩干扰的转子陀螺，而利用摄动法处理。作者希望通过这一章内容能引起读者对相坐标摄动方法的重视。

第九章中系统地讨论了各种类型的挠性陀螺。使用逐次近似法以陀螺定轴性为零次近似，一次和二次近似分别对应于陀螺的进动和章动。采用双重时间尺度的摄动法导出陀螺的章动稳定性条件。第十章从陀螺力学观点简要地叙述惯性导航的基本原理。

为便于阅读，全书的叙述避免使用张量，只在附录中补充二阶张量概念。此外，附录中还列出相平面的奇点分类表，作为进动理论中判别陀螺在平衡位置附近的极点轨迹几何特征的理论工具。接近球形的转子陀螺的支承力和力矩必须通过复杂的曲面积分算出，此计算过程亦列入附录。在参考文献栏中收入了有代表性的或写作中主要参考过的著作与论文，但远非详尽的文献索引。

# 第一章 陀螺的运动学

## § 1.1 坐标变换

### 1. 矢量的矩阵表示

设  $(x, y, z)$  为直角坐标系, 各坐标轴的单位矢量为  $i, j, k$ , 任意矢量  $\alpha$  相对  $(x, y, z)$  的投影式为

$$\alpha = a_x i + a_y j + a_z k \quad (1.1)$$

对于确定的  $(x, y, z)$  坐标系, 矢量  $\alpha$  完全由投影  $a_x, a_y, a_z$  确定, 或由此投影排成的列阵  $\mathbf{A}$  或行阵  $\mathbf{A}^T$  确定

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T = [a_x \ a_y \ a_z] \quad (1.2)$$

与此类似, 定义矢量  $b, c, d$  的投影列阵  $\mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}$ . 矢量  $\alpha$  与  $b$  的加减运算或矢量  $\alpha$  与标量  $\lambda$  的乘积完全等价于相应的矩阵运算,

$$c = \alpha + b \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (1.3)$$

$$c = \lambda \alpha \quad \mathbf{C} = \lambda \mathbf{A} \quad (1.4)$$

矢量  $\alpha$  与  $b$  的标积  $\lambda$  等价于行阵  $\mathbf{A}^T$  与列阵  $\mathbf{B}$  的乘积:

$$\lambda = \alpha \cdot b \quad \lambda = \mathbf{A}^T \mathbf{B} \quad (1.5)$$

将矢量  $\alpha$  的投影排列成以下三维反对称方阵, 记以符号  $\tilde{\mathbf{A}}$ :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_x & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

则矢量  $\alpha$  与  $b$  的矢积等价于方阵  $\tilde{\mathbf{A}}$  与列阵  $\mathbf{B}$  的乘积:

$$c = \alpha \times b \quad \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{B} \quad (1.7)$$

设  $\tilde{\mathbf{B}}$  为  $b$  的投影方阵, 矢量  $\alpha, b, c$  的二重矢积  $d$  及混合积  $\lambda$  的

矩阵形式分别为

$$d = a \times (b \times c) \quad D = A\tilde{B}C \quad (1.8)$$

$$\lambda = a \cdot (b \times c) \quad \lambda = A^T\tilde{B}C \quad (1.9)$$

## 2. 方向余弦矩阵

任意二坐标轴之间的夹角余弦称为方向余弦。以  $c_{\xi a}$  表示  $\xi$  轴与  $a$  轴之间的方向余弦，它等于沿  $\xi$  轴和  $a$  轴的单位矢量  $\xi^0$  与  $a^0$  的标量积：

$$c_{\xi a} = \xi^0 \cdot a^0 \quad (1.10)$$

矢量  $\xi^0$  或  $a^0$  相对直角坐标系  $(x, y, z)$  的投影  $c_{\xi x}$ ,  $c_{\xi y}$ ,  $c_{\xi z}$  和  $c_{xa}$ ,  $c_{ya}$ ,  $c_{za}$  分别等于  $\xi$  轴或  $a$  轴与  $x, y, z$  轴系之间的方向余弦。将(1.10)式写作矩阵形式：

$$c_{\xi a} = [c_{\xi x} \ c_{\xi y} \ c_{\xi z}] \begin{bmatrix} c_{xa} \\ c_{ya} \\ c_{za} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

作为特例，如  $\xi$  轴与  $a$  轴重合，式(1.11)给出

$$c_{\xi x}^2 + c_{\xi y}^2 + c_{\xi z}^2 = 1 \quad (1.12)$$

$\xi$  轴与  $a$  轴垂直是另一种特例，给出

$$c_{\xi x}c_{xa} + c_{\xi y}c_{ya} + c_{\xi z}c_{za} = 0 \quad (1.13)$$

设  $\eta$  轴、 $\zeta$  轴与  $\xi$  轴组成直角坐标系（见图 1.1），式(1.11)中的  $\xi$  如换成  $\eta$  或  $\zeta$  亦分别成立。 $\xi, \eta, \zeta$  轴系与  $a$  轴之间的方向余弦可综合为一个矩阵公式：

$$\begin{bmatrix} c_{\xi a} \\ c_{\eta a} \\ c_{\zeta a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\xi x} & c_{\xi y} & c_{\xi z} \\ c_{\eta x} & c_{\eta y} & c_{\eta z} \\ c_{\zeta x} & c_{\zeta y} & c_{\zeta z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{xa} \\ c_{ya} \\ c_{za} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

上式右边的三维方阵称为  $(x, y, z)$  相对  $(\xi, \eta, \zeta)$  的方向余弦矩阵，以  $C_{\xi}^z$  表示，

$$C_{\xi}^z = \begin{bmatrix} c_{\xi x} & c_{\xi y} & c_{\xi z} \\ c_{\eta x} & c_{\eta y} & c_{\eta z} \\ c_{\zeta x} & c_{\zeta y} & c_{\zeta z} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

方向余弦矩阵实际上是以矩阵形式表示的方向余弦表格(见表 1.1),  $C_x^{\xi}$  右上角的  $x$  表示表格中横向排列的坐标系  $(x, y, z)$ , 右下角的  $\xi$  表示纵向排列的坐标系  $(\xi, \eta, \zeta)$ . 转置矩阵  $C_x^{\xi}$  表示  $(\xi, \eta, \zeta)$  相对  $(x, y, z)$  的方向余弦矩阵, 也就是表 1.1 中坐标系位置互换后的方向余弦表格.

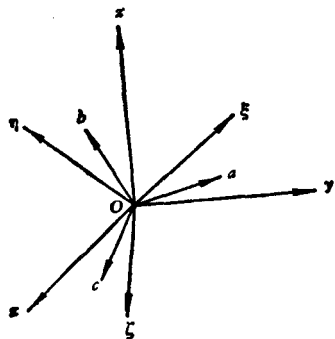


图 1.1

表 1.1

	$x$	$y$	$z$
$\xi$	$c_{\xi x}$	$c_{\xi y}$	$c_{\xi z}$
$\eta$	$c_{\eta x}$	$c_{\eta y}$	$c_{\eta z}$
$\zeta$	$c_{\zeta x}$	$c_{\zeta y}$	$c_{\zeta z}$

将沿  $a$  轴的矢量  $\alpha$  相对  $(x, y, z)$  或  $(\xi, \eta, \zeta)$  的投影列阵分别以  $A_x, A_{\xi}$  表示, 则式(1.14)为矢量  $\alpha$  的坐标变换公式:

$$A_{\xi} = C_{\xi}^x A_x \quad (1.16)$$

即任意矢量相对  $(\xi, \eta, \zeta)$  的投影列阵等于方向余弦矩阵  $C_{\xi}^x$  与该矢量相对  $(x, y, z)$  的投影列阵之乘积.

### 3. 方向余弦矩阵的变换

设  $b$  轴、 $c$  轴与  $a$  轴组成直角坐标系, 则式(1.14)中的  $a$  如换为  $b$  或  $c$  亦分别成立.  $(a, b, c)$  相对  $(\xi, \eta, \zeta)$  的方向余弦满足以下矩阵公式:

$$\begin{bmatrix} c_{\xi a} & c_{\xi b} & c_{\xi c} \\ c_{\eta a} & c_{\eta b} & c_{\eta c} \\ c_{\zeta a} & c_{\zeta b} & c_{\zeta c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\xi x} & c_{\xi y} & c_{\xi z} \\ c_{\eta x} & c_{\eta y} & c_{\eta z} \\ c_{\zeta x} & c_{\zeta y} & c_{\zeta z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{xa} & c_{xb} & c_{xc} \\ c_{ya} & c_{yb} & c_{yc} \\ c_{za} & c_{zb} & c_{zc} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

利用方向余弦矩阵符号将上式记为

$$C_{\xi}^a = C_{\xi}^x C_x^a \quad (1.18)$$

此变换公式适用于任意选取的三个直角坐标系。设有  $n$  个直角坐标系  $(x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )，从  $(x_i, y_i, z_i)$  中依次取三个坐标系列写变换公式：

$$\mathbf{C}_{x_1}^{x_n} = \mathbf{C}_{x_1}^{x_2} \mathbf{C}_{x_2}^{x_n}, \quad \mathbf{C}_{x_2}^{x_n} = \mathbf{C}_{x_2}^{x_3} \mathbf{C}_{x_3}^{x_n}, \quad \dots, \quad \mathbf{C}_{x_{n-1}}^{x_n} = \mathbf{C}_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{C}_{x_n}^{x_n} \quad (1.19)$$

将后式逐个代入前式，得到方向余弦矩阵变换的一般公式：

$$\mathbf{C}_{x_1}^{x_n} = \mathbf{C}_{x_1}^{x_2} \mathbf{C}_{x_2}^{x_3} \mathbf{C}_{x_3}^{x_4} \dots \mathbf{C}_{x_{n-1}}^{x_n} \quad (1.20)$$

利用此公式，复杂的方向余弦计算可化作一系列简单的方向余弦矩阵的连乘积。

#### 4. 方向余弦矩阵的性质

将方向余弦矩阵的一般形式记为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

利用式(1.12), (1.13), 可写出  $c_{ij}$  之间的六个关系式：

$$\sum_{k=1}^3 c_{ki} c_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.22)$$

$\delta_{ij}$  为克罗内克 (Kronecker) 符号, 即  $\delta_{ij} = 1 (i = j)$  或  $0 (i \neq j)$ 。

关系式(1.22)的存在导出以下性质：

性质一 方向余弦矩阵的 9 个元素中只有 3 个独立参数。

性质二 方向余弦矩阵为正交矩阵, 其逆矩阵与转置矩阵相等, 且矩阵的行列式等于  $1^D$ 。

讨论  $\mathbf{C}$  的特征值问题：

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{A} = 0 \quad (1.23)$$

其中  $\mathbf{E}$  为单位矩阵。特征方程  $|\mathbf{C} - \lambda \mathbf{E}| = 0$  展开后为  $\lambda$  的三次代数方程, 利用性质二推知其零次项等于  $-1$ 。因而三个特征根的乘积为 1, 其中至少必有一个等于 1 的实根, 使以下关系式成

1)  $|\mathbf{C}| = i \cdot (j \times k) = \pm 1$ , 正号对应于右手坐标系, 负号对应于左手坐标系。

立:

$$(C - E)A = 0 \quad \text{或} \quad A = CA \quad (1.24)$$

由此得到

**性质三** 每个方向余弦矩阵都有确定的特征矢量与之相对应,它对于变换前后的坐标系有相同的方向余弦。

## § 1.2 刚体的有限转动

### 1. 刚体

**刚体**是对刚硬物体的抽象。它由连续充满空间中某个确定域内的物质组成,其中任意两点之间的距离在运动过程中保持不变。不受约束的自由刚体相对确定的参考坐标系有六个运动自由度,即刚体内任意点 $O$ 的三个移动自由度和刚体绕 $O$ 点的三个转动自由度。 $O$ 点的移动和刚体绕 $O$ 点的转动可能相互影响,有时也可能独立进行。如果 $O$ 点的运动已独立确定,其运动规律可视作已知的约束条件,则刚体只有绕 $O$ 点转动的三个独立自由度。 $O$ 点在惯性空间中固定不动是一种特例,这时刚体作绕固定点的转动。

分析刚体绕 $O$ 点的转动规律时,可将 $O$ 作为原点建立固结于刚体的直角坐标系来表示刚体的位置。多个刚体同时绕 $O$ 点转动时,刚体之间的相对位置由各个刚体坐标系之间的方向余弦矩阵确定。同一刚体绕 $O$ 点多次转动时,将每次转动后的刚体坐标系位置相对参考系固定而定义一系列中间坐标系,刚体历次转动前后的位置关系由中间坐标系之间的方向余弦矩阵确定。矩阵各元素中的三个独立参数对应于刚体绕 $O$ 点的三个独立的转动自由度。

### 2. 欧拉角

设具有公共原点 $O$ 的直角坐标系 $(x, y, z)$ 和 $(\xi, \eta, \zeta)$ 表示绕 $O$ 点转动的不同刚体或同一刚体的不同位置。将 $(x, y, z)$ 设想为 $(\xi, \eta, \zeta)$ 依次绕其不同的坐标轴转动三次后所到达的位置,则各次

转过的角度可作为  $(x, y, z)$  相对  $(\xi, \eta, \zeta)$  的三个独立角度坐标。转动轴可任意选取，但不得绕同一转动轴相继作两次转动。不同的转动轴选取次序对应于不同的角度坐标定义。

设  $(\xi, \eta, \zeta)$  首先绕  $\zeta$  轴转动  $\psi$  角到达  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  位置<sup>1)</sup>，然后绕  $\xi_1$  轴转动  $\vartheta$  角后的位置为  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ ，最后绕  $\zeta_2$  轴转动  $\varphi$  角到达  $(x, y, z)$  位置。按这种转动次序确定的角度坐标  $\psi, \vartheta, \varphi$  称为欧拉 (Euler) 角，其中  $\psi$  为进动角， $\vartheta$  为章动角， $\varphi$  为自转角 (见图 1.2)。 $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  在文献中常称作莱查 (Resal) 坐标系，其中只有  $\zeta_2$  轴与刚体固结， $\xi_2$  轴沿  $(x, y)$  与  $(\xi, \eta)$  二坐标面的节线。由于其运动不包含刚体的自转，因此使用莱查坐标系讨论刚体的进动角与章动角变化规律显然比刚体坐标系更为方便。

上述转动过程中各坐标系的相互关系用以下关系式表示：

$$(\xi, \eta, \zeta) \xrightarrow[\zeta, \zeta_1]{\psi} (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \xrightarrow[\xi_1, \xi_2]{\vartheta} (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \xrightarrow[\zeta_2, z]{\varphi} (x, y, z)$$

箭头表示每次转动所引起的坐标系变动，箭头下方表示转动轴，上

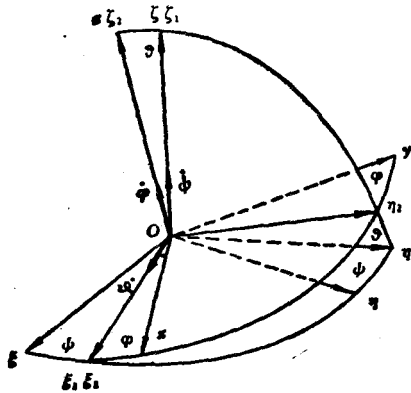


图 1.2

1) 除顺时针转动须特别注明以外，一般情况下转动方向均规定为逆时针而不加说明。

方表示转过的角度。每次转动前后坐标系之间的方向余弦矩阵为

$$\mathbf{C}_{\xi_1}^x = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$\mathbf{C}_{\xi_2}^{\xi_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{C}_{\xi_3}^{\xi_2} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

利用公式(1.20),  $(x, y, z)$  相对  $(\xi, \eta, \zeta)$  的方向余弦矩阵等于逐次绕坐标轴转动的方向余弦矩阵的连乘积。

$$\mathbf{C}_{\xi}^x = \mathbf{C}_{\xi_3}^{\xi_2} \mathbf{C}_{\xi_2}^{\xi_1} \mathbf{C}_{\xi_1}^x = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \phi \sin \varphi \\ \sin \phi \cos \varphi + \cos \vartheta \cos \phi \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \phi \sin \varphi - \cos \vartheta \sin \phi \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \phi \\ -\sin \phi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \phi \cos \varphi & -\sin \vartheta \cos \phi \\ \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

以  $c_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$  表示矩阵  $\mathbf{C}_{\xi}^x$  的元素, 不难导出用方向余弦表示的欧拉角计算公式:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= c_{33}, & \sin \vartheta &= \pm \sqrt{1 - c_{33}^2} \\ \cos \phi &= -\frac{c_{23}}{\sin \vartheta}, & \sin \phi &= \frac{c_{13}}{\sin \vartheta} \\ \cos \varphi &= \frac{c_{32}}{\sin \vartheta}, & \sin \varphi &= \frac{c_{31}}{\sin \vartheta} \end{aligned} \quad (1.29)$$

可看出  $\vartheta = n\pi (n = 0, 1, \dots)$  是欧拉角的奇点, 它对应于  $x$  轴与  $\zeta$  轴重合的位置。由于  $\xi_1$  轴的位置变得不确定, 以致  $\phi$  与  $\varphi$  都失去明确定义。因此, 当  $\vartheta = n\pi$  时, 不可能利用式(1.29)算出确定的欧拉角。



以上所定义的欧拉角是经典刚体动力学中习惯使用的角度坐标,称作经典欧拉角。它特别适合于讨论章动角  $\vartheta$  接近不变,进动角  $\phi$  和自转角  $\varphi$  接近匀速增长的刚体运动,即刚体的拟规则进动。除了上面所述章动角  $\vartheta$  存在奇点以外,经典欧拉角的另一缺点是当  $x$  轴无限接近  $\zeta$  轴时,三个角度坐标中只有唯一的变量  $\vartheta$  可看作是无限小量。

### 3. 第二类欧拉角

另一种角度坐标选取方法是令  $(\xi, \eta, \zeta)$  首先绕  $\xi$  轴转动  $\alpha$  角到达  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  位置,再绕  $\eta_1$  轴转动  $\beta$  角后的位置为莱查坐标系  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ ,然后绕  $\zeta_2$  轴转动  $\gamma$  角到达  $(x, y, z)$  位置(见图 1.3)。各坐标系之间的关系为

$$(\xi, \eta, \zeta) \xrightarrow[\xi, \xi_1]{\alpha} (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \xrightarrow[\eta_1, \eta_2]{\beta} (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \xrightarrow[\xi_2, z]{\gamma} (x, y, z)$$

按此转动次序定义的角度坐标称为第二类欧拉角<sup>1)</sup>,以区别于前面

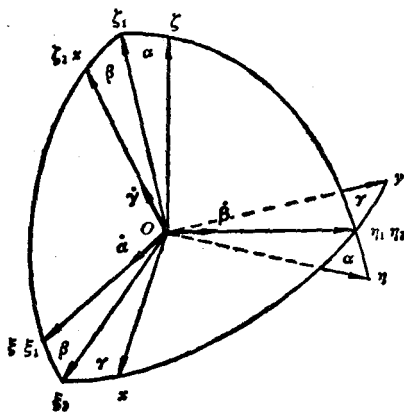


图 1.3

1) 文献中也称作克雷洛夫 (Крылов) 角<sup>[20]</sup>, 卡尔丹 (Cardan) 角<sup>[21]</sup>, 或布莱恩 (Bryant) 角。